2023 春算法基础期末考答案

BY 陈雪 and 邵帅

2023 年 7 月 1 日

题目 1. 匹配题与选择题。

解答. 最大流：Ford-Fulkerson；最小生成树：Prim、Kruskal；最短路径：Dijstra、BFS、Floyd-Warshall。

124

题目 2. 图的最小环。

解答. 我们注意到 Floyd-Warshall 算法有一个性质：在最外层循环到点 k 时（尚未开始第 k 次循环），最短路数组 d 中，$d_{u,v}$ 表示的是从 u 到 v 且仅经过编号在 $[1,k)$ 区间中的点的最短路，这可以通过伪代码来理解。

Algorithm 1 Floyd-Warshall

procedure MAIN
  for all $(u,v) \in E$ **do**
    $d[u,v] = w(u,v)$
  end for
  for k from 1 to n **do**
    for i from 1 to n **do**
      for j from 1 to n **do**
        $d[i,j] = \min\{d[i,j], d[i,k] + d[k,j]\}$
      end for
    end for
  end for
end procedure

由最小环的定义可知其至少有三个顶点，设其中编号最大的顶点为 p，环上与 p 相邻两侧的两个点为 u,v，则在最外层循环枚举到 $k=p$ 时，该环的长度即为 $d_{u,v} + w(v,p) + w(p,u)$，根据上面性质可以得到这是一个非平凡环。

故在循环时对于每个 k 枚举满足 $i<k, j<k$ 的 (i,j) 更新答案即可，时间复杂度为 $O(n^3)$，空间复杂度为 $O(n^2)$。伪代码如下：

Algorithm 2 Min-Cycle

procedure MAIN
  Let $ans = +\infty$.

```
    for all (u, v) ∈ E do
        d[u, v] = w(u, v)
    end for
    for k from 1 to n do
        for i from 1 to k − 1 do
            for j from 1 to i − 1 do
                ans = min{ans, d[i, j] + w(i, k) + w(k, j)}
            end for
        end for
        for i from 1 to n do
            for j from 1 to n do
                d[i, j] = min{d[i, j], d[i, k] + d[k, j]}
            end for
        end for
    end for
    Output ans.
end procedure
```

题目 3. 能达到一个点的编号最大的点。

解答. 先用 Tarjan 或者什么算法把图进行缩点，设缩完点的图为 G^{SCC}（把同一个强连通分量的点全部缩成一个），显然这个图是一个 DAG。

我们可以发现 r_i 之间有转移式：

$$r_i = \max\{\max_{(j,i)\in E}\{r_j\}, i\}$$

但这个转移在原图上难以运用，因为图的关系是可能有环的，你在用 r_j 去转移 r_i 时难以又或者就不能不能保证 r_j 已经被正确计算了，从而导致 r_i 可能也是被错误计算的，最后结果错误。

我们可以发现如果图是有向无环图（DAG），那么按照拓扑序进行转移就没有后效性了。这是因为对一个点有贡献的点的拓扑序只可能比它小。

而显然在同一个强连通分量里的点都可以互相到达，所以可以把 G^{SCC} 中每个点的点权赋成对应原图 G 中强连通分量所有点编号最大值，然后再进行 dp。最后求 r_i 直接到新图中找对应强连通分量的 r' 值即可。

时间复杂度为 $O(n+m)$。

题目 4. 二分图权匹配问题的线性规划表示。

解答. （1）对应的线性规划问题如下：

maximum

$$\sum_{e\in E} x_e w(e)$$

subject to

$$\forall u \in U \cup V, \sum_{u\text{是}e\text{端点}} x_e \le 1$$

$$\forall e \in E, x_e \in \{0,1\}$$

（2）记 $W = 1 + \sum\limits_{e \in E} w(e)$，则对应的线性规划问题如下：

maximum

$$\sum_{e \in E} x_e(w(e) + W)$$

subject to

$$\forall u \in U \cup V, \sum_{u\text{是}e\text{端点}} x_e \leq 1$$

$$\forall e \in E, x_e \in \{0,1\}$$

为什么这样求出来的匹配边数量一定最多呢，因为如果少选一个 e，目标函数值就减少至少 W，而 W 比所有边权值加起来还高，没办法用剩下的边弥补回来。

（3）对偶问题如下：

minimize

$$\sum_{e \in E} y_e + \sum_{u \in U \cup V} y_u$$

subject to

$$\forall e = (u,v) \in E, y_u + y_v + y_e \geq w(e) + W$$

$$\forall e \in E, y_e \geq 0$$

$$\forall u \in U \cup V, y_u \geq 0$$

题目 5. 三元线性不定方程。

证明. （1）记 $d' = \gcd(a,b)$，由裴蜀定理知：$\exists x', y' \in \mathbb{Z}$，使得：$ax' + by' = d'$。

又因为 $d = \gcd(a,b,c) = \gcd(\gcd(a,b),c) = \gcd(d',c)$，所以又由裴蜀定理知：$\exists z', z \in \mathbb{Z}$，使得：$d'z' + cz = d$。

那么令：$(x,y,z) = (x'z', y'z', z)$ 即有：$ax + by + cz = d$。

□

解答. （2）上面的证明已经给出了算法，用扩展欧几里得算法分别求出二元线性不定方程 $ax' + by' = d'$ 与 $d'z' + cz = d$ 的解即可，时间复杂度为 $O(\log a + \log b + \log c)$。

题目 6. 二分图的若干匹配问题。

证明. （1）我们考虑使用最大流直接解决这个问题对应的最优化问题，即找到大小最大的 F，从而直接解决判定问题。

给定一张二分图 $G = (U,V,E)$，我们考虑在原图的基础上新建立一个流网络图 G'。G' 包含 G 的所有点和边，然后在此基础上加上了超级源点与汇点 S, T。

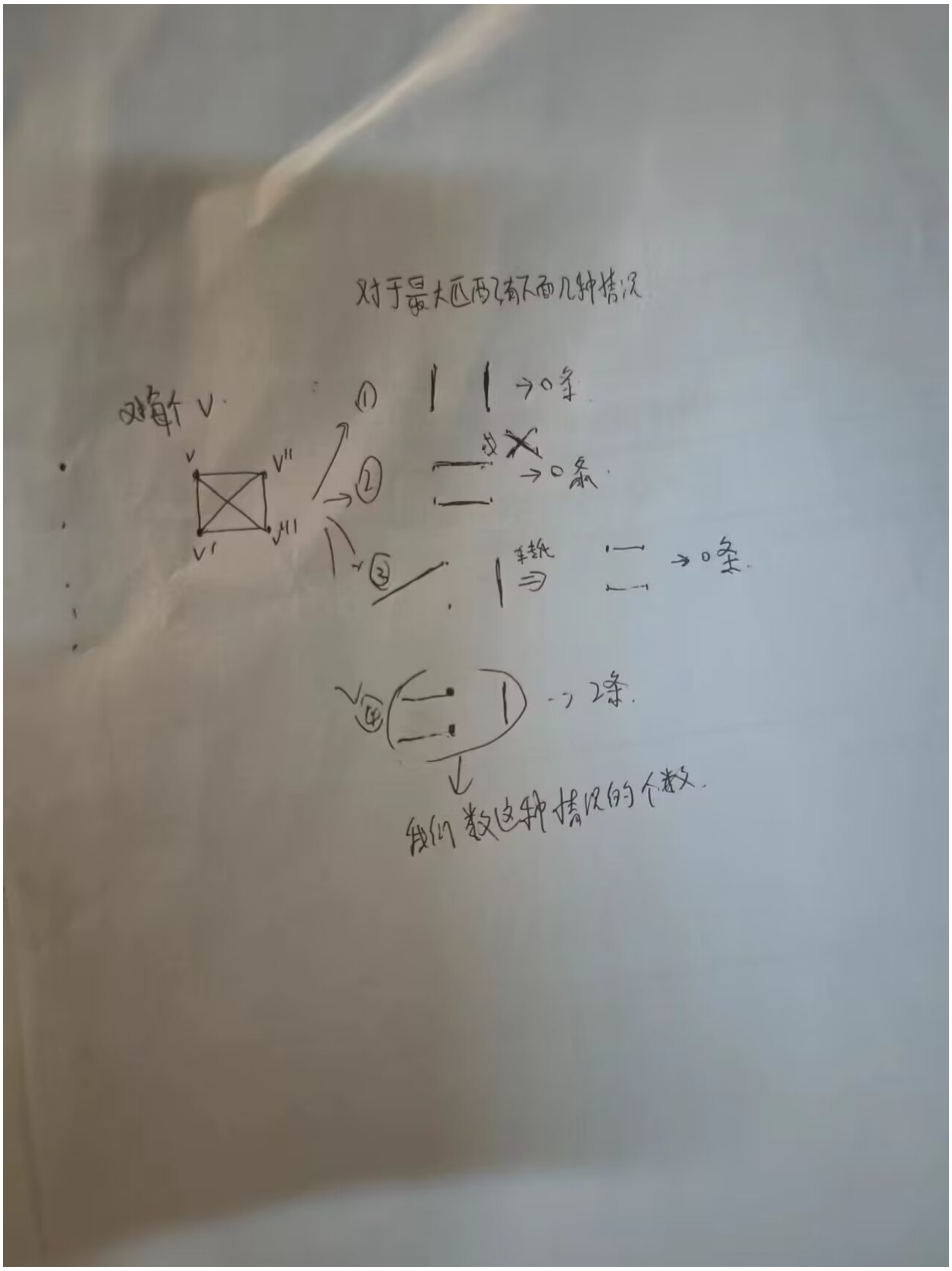
从 S 往所有 U 中的点 u 连容量为 1 的边，从所有 V 中的点 v 往 T 连容量为 2 的边，而 E 中的边容量都设置为 1，并都定向为从 U 中的点到 V 中的点。

在这个流网络图上运用 Ford-Fulkerson 方法求解最大流，则 $F = \{e \in E \mid e\text{满流}\}$。

显然这个算法是多项式的，所以这个问题是属于 P 的。

$\square$

（2）直接发个助教的解答吧，虽然有点抽象但是认真看能看懂在表达什么意思。



（3）设题干里的问题为 Prob，而三正则图独立及问题为 CIS（Cubic Graph Independent Set，是卷子开头给定提示，这个问题是属于 NPC 的）。

显然 $\mathrm{Prob} \in \mathrm{NP}$，下证明 $\mathrm{CIS} \le_p \mathrm{Prob}$：

给定一张三正则图 $G=(V,E)$，构造一张二分图 $G'=(L,R,E')$ 如下：

左部点集 $L=E$，而右部点集 $R=V$，而 $(e,u) \in L \times R$ 当且仅当 u 是 e 的一个端点。

我们断言 G 中存在大小至少为 k 的独立集，当且仅当在 G' 中可以找到大小至少为 $3k$ 的集合 F：

设 G 的一个独立集为 S 且 $|S| \ge k$，构造 $F=\{(e,u) \in E' \mid u \in S\}$。因为 S 为独立集。所以每条边的两端点不会同时被选进 S，则 e 至多与 F 中的一条边相连。又因为 G 是三正则图，所以 R 中的点 u 要么与 F 中的三条边相连（$u \in S$）要么没有边相连（$u \notin S$）。故 F 是一个满足要求的集合，且显然 $|F| \ge 3k$。

而反过来构造也是一样的，于是我们把 Prob 中的实例 $\langle G,k \rangle$ 归约到了 CIS 中的实例 $\langle G',3k \rangle$。也就证明了 $\mathrm{CIS} \le_p \mathrm{Prob}$。

综上 $\mathrm{Prob} \in \mathrm{NPC}$，即这个问题是属于 NPC 的。

$\square$