

中国科学技术大学  
2020年秋季 量子物理 习题集

1. 求下列矩阵

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

的本征值和归一化本征矢量. 这些本征矢量正交吗? 试加以评论.

2. (Constantinescu and Magyari, 1983, 1.1) 试推导Schwarz不等式

$$|\langle u|v \rangle| \leq \sqrt{\langle u|u \rangle} \sqrt{\langle v|v \rangle},$$

其中 $|u\rangle$ 和 $|v\rangle$ 是Hilbert空间 $H$ 中的任意两个矢量.

3. (Constantinescu and Magyari, 1983, 1.2) 试推导三角不等式

$$\sqrt{\langle u+v|u+v \rangle} \leq \sqrt{\langle u|u \rangle} + \sqrt{\langle v|v \rangle}.$$

4. (马涛 et al., 1986, p.2, 1-1) 设 $\psi_1, \psi_2$ 为体系的两个可能实现的状态, 现做如下三种线性叠加

i.  $\psi_A = \psi_1 + e^{i\delta}\psi_2,$

ii.  $\psi_B = e^{i\delta}(\psi_1 + \psi_2),$

iii.  $\psi_C = \psi_1 + \psi_2.$

$\delta$ 为实的常数. 试问 $\psi_A, \psi_B$ 和 $\psi_C$ 是否表示相同的态?

5. (马涛 et al., 1986, p.2, 1-12) 设 $\psi_1$ 和 $\psi_2$ 是某一系统的两个波函数,  $C_1$ 和 $C_2$ 是常数. 现在构成以下的函数

i.  $\psi_a = C_1\psi_1 + C_2\psi_2^2,$

ii.  $\psi_b = C_1^2\psi_1 + C_2\psi_2,$

iii.  $\psi_c = e^{C_1\psi_1 + C_2\psi_2}.$

这些函数是不是该系统的波函数? 为什么?

6. (Constantinescu and Magyari, 1983, 1.4) 设 $S_1$ 是Hilbert空间 $H$ 的一个子空间,  $S_2$ 是它的正交补空间. 任一矢量 $|u\rangle$ 可以写成它在两个子空间的投影之和,  $|u\rangle = |u_{S_1}\rangle + |u_{S_2}\rangle$ . 求证, 满足 $|u_{S_1}\rangle = P_{S_1}|u\rangle$ 的投影算符 $P_{S_1}$ 是Hermite算符, 且满足方程 $P_{S_1}^2 = P_{S_1}$ .

7. (Constantinescu and Magyari, 1983, 1.9) 求证, 如果么正算符  $U$  可写成  $U = 1 + i\epsilon F$  的形式, 式中  $\epsilon$  是一个无穷小的实数, 则算符  $F$  是 Hermite 算符.
8. (Constantinescu and Magyari, 1983, 1.10) Hermite 算符  $A$  称为正定算符, 如果对任何矢量  $|u\rangle$ , 有  $\langle u|A|u\rangle \geq 0$ . 求证, 算符  $A = |a\rangle\langle a|$  是 Hermite 正定算符.
9. (Constantinescu and Magyari, 1983, 1.15) 给出 3 个算符  $A, B$  和  $C$ , 试用对易关系  $[A, C]$  和  $[B, C]$  表示对易关系  $[AB, C]$ .
10. 对线性算符  $\alpha, \beta, \gamma$ , 证明,

$$\overline{\alpha\beta\gamma} = \overline{\gamma\beta\alpha}$$

11. 证明,

$$\overline{|A\rangle\langle B|} = |B\rangle\langle A|$$

12. 如果  $\xi$  是实线性算符, 而且对某一特定的右矢  $|P\rangle$  有

$$\xi^m |P\rangle = 0,$$

式中  $m$  是正整数, 证明

$$\xi |P\rangle = 0.$$

13. 考虑一个实线性算符  $\sigma$ , 它满足方程

$$\sigma^2 = 1,$$

那么,  $\sigma$  有两个本征值  $+1$  与  $-1$ . 证明任意的右矢  $|P\rangle$  能被表示为

$$|P\rangle = \frac{1}{2}(1 + \sigma) |P\rangle + \frac{1}{2}(1 - \sigma) |P\rangle.$$

并验证, 上式右边的两项都是  $\sigma$  的本征右矢, 分别属于本征值  $+1$  与  $-1$ , 只要它们不为零.

14. (Constantinescu and Magyari, 1983, 1.20) 如果给出可观察量  $A$  的特征方程  $f(\lambda) = 0$ , 求证  $f(A) = 0$ .

15. (曾谨言, 1998, Ex 4.1) 设  $\xi$  与  $\eta$  为实线性算符, 则  $\frac{1}{2}(\xi\eta + \eta\xi)$  和  $\frac{1}{2i}(\xi\eta - \eta\xi)$  也是实线性算符. 由此证明, 任何一个算符  $\alpha$  均可分解为  $\alpha_+ + i\alpha_-$ ,

$$\alpha_+ = \frac{1}{2}(\alpha + \bar{\alpha}), \quad \alpha_- = \frac{1}{2i}(\alpha - \bar{\alpha}),$$

其中  $\bar{\alpha}$  为算符  $\alpha$  的共轭算符.  $\alpha_+$  与  $\alpha_-$  均为实算符.

16. (Constantinescu and Magyari, 1983, 1.30) 求证, 两个线性算符  $A$  和  $B$  相等(可以相差一个相因子), 即  $A = Be^{i\alpha}$  的必要和充分条件是

$$|\langle u|A|v\rangle| = |\langle u|B|v\rangle|$$

对于任一对线性无关的右矢  $|u\rangle$  和  $|v\rangle$  都能成立.

17. 对算符  $\alpha$  和  $\beta$ , 设  $\alpha$  存在逆算符  $\alpha^{-1}$ ,  $c$  是一个数, 且是一个小量, 证明

$$(\alpha - c\beta)^{-1} = \alpha^{-1} + c\alpha^{-1}\beta\alpha^{-1} + c^2\alpha^{-1}\beta\alpha^{-1}\beta\alpha^{-1} + \dots$$

18. 函数  $\delta(x)$  由一个参量  $x$  决定, 并满足下列条件:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \\ \delta(x) = 0, \quad \text{当 } x \neq 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

证明下列方程

$$\delta(-x) = \delta(x),$$

$$x\delta(x) = 0,$$

$$\delta(ax) = a^{-1}\delta(x), \quad (a > 0),$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2}a^{-1}\{\delta(x - a) + \delta(x + a)\}, \quad (a > 0),$$

$$\int \delta(a - x) dx \delta(x - b) = \delta(a - b),$$

$$f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a).$$

19. 可观察量算符  $\alpha$ ,  $\beta$  的本征值分别为  $a_n$ ,  $b_n$ , 在任一态  $|P\rangle$  中, 先测得  $\alpha$  的值  $a_n$ , 再测  $\beta$  值  $b_n$  的概率为  $P(a_n, b_n)$ ; 而先测  $\beta$  值为  $b_n$ , 再测  $\alpha$  值  $a_n$  的概率为  $P(b_n, a_n)$ . 问:  $P(a_n, b_n) = P(b_n, a_n)$  的条件是什么?

20. 一个可观察量  $\alpha$  有两个本征本征值  $\alpha'_1$  和  $\alpha'_2$ , 对应的本征右矢分别是  $|\alpha'_1\rangle$  和  $|\alpha'_2\rangle$ . 而可观察量  $\beta$  有两个本征右矢  $|\beta'_1\rangle$  和  $|\beta'_2\rangle$ , 两种本征态有如下关系

$$|\alpha'_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{13}}\{2|\beta'_1\rangle + 3|\beta'_2\rangle\}, \quad |\alpha'_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{13}}\{3|\beta'_1\rangle - 2|\beta'_2\rangle\}$$

当测量  $\alpha$  后得到  $\alpha'_1$ , 若再测量  $\beta$ , 以后再测量  $\alpha$ , 证明第二次得到  $\alpha'_1$  的概率是  $\frac{97}{169}$ .

21. (曾谨言, 1998, Ex 4.2) 设  $F(x, p)$  是  $x$  和  $p$  的整函数, 证明,

$$[p, F] = -\frac{\partial}{\partial x} F, \quad [x, F] = \frac{\partial}{\partial p} F.$$

整函数是指  $F(x, p)$  可以展开成

$$F(x, p) = \sum_{m, n=0}^{\infty} C_{mn} x^m p^n.$$

22. (曾谨言, 1998, Ex 4.3) 定义反对易式  $[A, B]_+ \equiv \frac{1}{i\hbar}(AB + BA)$ . 证明,

$$[AB, C] = A[B, C]_+ - [A, C]_+ B,$$

$$[A, BC] = [A, B]_+ C - B[A, C]_+.$$

23. (曾谨言, 1998, Ex 4.4) 设  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  为矢量算符,  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  的标量积和矢量积定义为,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_n A_n B_n, \quad (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_\gamma = \sum_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_\alpha B_\beta,$$

$\alpha, \beta, \gamma = x, y, z$ ,  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$  为 Levi-Civita 符号 (排列符号). 试验证,

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \sum_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_\alpha B_\beta C_\gamma,$$

$$\{\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})\}_\alpha = \mathbf{A} \cdot (B_\alpha \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) C_\alpha,$$

$$\{(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}\}_\alpha = \mathbf{A} \cdot (B_\alpha \mathbf{C}) - A_\alpha (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}).$$

24. (曾谨言, 1998, Ex 4.5) 设  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  为矢量算符,  $F$  为标量算符. 证明,

$$[F, \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}] = [F, \mathbf{A}] \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot [F, \mathbf{B}],$$

$$[F, \mathbf{A} \times \mathbf{B}] = [F, \mathbf{A}] \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times [F, \mathbf{B}].$$

25. (曾谨言, 1998, Ex 4.6) 设  $F$  是由坐标  $\mathbf{r}$  与动量  $\mathbf{p}$  构成的标量算符,  $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  是角动量算符, 证明,

$$[\mathbf{l}, F] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} F \times \mathbf{p} - \mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} F.$$

26. (曾谨言, 1998, Ex 4.7) 证明,

$$\begin{aligned}\mathbf{p} \times \mathbf{l} + \mathbf{l} \times \mathbf{p} &= 2i\hbar\mathbf{p}, \\ (\mathbf{p} \times \mathbf{l} - \mathbf{l} \times \mathbf{p}) &= [\mathbf{l}^2, \mathbf{p}].\end{aligned}$$

27. (曾谨言, 1998, Ex 4.8) 证明,

$$\begin{aligned}\mathbf{l}^2 &= r^2 p^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})^2 + i\hbar\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}, \\ (\mathbf{l} \times \mathbf{p})^2 &= (\mathbf{p} \times \mathbf{l})^2 = -(\mathbf{l} \times \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{l}) = \mathbf{l}^2 p^2, \\ -(\mathbf{p} \times \mathbf{l}) \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{p}) &= \mathbf{l}^2 p^2 + 4\hbar^2 p^2, \\ (\mathbf{l} \times \mathbf{p}) \times (\mathbf{l} \times \mathbf{p}) &= -i\hbar\mathbf{l} p^2.\end{aligned}$$

28. 明显依赖于参量  $\lambda$  的算符  $A(\lambda)$  的导数定义为

$$\frac{dA(\lambda)}{d\lambda} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{A(\lambda + \epsilon) - A(\lambda)}{\epsilon}.$$

求证,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}(AB) &= \frac{dA}{d\lambda}B + A\frac{dB}{d\lambda}, \\ \frac{d}{d\lambda}(A^{-1}) &= -A^{-1}\frac{dA}{d\lambda}A^{-1}.\end{aligned}$$

29. (曾谨言, 1998, Ex 2.4) 设一维自由粒子的初态  $\psi(x, 0) = e^{ip_0x/\hbar}$ , 求  $\psi(x, t)$ .

30. (曾谨言, 1998, Ex 2.5) 设一维自由粒子的初态  $\psi(x, 0) = \delta(x)$ , 求  $|\psi(x, t)|^2$ .

提示: 利用复参数  $\alpha$  的广义 Gauss 积分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

31. (曾谨言, 1998, Ex 2.6) 设一维自由粒子的初态  $\psi(x, 0)$ , 证明在足够长时间后,

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{m}{\hbar t}} \exp(-i\pi/4) \exp\left(\frac{imx^2}{2\hbar t}\right) \varphi\left(\frac{mx}{\hbar t}\right),$$

式中

$$\varphi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, 0) e^{-ikx} dx$$

是  $\psi(x, 0)$  的 Fourier 变换.

提示: 利用

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{i\pi/4} e^{-i\alpha x^2} = \delta(x).$$

32. (曾谨言, 1998, Ex 2.7) 设一维自由粒子的初态是一个 Gauss 波包,

$$\psi(x, 0) = e^{i p_0 x / \hbar} \frac{1}{(\pi \alpha^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}.$$

i. 证明初始时刻,  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{p} = p_0$  (这里  $\bar{f}$  表示变量  $f$  的平均值),

$$\Delta x = \sqrt{\overline{(x - \bar{x})^2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}},$$

$$\Delta p = \sqrt{\overline{(p - \bar{p})^2}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\alpha},$$

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}.$$

ii. 计算  $t$  时刻的波函数<sup>1</sup>

$$\psi(x, t) = \left\{ \sqrt{\pi} \left( \alpha + \frac{i\hbar t}{m\alpha} \right) \right\}^{-1/2} \exp \left\{ \frac{i p_0 x}{\hbar} \left( 1 - \frac{p_0 t}{2m\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\hbar}{\alpha p_0} \frac{\hbar t}{m\alpha^2} \frac{x}{\alpha} \right) \right\} \exp \left\{ -\frac{(x - p_0 t/m)^2}{2\alpha \left( 1 + \frac{i\hbar t}{m\alpha^2} \right)} \right\},$$

$$|\psi(x, t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi} \left( \alpha^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 \alpha^2} \right)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{(x - p_0 t/m)^2}{\alpha^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 \alpha^2}} \right\},$$

由此

$$\bar{x}(t) = \frac{p_0 t}{m},$$

<sup>1</sup>原题红色部分为  $\exp \left\{ \frac{i p_0}{\hbar} \left( x - \frac{p_0 t}{m} \right) \right\}$ .

与经典粒子比较. 而

$$\overline{\Delta x}(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 \alpha^2} \right)^{1/2} \approx \frac{\hbar t}{\sqrt{2} m \alpha} \quad (t \rightarrow \infty).$$

考虑一个宏观粒子,  $m = 1\text{g}$ , 初始时刻位置准确到  $1\text{fm} = 10^{-13}\text{cm}$ , 即  $\overline{\Delta x}(t=0) = \alpha/\sqrt{2} = 10^{-13}\text{cm}$ , 计算  $t = 300,000$  年时  $\overline{\Delta x}(t) = ?$  由此你可以得出什么结论?

33. (曾谨言, 1998, Ex 3.1) 设粒子处于二维无限深势阱中

$$V(x, y) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, 0 < y < b; \\ \infty, & \text{其余区域.} \end{cases}$$

求粒子的能量本征值和本征波函数. 如  $a = b$ , 能级的简并度如何?

34. (曾谨言, 1998, Ex 3.2) 设粒子限制在矩形匣子中运动, 即

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c; \\ \infty, & \text{其余区域.} \end{cases}$$

求粒子的能量本征值和本征波函数. 如  $a = b = c$ , 讨论能级的简并度.

35. (曾谨言, 1998, Ex 3.3) 设粒子处于一维无限深方势阱中,

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a; \\ \infty, & \text{其余区域.} \end{cases}$$

证明处于定态  $\psi_n(x)$  的粒子,  $\bar{x} = \frac{a}{2}$ ,

$$\overline{(x - \bar{x})^2} = \frac{a^2}{12} \left( 1 - \frac{6}{n^2 \pi^2} \right).$$

讨论  $n \rightarrow \infty$  的情况, 并与经典力学计算结果比较.

36. (曾谨言, 1998, Ex 3.4) 设粒子处于一维无限深方势阱中,

$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| < a/2; \\ \infty, & \text{其余区域.} \end{cases}$$

处于基态 ( $n = 1$ ). 求粒子的动量分布.

37. (曾谨言, 1998, Ex 3.5) 设粒子(能量 $E > 0$ )从左入射, 碰到下列势阱

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x > 0; \\ -V_0, & x < 0. \end{cases}$$

求阱壁处的反射系数.

38. (曾谨言, 1998, Ex 3.6) 利用Hermite多项式的递推关系, 证明谐振子波函数满足下列关系

$$x\psi_n(x) = \frac{1}{\alpha} \left\{ \sqrt{\frac{n}{2}} \psi_{n-1}(x) + \sqrt{\frac{n+1}{2}} \psi_{n+1}(x) \right\},$$

$$x^2\psi_n(x) = \frac{1}{2\alpha^2} \left\{ \sqrt{n(n-1)} \psi_{n-2}(x) \right. \\ \left. + (2n+1)\psi_n(x) + \sqrt{(n+1)(n+2)} \psi_{n+2}(x) \right\},$$

其中 $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ . 并由此证明, 在 $\psi_n$ 态下,  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{V} = E_n/2$ .

39. (曾谨言, 1998, Ex 3.7) 同上题, 利用Hermite多项式的求导公式, 证明

$$\frac{d}{dx} \psi_n(x) = \alpha \left\{ \sqrt{\frac{n}{2}} \psi_{n-1}(x) - \sqrt{\frac{n+1}{2}} \psi_{n+1}(x) \right\},$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi_n(x) = \frac{\alpha^2}{2} \left\{ \sqrt{n(n-1)} \psi_{n-2}(x) - (2n+1)\psi_n(x) \right. \\ \left. + \sqrt{(n+1)(n+2)} \psi_{n+2}(x) \right\}.$$

并由此证明, 在 $\psi_n$ 态下,  $\bar{p} = 0$ ,  $\bar{T} = \bar{p}^2/2m = E_n/2$ .

40. (曾谨言, 1998, Ex 3.8) 谐振子处于 $\psi_n$ 态下, 计算

$$\Delta x = \sqrt{(x - \bar{x})^2}, \quad \Delta p = \sqrt{(p - \bar{p})^2}, \quad \Delta x \Delta p.$$

41. (曾谨言, 1998, Ex 3.9) 荷电 $q$ 的谐振子, 受到外电场 $\mathcal{E}$ 的作用,

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - q\mathcal{E}x,$$

求能量本征值和本征函数.



42. (曾谨言, 1998, Ex 3.10) 求不对称势阱

$$V(x) = \begin{cases} V_1, & x < 0, \\ 0, & 0 < x < a, \\ V_2 & x > a \end{cases}$$

中粒子的能量本征值.

43. (曾谨言, 1998, Ex 3.11) 设粒子在下列势阱中运动, 求粒子能级,

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, & x > 0. \end{cases}$$

44. (曾谨言, 1998, Ex 3.12) 设粒子处于半壁无限高的势场中

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, \\ -V_0, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

求粒子能量本征值, 以及至少存在一条束缚能级的条件.

45. (曾谨言, 1998, Ex 4.9) 定义径向动量算符

$$p_r = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \frac{1}{r} \right),$$

证明

- i.  $\bar{p}_r = p_r$ ;
- ii.  $p_r = -i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right)$ ;
- iii.  $[r, p_r] = 1$ ;
- iv.  $p_r^2 = -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) = -\hbar^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}$ ;
- v.  $p^2 = \frac{1}{r^2} l^2 + p_r^2$ .

46. (曾谨言, 1998, Ex 4.13) 证明在  $l_z$  的本征态  $|l'_z\rangle$  下,  $\langle l'_z | l_x | l'_z \rangle = \langle l'_z | l_y | l'_z \rangle = 0$ .

47. (曾谨言, 1998, Ex 4.14) 设粒子处于  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  状态下, 求  $\overline{(\Delta l_x)^2}$  和  $\overline{(\Delta l_y)^2}$ .

48. (曾谨言, 1998, Ex 4.15) 设粒子处于  $\psi = c_1 Y_{11} + c_2 Y_{20}$  状态(已归一化, 即  $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ ). 求

- i.  $l_z$  的可能测量值及平均值;
- ii.  $l^2$  的可能测量值及相应的几率;
- iii.  $l_x$  的可能测量值及相应的几率.

49. (曾谨言, 1998, Ex 4.16) 设属于能级  $E$  的三个简并态  $\psi_1, \psi_2$  和  $\psi_3$ , 彼此线性独立, 但不正交. 试利用它们构成一组彼此正交归一的波函数.

50. (曾谨言, 1998, Ex 4.17) 设有矩阵  $A, B, C, S$  等. 证明,

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B, \quad \det(S^{-1}AS) = \det A,$$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA), \quad \text{tr}(S^{-1}AS) = \text{tr}A,$$

$$\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB) = \text{tr}(BCA).$$

$\det A$  表示与矩阵  $A$  对应的行列式的值,  $\text{tr}A$  代表矩阵  $A$  的对角元素之和.

51. (曾谨言, 1998, Ex 4.18) 处于势场  $V(\mathbf{r})$  中的粒子, 在坐标表象中其能量本征方程表示成

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right\} \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}),$$

试在动量表象中写出相应的能量本征方程.

52. (曾谨言, 1998, Ex 5.1) 设力学量  $A$  不显含  $t$ ,  $H$  为体系的 Hamilton 量, 证明

$$-\hbar \frac{d^2}{dt^2} \bar{A} = [[A, H], H].$$

53. (曾谨言, 1998, Ex 5.2) 设力学量  $A$  不显含  $t$ , 证明在束缚定态下

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = 0.$$

54. (曾谨言, 1998, Ex 5.3)  $D_x(a) = \exp(-a \frac{\partial}{\partial x}) = \exp(-iap_x/\hbar)$  表示沿  $x$  方向平移距离  $a$  的算符. 证明下列形式波函数(Bloch波函数)

$$\psi(x) = e^{ikx} \phi_k(x), \quad \phi_k(x+a) = \phi_k(x),$$

是  $D_x(a)$  的本征态, 相应本征值为  $e^{-ika}$ .

55. (曾谨言, 1998, Ex 5.4) 设 $|m'_z\rangle$ 表示 $m_z$ 的本征态(本征值为 $m'_z\hbar$ ). 证明

$$e^{-im_x\varphi/\hbar} e^{-im_y\theta/\hbar} |m'_z\rangle$$

是角动量 $\mathbf{m}$ 沿空间 $(\theta, \varphi)$

$$m_x \sin\theta \cos\varphi + m_y \sin\theta \sin\varphi + m_z \cos\theta$$

的本征态.

56. (曾谨言, 1998, Ex 5.5) 设Hamilton量 $H = p^2/2\mu + V(\mathbf{r})$ , 证明下列求和规则

$$\sum_n (E_n - E_m) |x_{nm}|^2 = \hbar^2/2\mu,$$

$x$ 是 $\mathbf{r}$ 的一个分量,  $\sum_n$ 是对一切定态求和,  $E_n$ 是对应于 $n$ 态的能量本征值,  $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ .

提示: 计算 $[[H, x], x]$ , 求 $\langle m|[[H, x], x]|m\rangle$ .

57. (曾谨言, 1998, Ex 5.6) 设 $F(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ 为Hermite算符, 证明在能量表象中的求和规则

$$\sum_n (E_n - E_m) |F_{nk}|^2 = \frac{1}{2} \langle k|[F, [H, F]]|k\rangle.$$

58. (曾谨言, 1998, Ex 6.1) 利用公式

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2},$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

$$M = m_1 + m_2,$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

证明下列关系式

$$\text{相对动量 } \mathbf{p} = \mu \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{M} (m_2 \mathbf{p}_1 - m_1 \mathbf{p}_2),$$

$$\text{总动量 } \mathbf{P} = M \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2,$$

$$\text{总轨道角动量 } \mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2$$

$$= \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

$$\text{总动能 } T = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu}.$$

59. (曾谨言, 1998, Ex 6.2) 同上题. 求坐标表象中 $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{L}$ 的算符表示式

$$\mathbf{p} = -i\hbar\nabla_r, \quad \mathbf{P} = -i\hbar\nabla_R, \quad \mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

60. (曾谨言, 1998, Ex 6.3) 利用氢原子能级公式, 讨论下列体系的能谱

- i. 电子偶素(positronium, 指 $e^+ - e^-$ 束缚体系),
- ii.  $\mu$ 原子(muonic atom),
- iii.  $\mu$ 子偶素(muonium, 指 $\mu^+ - \mu^-$ 束缚体系).

61. (曾谨言, 1998, Ex 6.4) 对氢原子基态, 计算 $\Delta x \Delta p$ .

62. (曾谨言, 1998, Ex 6.5) 对于氢原子基态, 求电子处于经典禁区( $r > 2a$ )(即 $E - V < 0$ )的几率.

63. (曾谨言, 1998, Ex 6.6) 对于类氢原子(荷电荷 $Ze$ )的“圆轨道”(指 $n_r = 0$ , 即 $l = n - 1$ 的轨道), 计算

- i. 最可几半径;
- ii. 平均半径;
- iii. 涨落 $\Delta r = \left\{ \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2 \right\}^{1/2}$ .

64. (曾谨言, 1998, Ex 6.7) 设电荷为 $Ze$ 的原子核突然发生 $\beta^-$ 衰变, 核电荷变成 $(Z + 1)e$ . 求衰变前原子 $Z$ 中一个 $K$ 电子( $1s$ 轨道上的电子)在衰变后仍然保持在新的原子 $(Z + 1)$ 的 $K$ 轨道的几率.

65. (曾谨言, 1998, Ex 6.8) 设碱金属原子中的价电子所受原子实(原子核+满壳电子)的作用近似表示为

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} - \lambda \frac{e^2 a}{r^2} \quad (0 < \lambda \ll 1),$$

$a$ 为Bohr半径, 上式右边第2项为屏蔽Coulomb势. 求价电子的能级.

提示: 令 $l(l + 1) - 2\lambda = l'(l' + 1)$ , 解出

$$l' = -\frac{1}{2} + (l + 1/2) \left\{ 1 - \frac{8\lambda}{(2l + 1)^2} \right\}^{1/2}.$$

66. (曾谨言, 1998, Ex 6.9) 设粒子处于中心势  $V(r) = \frac{1}{2}Kr^2 + Dl^2$ , ( $K, D$ 为常数,  $K > 0$ ),  $l$ 为轨道角动量. 求粒子能级.

67. (曾谨言, 1998, Ex 7.1) 荷电 $q$ 质量为 $M$ 的粒子在均匀外磁场中运动, Hamilton量表示为

$$H = \frac{1}{2M} \left( \mathbf{P} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 = \frac{1}{2} M \mathbf{v}^2,$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{M} \left( \mathbf{P} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right),$$

速度算符 $\mathbf{v}$ 的三个分量满足对易关系式

$$\mathbf{v} \times \mathbf{v} = i\hbar \frac{q}{M^2 c} \mathbf{B}.$$

假设 $\mathbf{B}$ 沿 $z$ 轴方向, 只考虑粒子在 $xy$ 平面中的运动, 则有

$$[v_x, v_y] = \frac{q}{M^2 c} B.$$

设 $q > 0$ , 令

$$Q = \sqrt{\frac{M^2 c}{\hbar q B}} v_x, \quad P = \sqrt{\frac{M^2 c}{\hbar q B}} v_y,$$

则

$$[Q, P] = 1/\hbar,$$

而

$$H = \frac{1}{2} M (v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2} (Q^2 + P^2) \hbar \omega_c,$$

式中 $\omega_c = qB/Mc$ 为cyclotron角频率. 上式与谐振子Hamilton量相似. 由此求出其能量本征值(Landau能级)

$$E_n = (n + 1/2) \hbar \omega_c.$$

68. (曾谨言, 1998, Ex 7.2) 求相互垂直的均匀电场和磁场中的带电粒子的能量本征值.

提示: 设电场沿 $y$ 方向 $\mathcal{E} = (0, \mathcal{E}, 0)$ , 磁场沿 $z$ 方向, 选Landau规范,  $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$ , 则粒子在 $xy$ 平面内运动的Hamilton量为

$$H = \frac{1}{2M} \left\{ \left( P_x + \frac{qB}{c} y \right)^2 + P_y^2 \right\} - q\mathcal{E}y.$$

69. (曾谨言, 1998, Ex 8.1) 解答下列问题

- i. 在 $\sigma_z$ 表象中, 求 $\sigma_x$ 的本征态.
- ii. 求 $\sigma_z$ 表象到 $\sigma_x$ 表象的变换矩阵 $S$ .
- iii. 验证

$$S\sigma_x S^{-1} = S \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

70. (曾谨言, 1998, Ex 8.2) 在 $\sigma_z$ 表象中, 求 $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ 的本征态,  $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ 是方位角 $(\theta, \varphi)$ 方向的单位矢量.

71. (曾谨言, 1998, Ex 8.3) 在 $s_z$ 本征态 $\chi_{1/2}(s_z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 下, 求 $\overline{(\Delta s_x)^2}$ 和 $\overline{(\Delta s_y)^2}$ .

72. (曾谨言, 1998, Ex 8.4) 在 $s_z$ 本征态 $\chi_{1/2}$ 下, 求 $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ 的可能测量值及相应的几率. 若电子处于 $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = +1$ 的自旋态下, 求 $\boldsymbol{\sigma}$ 各分量的可能测量值及相应的几率以及 $\boldsymbol{\sigma}$ 的平均值

73. (曾谨言, 1998, Ex 8.5) 证明

- i.  $e^{i\lambda\sigma_z} = \cos \lambda + i\sigma_z \sin \lambda$  ( $\lambda$ 为常数).
- ii.  $e^{i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}} = \cos A + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \sin A$ ,  $\mathbf{A} = A\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{A}$ 为常矢量, 大小为 $A$ , 方向的单位向量为 $\mathbf{n}$
- iii. 证明 $\text{Tr}(e^{i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}}) = 2 \cos A$ ,  $\text{Tr}$ 为求矩阵的对角元之和.

74. (曾谨言, 1998, Ex 8.6) 证明 $e^{i\lambda\sigma_z}\sigma_x e^{-i\lambda\sigma_z} = \sigma_x \cos(2\lambda) - \sigma_y \sin(2\lambda)$  ( $\lambda$ 为常数).

75. (曾谨言, 1998, Ex 8.7) 电子的磁矩算符可表示为 $\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2mc}(\mathbf{l} + 2\mathbf{s})$ . 磁矩的观测值定义为 $\mu = \langle ljm_j | \mu_z | ljm_j \rangle |_{m_j=j} = \langle ljj | \mu_z | ljj \rangle$ ,  $|ljm_j\rangle$ 是 $(\mathbf{l}^2, \mathbf{j}^2, j_z)$ 的共同本征态. 计算 $\mu$ .

提示:  $\mu_z = -\frac{e}{2mc}(j_z + s_z)$ . 利用式

$$\langle ljm_j | \sigma_z | ljm_j \rangle = \begin{cases} m_j/j, & j = l + 1/2, \\ -m_j/(j + 1), & j = l - 1/2. \end{cases}$$

76. (曾谨言, 1998, Ex 8.8) 由两个非全同粒子(自旋均为 $\hbar/2$ )组成的体系, 设粒子间相互作用表示为 $H = A\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2$ (不考虑轨道运动). 初始时刻( $t = 0$ )粒子1自旋“向上”( $s_{1z} = 1/2$ ), 粒子2自旋“向下”( $s_{2z} = -1/2$ ). 求时刻 $t(> 0)$ 时,

- i. 粒子1自旋向上的几率;

- ii. 粒子1和2的自旋均向上的几率;
- iii. 总自旋  $S = 0$  和  $1$  的几率;
- iv.  $\mathbf{s}_1$  和  $\mathbf{s}_2$  的平均值.

77. (曾谨言, 1998, Ex 8.9) 设有一个定域电子, 受到沿  $x$  方向均匀磁场  $B$  的作用, Hamilton量(不考虑轨道运动)表示为  $H = \frac{eB}{mc} s_x = \frac{eB\hbar}{2mc} \sigma_x$ . 设  $t = 0$  时电子自旋“向上”( $s_z = \hbar/2$ ), 求  $t > 0$  时  $\mathbf{s}$  的平均值.
78. (曾谨言, 1998, Ex 8.10) 考虑自旋为  $\hbar/2$  的粒子, 具有磁矩  $\mu$ , 在转动磁场  $\mathbf{B}(t)$  中运动.  $\mathbf{B}(t) = (B_1 \cos(2\omega_0 t), B_1 \sin(2\omega_0 t), B_0)$ ,  $\omega_0 = \mu B_0 / \hbar$ . Hamilton量表示为( $\sigma_z$ 表象)

$$H(t) = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\mu \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\mu B_0 & -\mu B_1 e^{2i\omega_0 t} \\ -\mu B_1 e^{-2i\omega_0 t} & \mu B_0 \end{pmatrix},$$

含时Hamilton量具有周期性,  $H(\tau) = H(0)$ ,  $\tau = \pi / \omega_0$ .

- i. 把  $t$  看成参数, 求  $H(t)$  的瞬时(instantaneous)本征态.
- ii. 设粒子初态  $\psi(0) = \psi_-(0)$ . 在绝热近似下(磁场转动极慢), 粒子自旋态保持在  $\psi_-(t)$  (忽略  $\psi_+(t)$  的混合),  $\psi(t)$  可表示为

$$\psi(t) = a_-(t) \exp\left(\frac{-iE_- t}{\hbar}\right) \psi_-(t),$$

代入含时Schrödinger方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\psi,$$

求解  $a_-(t) = e^{i\beta_-(t)}$ , 讨论经历一周期后的相位  $\beta_-(\tau)$ .

- iii. 不做绝热近似,  $\psi(t)$  一般解应表示成  $\psi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ . 设初态为  $\psi(0) = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ . 求  $\psi(t)$ .

79. (曾谨言, 1998, Ex 9.1) 一维势阱  $V(x)$  中粒子的能量本征态方程为

$$H\psi_n(x) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right\} \psi_n(x) = E_n \psi_n(x).$$

设存在束缚态, 取基态能量  $E_0$  (有限,  $E_0 \neq -\infty$ ) 为参照点, 即  $E_0 = 0$ , 则  $\psi_0(x)$  满足

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right\} \psi_0(x) = 0.$$

$\psi_0(x)$ 无节点(边界点除外). 考虑如下能量本征方程,

$$H_-\psi_0(x) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right\} \psi_0(x) = 0,$$

显然

$$V_-(x) = \frac{\hbar^2 \psi_0''(x)}{2\mu \psi_0(x)},$$

因此 $H_-$ 可以表示为

$$H_- = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)} \right\}.$$

定义算符

$$A = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2\mu}} \left\{ \frac{d}{dx} - \frac{\psi_0'}{\psi_0} \right\},$$

$$A^+ = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2\mu}} \left\{ -\frac{d}{dx} - \frac{\psi_0'}{\psi_0} \right\},$$

- i. 证明 $A\psi_0 = 0$ ;
- ii. 证明 $A^+A = H_-$ ;
- iii. 证明 $AA^+ - A^+A = -\frac{\hbar^2}{\mu} \left( \frac{\psi_0''}{\psi_0} + \frac{\psi_0'^2}{\psi_0^2} \right)$ , 而

$$AA^+ \equiv H_+ = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + V_+(x),$$

$$V_+(x) = -\frac{\hbar^2 \psi_0''}{2\mu \psi_0} + \frac{\hbar^2 \psi_0'^2}{\mu \psi_0^2}.$$

- iv. 除 $H_-$ 的基态外, 证明 $H_+$ 与 $H_-$ 的本征值有下列关系

$$E_n^{(+)} = E_{n+1}^{(-)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- v. 将以上讨论应用于谐振子(取 $\hbar = m = \omega = 1$ ,  $\psi_0(x) \sim e^{-x^2/2}$ ), 计算出 $A$ 和 $A^+$ .



80. (曾谨言, 1998, Ex 9.2) 对于氢原子的径向方程, 取  $\hbar = e = \mu = 1$ ,

$$\chi_l'' + \left\{ 2 \left( E + \frac{1}{r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} \chi_l = 0$$

可改写成

$$D(l)\chi_l(r) = \lambda_l \chi_l(r), \quad \lambda_l = -2E,$$

$$D(l) = \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2}{r}.$$

令

$$A_+(l) = \frac{d}{dr} - \frac{l+1}{r} + \frac{1}{l+1},$$

$$A_-(l) = \frac{d}{dr} + \frac{l}{r} - \frac{1}{l}, \quad (l > 0).$$

证明

$$A_-(l+1)A_+(l) = D(l) - \frac{1}{(l+1)^2},$$

$$A_+(l-1)A_-(l) = D(l) - \frac{1}{l^2}, \quad (l > 0).$$

以及

$$D(l)A_+(l-1)\chi_{l-1} = \lambda_{l-1}A_+(l-1)\chi_{l-1},$$

$$D(l)A_-(l+1)\chi_{l+1} = \lambda_{l+1}A_-(l+1)\chi_{l+1}.$$

因此阐明  $A_+$  和  $A_-$  算符的作用是使角动量  $l$  增, 减 1, 但保持能量  $E$  不变.

81. (曾谨言, 1998, Ex 9.3) 对于三维各向同性谐振子,  $V(r) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2$ , 取  $\hbar = \omega = \mu = 1$ , 径向方程为

$$\chi_l'' + \left\{ 2E - r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} \chi_l = 0,$$

可以改写成

$$D(l)\chi_l(r) = \lambda_l \chi_l(r),$$

$$D(l) = \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - r^2, \quad \lambda_l = -2E.$$

$$A_+(l) = \frac{d}{dr} - \frac{l+1}{r} + r,$$

$$A_-(l) = \frac{d}{dr} + \frac{l}{r} - r,$$

$$B_+(l) = \frac{d}{dr} - \frac{l+1}{r} - r,$$

$$B_-(l) = \frac{d}{dr} + \frac{l}{r} + r,$$

证明

$$A_-(l+1)A_+(l) = D(l) + (2l+3),$$

$$A_+(l-1)A_-(l) = D(l) + (2l-1),$$

$$B_-(l+1)B_+(l) = D(l) - (2l+3),$$

$$B_+(l-1)B_-(l) = D(l) - (2l-1),$$

以及

$$D(l)A_+(l-1)\chi_{l-1} = (\lambda_{l-1} + 2)A_+(l-1)\chi_{l-1},$$

$$D(l)A_-(l+1)\chi_{l+1} = (\lambda_{l+1} - 2)A_-(l+1)\chi_{l+1},$$

$$D(l)B_+(l-1)\chi_{l-1} = (\lambda_{l-1} - 2)B_+(l-1)\chi_{l-1},$$

$$D(l)B_-(l+1)\chi_{l+1} = (\lambda_{l+1} + 2)B_-(l+1)\chi_{l+1}.$$

由此阐明算符 $A_+$ ( $A_-$ )的作用是使角动量 $l$ 增(减)1, 能量减(增)1, 而 $B_+$ ( $B_-$ )的作用是使 $l$ 增(减)1, 但能量增(减)1.

82. (曾谨言, 1998, Ex 9.4) 设两个全同粒子角动量 $j_1 = j_2 = j$ , 耦合成总角动量 $J$ ,

$$\psi_{j^2 JM}(1, 2) = \sum_{m_1 m_2} \langle j m_1 j m_2 | JM \rangle \psi_{j m_1}(1) \psi_{j m_2}(2),$$

利用CG系数的对称性, 证明

$$P_{12} \psi_{j^2 JM} = (-)^{2j-J} \psi_{j^2 JM}.$$

由此证明, 无论Bose子或Fermi子,  $J$ 都必须取偶数.

83. (曾谨言, 1998, Ex 9.5) 设原子中有两个价电子, 处于 $E_{nl}$ 能级上, 按LS耦合方案,  $\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 = \mathbf{L}$ ,  $\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 = \mathbf{S}$ ,  $\mathbf{L} + \mathbf{S} = \mathbf{J}$  (总角动量). 证明

i.  $L + S$ 必为偶数.

ii.  $J = L + S, \dots, |L - S|$ . 当 $S = 0$ 时 $J = L$  (偶). 而 $S = 1$ 时,  $J = L + 1, L, L - 1$ ,  $J$ 可以为奇, 也可以为偶.

84. (曾谨言, 1998, Ex 9.6) 大小相等的两个角动量耦合成角动量为零的态,  $\psi_{jj00}$ . 证明 $j_{1z} = -j_{2z} = j, j - 1, \dots, -j$ 的几率相等, 即 $1/(2j + 1)$ .

提示: 利用 $\langle jm | j - m | 00 \rangle = (-1)^{j-m} / \sqrt{2j + 1}$ .

85. (曾谨言, 1998, Ex 9.7) 设 $\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 = \mathbf{J}$ , 在 $|j_1 j_2 jm\rangle$ 态下, 证明

$$\begin{aligned} \langle j_{1x} \rangle &= \langle j_{1y} \rangle = \langle j_{2x} \rangle = \langle j_{2y} \rangle = 0, \\ \langle j_{1z} \rangle &= m \frac{j(j+1) + j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)}{2j(j+1)}, \\ \langle j_{2z} \rangle &= m \frac{j(j+1) + j_2(j_2+1) - j_1(j_1+1)}{2j(j+1)} \\ &= m - \langle j_{1z} \rangle. \end{aligned}$$

86. (曾谨言, 1998, Ex 9.8) 在 $(l^2, l_z)$ 表象(以 $|lm\rangle$ 为基矢)中,  $l = 1$ 的子空间的维数为三. 求 $l_x$ 在此三维空间中的矩阵表示. 再利用矩阵方法求出 $l_x$ 的本征值和本征态.

提示: 利用公式(曾谨言, 1998, pp.250-251, Eq. (26))

$$\begin{aligned} \langle jm + 1 | j_+ | jm \rangle &= \sqrt{(j + m + 1)(j - m)} \\ &= \sqrt{j(j + 1) - m(m + 1)}, \\ \langle jm - 1 | j_- | jm \rangle &= \sqrt{(j - m + 1)(j + m)} \\ &= \sqrt{j(j + 1) - m(m - 1)}, \\ \langle jm + 1 | j_x | jm \rangle &= \frac{1}{2} \sqrt{(j + m + 1)(j - m)}, \\ \langle jm - 1 | j_x | jm \rangle &= \frac{1}{2} \sqrt{(j - m + 1)(j + m)}, \\ \langle jm + 1 | j_y | jm \rangle &= -\frac{i}{2} \sqrt{(j + m + 1)(j - m)}, \\ \langle jm - 1 | j_y | jm \rangle &= \frac{i}{2} \sqrt{(j - m + 1)(j + m)}. \end{aligned}$$

求 $l_x$ 的矩阵表示.

87. (曾谨言, 1998, Ex 10.1) 设非简谐振子的Hamilton量表示为 $H = H_0 + H'$ ,

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2,$$

$$H' = \beta x^3, \quad (\beta \text{为实常数}).$$

用微扰论求其能量本征值(准确到二级近似)和本征函数(准确到一级近似).

88. (曾谨言, 1998, Ex 10.2) 考虑耦合谐振子,  $H = H_0 + H'$ ,

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + \frac{1}{2}\mu\omega^2 (x_1^2 + x_2^2),$$

$$H' = -\lambda x_1 x_2, \quad (\lambda \text{为实常数, 刻画耦合强度}).$$

- i. 求出 $H_0$ 的本征值及能级简并度.
- ii. 以第一激发态为例, 用简并微扰论计算 $H'$ 对能级的影响(一级近似).
- iii. 严格求解 $H$ 的本征值, 并与微扰论计算结果比较, 进行讨论.

提示: 做坐标变换, 令 $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta)$ ,  $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)$ , 则 $H$ 可化为两个独立的谐振子,  $\xi$ 和 $\eta$ 为其简正坐标.

89. (曾谨言, 1998, Ex 10.3) 一维无限深势阱( $0 < x < a$ )中的粒子, 受到微扰 $H'$ 作用

$$H'(x) = \begin{cases} 2\lambda x/a, & 0 < x < a/2, \\ 2\lambda(1-x/a), & a/2 < x < a. \end{cases}$$

求基态能量的一级修正.

90. (曾谨言, 1998, Ex 10.4) 实际原子核不是一个点电荷, 它具有一定大小, 可近似视为半径为 $R$ 的均匀分布球体. 它产生的电势为

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{Ze}{R} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \right), & r < R, \\ \frac{Ze}{r}, & r > R. \end{cases},$$

$Ze$ 为核电荷. 试把非点电荷效应看成微扰,

$$H' = \begin{cases} -\frac{Ze}{R} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \right) + \frac{Ze}{r}, & r < R, \\ 0, & r > R. \end{cases},$$

计算原子的1s能级的一级微扰修正.

91. (曾谨言, 1998, Ex 10.5) 设氢原子处于 $n = 3$ 能级. 求它的Stark分裂. (将原子置于外电场中, 它发射的光谱线会发生分裂, 此即Stark分裂).

92. (曾谨言, 1998, Ex 10.6) 设 $H = H_0 + H'$ ,

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1^{(0)} & 0 \\ 0 & E_2^{(0)} \end{pmatrix}, H' = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad (a, b \text{ 为实数}).$$

用微扰论求能级修正(准确到二级近似), 并与严格解(把 $H$ 矩阵对角化)比较.

93. (曾谨言, 1998, Ex 10.7) 对于一维谐振子, 取基态试探波函数形式为 $e^{-\lambda x^2}$ ,  $\lambda$ 为参数. 用变分法求基态能量, 并与严格解比较.

94. (曾谨言, 1998, Ex 10.8) 对于非谐振子,  $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \lambda x^4$ . 取试探波函数为

$$\psi_0(x) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\pi^{1/4}} e^{-\alpha^2 x^2/2}$$

(与谐振子基态波函数形式相同),  $\alpha$ 为参数. 用变分法求基态能量.

95. (曾谨言, 1998, Ex 10.9) 氢原子基态试探波函数取为 $e^{-\lambda(r/a)^2}$ ,  $a = \hbar^2/\mu e^2$  (Bohr半径),  $\lambda$ 为参数. 用变分法求基态能量, 并与严格解比较.

96. (曾谨言, 1998, Ex 10.10) 设在氦核中的质子与中子的相互作用表示成 $V(r) = -Ae^{-r/a}$  ( $A = 32\text{MeV}$ ,  $a = 2.2 \times 10^{-15}\text{m}$ ). 设质子与中子相对运动波函数形式取为 $e^{-\lambda r/2a}$ ,  $\lambda$ 为变分参数. 用变分法计算氦核的基态能量.

97. (曾谨言, 1998, Ex 10.11) 讨论二维Fermi气体

i. 设电子限制在边长为 $L$ 的方框中, 单粒子能级由下式给出,

$$E(n) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2, \quad n^2 = n_1^2 + n_2^2, \quad n_x, n_y = 1, 2, \dots,$$

在大量子数( $n \gg 1$ )下,  $(n, n + dn)$ 中的量子态数目(计及自旋态)为 $dN = \pi n dn$ . 计算态密度 $dN/dE$ .

ii. 求Fermi能量 $E_f$ 和能量平均值 $E_{av}$ .

98. (曾谨言, 1998, p.222, 练习 1) 证明

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}),$$

其中 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是与 $\boldsymbol{\sigma}$ 对易的任何两个矢量. 利用此式证明

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = \mathbf{p}^2,$$

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{l})^2 = \mathbf{l}^2 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{l},$$

这里 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{l}$ 分别为动量和轨道角动量.

99. (曾谨言, 1998, p.222, 练习 2) 设算符  $\mathbf{A}$  与  $\boldsymbol{\sigma}$  对易, 证明

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A} = \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma} = i\mathbf{A} \times \boldsymbol{\sigma}.$$

100. (曾谨言, 1998, p.223, 练习 3) 令  $\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y)$ . 在Pauli表象中

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

用矩阵乘法证明

$$\sigma_x \alpha = \beta, \quad \alpha_x \beta = \alpha, \quad \sigma_y \alpha = i\beta, \quad \sigma_y \beta = -i\alpha,$$

$$\sigma_+ \alpha = 0, \quad \sigma_+ \beta = \alpha, \quad \sigma_- \alpha = \beta, \quad \sigma_- \beta = 0,$$

其中  $\alpha$  和  $\beta$  分别是  $\sigma_z$  取特征值 +1 和 -1 的本征态.

101. (曾谨言, 1998, p.161, 思考题 1) 设体系有两个粒子, 每个粒子可处于三个单粒子态  $\varphi_1, \varphi_2$  和  $\varphi_3$  中的任何一个. 试求体系可能态的数目, 分三种情况讨论,

- i. 两个全同Bose子;
- ii. 两个全同Fermi子;
- iii. 两个可区分粒子.

102. (曾谨言, 1998, p.161, 思考题 2) 设体系有3个粒子组成, 每个粒子可处于三个单粒子态  $\varphi_1, \varphi_2$  和  $\varphi_3$  中的任何一个. 分析体系可能态的数目, 分三种情况,

- i. 不计及波函数的交换对称性;
- ii. 要求波函数对于交换是反对称的;
- iii. 要求波函数对于交换是对称的.

试问(ii)反对称态和(iii)对称态的总数是多少? 与(i)的结果是否相同? 对此作出说明.

103. (潘必才, 2014, Ex.3-6) 证明任何一个 Hermite 矩阵都能被一个幺正矩阵对角化.

104. 证明以下定理

- i. 与可观察量  $\xi$  对易的线性算符, 必定也与  $\xi$  的任意函数对易.

- ii. 线性算符如果与对易可观察量完全集之中的每一个可观察量相对易, 则它是这些可观察量的函数.
- iii. 如有一可观察量 $\xi$ 及一线性算符 $g$ , 如果与 $\xi$ 对易的任意线性算符也与 $g$ 对易, 那么,  $g$ 就是 $\xi$ 的函数.

105. 对于4阶排列, 共有多少个类? 列出每个类的所有元素.

106. (张永德 et al., 2005, Ex 9.9) 两个无相互作用的粒子, 质量都为 $m$ , 处于一维无限深方势阱中, 势阱宽度为 $2a$ , 在阱中势为零, 阱外势无穷大.

- i. 求系统四个最低能级的能量值是多少;
- ii. 求这些能级的简并度. 如果这两个粒子
  - (a) 是全同粒子, 自旋为 $\frac{1}{2}$ ;
  - (b) 不是全同粒子, 自旋为 $\frac{1}{2}$ ;
  - (c) 是全同粒子, 自旋为1.

107. (曾谨言, 1998, p.238, 练习 1) 令 $P_{12} = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$ .

- i. 证明 $P_{12}^2 = 1$ ;
- ii. 证明  $P_{12} = \mathbf{S}^2 - 1$ .

并由此证明 $P_{12}\chi_{SM_S} = (-1)^{S+1}\chi_{SM_S}$ ,  $P_{12}$ 有何物理意义?

108. (曾谨言, 1998, p.238, 练习 2) 令 $P_3 = \frac{1}{4}(1 + 3\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$ ,  $P_1 = \frac{1}{4}(1 - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) = \frac{1}{2}(1 - P_{12})$ . 证明 $P_3\chi_{1M_S} = \chi_{1M_S}$ ,  $P_3\chi_{00} = 0$ ,  $P_1\chi_{1M_S} = 0$ ,  $P_1\chi_{00} = \chi_{00}$ .

109. (曾谨言, 1998, p.238, 练习 3) 利用

$$\mathbf{S}^2 = \frac{\hbar^2}{2}(3 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2),$$

证明  $\chi_{SM_S}$  也是 $\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$ 的本征态, 即

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \chi_{1M_S} = \chi_{1M_S}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \chi_{00} = -3\chi_{00}$$

110. (Constantinescu and Magyari, 1983, 3.2) 设  $u$  和  $v$  是两个可观测量算符, 记  $u$  的测量平均值为  $\langle u \rangle$ , 定义下列均方偏差

$$\Delta u = \sqrt{\langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2}$$

$$\Delta v = \sqrt{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2}$$

则成立不确定性关系

$$\Delta u \Delta v \geq \frac{1}{2} \hbar |\langle w \rangle|,$$

其中

$$w = -\frac{i}{\hbar}(uv - vu).$$

## 参考文献

Constantinescu, F. and Magyari, E. (1983). 量子力学习题与解答. 高等教育出版社, 北京, 1st edition. 葛源 and 喀兴林 译.

马涛, 倪致祥, 张德明, and 谈欣柏 (1986). 硕士研究生入学考试解题指南-量子力学. 安徽教育出版社, 合肥, 1st edition.

潘必才 (2014). 量子力学导论. 中国科学技术大学出版社, 合肥, 1st edition.

曾谨言 (1998). 量子力学导论. 北京大学出版社, 北京, 2nd edition.

张永德, 柳盛典, 吴强, 刘乃乐, 朱栋培, and 范洪义 (2005). 物理学大题典-量子力学. 中国科学技术大学出版社/科学出版社, 合肥/北京, 1st edition.