申向阳 JL22050004

极坐标系

$(\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2})$ ....

柱坐标系

$\Delta_3 u = \frac{\partial u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

数理方程备课本

授课老师：许雷叶;邮箱：lcoasa@mail.ustc.edu.cn

球坐标系

$\Delta_3 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$

第一章、数学物理方程

0.1 偏微分方程

$\Delta_1 u = u_{xx}$

$\Delta_2 u = u_{xx}+u_{yy}$

$\Delta_3 u = u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$

定义(偏导数). 多元函数$u(x,y)$ 的偏导数定义为

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x, y)-u(x,y)}{\Delta x}.$$

定义(方向导数). $\vec{n}=(n_1,n_2)$ 是一个向量。则多元函数$u(x,y)$ 的方向导数定义为

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \lim_{t\to 0}\frac{u((x,y)+\vec{n}t)-u(x,y)}{t}.$$

如果u 足够光滑（我们总是假设该条件满足），方向导数与偏导数之间存在关系

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \vec{n}\cdot(u_x,u_y).$$

如果u 足够光滑（我们总是假设该条件满足），偏导数满足交换性

$$u_{xy}=u_{yx}.$$

定理(链式法则). 设$\xi=\xi(x,y), \eta=\eta(x,y)$ 满足Jacobi行列式不为零，则

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y.$$

写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix}$$

例子1. 2 维Laplace 符号Δ_2 为$\Delta_2 u = u_{xx}+u_{yy}$. 求极坐标下$\Delta_2$ 的形式。

解. 写出极坐标$x = r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. 则

$$u_r = u_x x_r + u_y y_r = u_x\cos\theta + u_y\sin\theta.$$

$$u_\theta = u_x x_\theta + u_y y_\theta = -u_x r\sin\theta + u_y r\cos\theta.$$

$$u_{rr} = (u_r)_x x_r + (u_r)_y y_r = u_{xx}\cos^2\theta + u_{yy}\sin^2\theta + 2u_{xy}\cos\theta\sin\theta.$$

$$u_{\theta\theta} = (u_\theta)_x x_\theta + (u_\theta)_y y_\theta = u_{xx}r^2\sin^2\theta + u_{yy}r^2\cos^2\theta - 2u_{xy}r^2\cos\theta\sin\theta - u_x r\cos\theta - u_y r\sin\theta.$$

组合得到

$$u_{rr}+\frac{u_r}{r}+\frac{u_{\theta\theta}}{r^2} = u_{xx}+u_{yy}.$$

u
x y
r θ r θ

定义(偏微分方程). 含偏导数的微分方程。

以下例子是最基本微分方程的求解。

$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta$

$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta$

$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial r}\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial r}\sin\theta$

$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\theta+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\theta$

$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}r^2\sin^2\theta} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \theta}r\sin\theta-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}r\sin\theta-\frac{\partial u}{\partial x}r\cos\theta$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}r\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \theta} \ldots -\frac{\partial u}{\partial y}r\sin\theta$

$(e^{\int pdx}u)_x = (e^{\int pdx})_x u + e^{\int pdx} u_x$

$= (pu+u_x)e^{\int pdx}$

$= Qe^{\int pdx}$

$\Rightarrow e^{\int pdx}u = \int Qe^{\int pdx}dx + f(y)$

$\Rightarrow u = e^{-\int pdx}(\int e^{\int pdx}Qdx + f(y))$

例子2. 设$u = u(x,y)$，求解$u_x + P(x,y)u = Q(x,y)$.

解. 乘上$e^{\int Pdx}$. 得到

$$\left(e^{\int Pdx}u\right)_x = e^{\int Pdx}Q.$$

得到

$$e^{\int Pdx}u = \int e^{\int Pdx}Qdx + f(y).$$

所以

$$u = e^{-\int Pdx}\left(\int e^{\int Pdx}Qdx + f(y)\right).$$ (必记)

这里需要注意$\int Pdx$ 表示某个P 相对于自变量x 取定的原函数。

更多偏微分方程：

波动方程 $u_{tt} = a^2\Delta u + f$;

热传导方程 $u_t = a^2\Delta u + f$;

泊松方程 $\Delta u = f$;

冲击波方程 $u_t + uu_x = 0$;

KDV方程 $u_t + \sigma uu_x + u_{xxx} = 0$;

例子3. 设$u = u(x,y)$，求解$u_{tt} = a^2u_{xx}$.

解. 做替换$\xi = x + at, \eta = x - at$. Jacobi 行列式不为零。从而

$$u_x = u_\xi + u_\eta, u_{xx} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\eta}.$$

$$u_t = a(u_\xi - u_\eta), u_{tt} = a^2(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - 2u_{\xi\eta}).$$

所以

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

$\Rightarrow$ 从而 $u = f(\xi) + g(\eta)$ →往正方向行进的波

$= f(x+at) + g(x-at)$

a: 波的行进速度

往反方向行进的波

从而

$$u_\xi = f(\xi).$$

从而

$$u = g(\eta) + \int f(\xi)d\xi = \tilde{f}(x + at) + g(x - at).$$

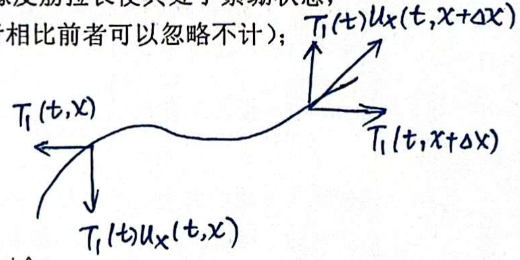
0.2 三类方程的推导

一、弦振动方程（一维波动方程）

理想化假设：

(1) 理想弦：细、柔软且线密度$\rho(x)$，躺在x轴上，处于xu平面内，运动方向垂直于x轴，$u = u(t,x)$为状态函数；

(2) 弦处于紧绷状态，张力很大，张力满足胡克定律（例如：一根橡皮筋拉长使其处于紧绷状态，则张力来源于无振动时的长度变化以及弦震动产生的附加，后者相比前者可以忽略不计）；



(3) 弦做微小上下震动，$|u| \ll 1, \overset{\text{斜率}}{u_x} \ll 1$；

(4) 所受外力非常小，合力为竖直方向，力密度为$g(t,x)$。 外力

取一段弧线$[x, x+\triangle x]$做受力分解，其竖直方向合力

$$= T_1(t, x+\triangle x)u_x(t, x+\triangle x) - T_1(t,x)u_x(t,x) + \int_x^{x+\triangle x} g(t,s)ds.$$

张力T

其中$T_1(t,s)$为t时刻张力在s点的水平分量，因为弦只在竖直方向有运动，该值与s无关，为$T_1(t)$。竖直方向合力

$$= T_1(t)u_x(t, x+\triangle x) - T_1(t)u_x(t,x) + \int_x^{x+\triangle x} g(t,s)ds.$$

$$= T_1(t)\left(u_x(t,x+\Delta x) - u_x(t,x)\right) + \int_x^{x+\Delta x} g(t,s)ds$$

利用牛顿-莱布尼兹公式，竖直方向合力为

$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx$

$$\int_x^{x+\triangle x} T_1(t)u_{xx}(t,s) + g(t,s)ds. \text{ ①}$$

$$= T_1(t)\int_x^{x+\Delta x} u_{xx}dx + \int_x^{x+\Delta x} g(t,s)ds$$

由牛顿第二定律$F = ma$，上式等于

$$\int_x^{x+\triangle x} \rho(s)u_{tt}(t,s)ds. \text{ ②}$$

$T_1(t)u_{xx} + g = \rho u_{tt}$

由所取弧线的任意性，我们得到 ①=②

$$u_{tt} = \frac{T_1(t)}{\rho}u_{xx} + \frac{g}{\rho}.$$

$\therefore T \cdot u_{xx} + g = \rho u_{tt}$

最后$T_1(t)$ 近似于弦本身的张力T。得到近似公式

$$u_{tt} = \frac{T}{\rho}u_{xx} + \frac{g}{\rho}.$$

$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$

设$a = a(x) = \sqrt{T/\rho}, f(t,x) = g/\rho$，我们得到

电磁波方程：

$$\boxed{u_{tt} = a^2u_{xx} + f.}$$

$\nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}$

一般来说，我们总是会假定ρ为常数，因而a为常数。 $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$

$\nabla \times H = \sigma E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}$

二、热传导方程。

理想化假设：

$\nabla(\varepsilon E) = 0$

(1) 介质各向同性且均匀分布（比热c，密度ρ，热传导系数k）；

$\nabla(\mu H) = 0$

$\vec{n}$为S的单位法向量

(2) $dQ = -k(x,y,z) \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dSdt$，其中$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = (u_x, u_y, u_z) \cdot \vec{n}$，$u$为温度；

(3) 内部热源，设为$g(t,x,y,z)$（产生热量密度）。

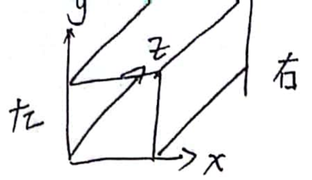
$$\nabla \times \nabla \times E = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times H)$$
$$= -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\sigma E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t})$$
$$= -\mu\sigma E_t - \mu\varepsilon E_{tt}$$

波 $\begin{cases} 横波 \to 光 \\ 纵波 \to 声音 \end{cases}$

纵波：

假设金属棒左右振动，u为x点位移矢量

$$ESu_x(b) - ESu_x(a) = \int_a^b \rho u_{tt}dx$$
$$ES\int_a^b u_{xx}dx = \int_a^b \rho u_{tt}dx$$



取一个方体$(x,x+\triangle x)\times(y,y+\triangle y)\times(z,z+\triangle z)$以及时间段$[t,t+\triangle t]$，先计算从方体的左边一个面$\{x\}\times(y,y+\triangle y)\times(z,z+\triangle z)$ 流入方体的热量，法向为$(1,0,0)$，因而左边一个面流入方体的热量为

$$Q_{左}=\int_t^{t+\triangle t}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}-ku_x(s,x,v,w)dvdwds.$$

再计算从方体的右边一个面$\{x+\triangle x\}\times(y,y+\triangle y)\times(z,z+\triangle z)$流入方体的热量，法向为$(-1,0,0)$，因而右边一个面流入方体的热量为

$$Q_{右}=\int_t^{t+\triangle t}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}ku_x(s,x+\triangle x,v,w)dvdwds.$$

从而左右两个面合计流入热量为

$$\begin{aligned}Q_{左}+Q_{右}&=\int_t^{t+\triangle t}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}ku_x(s,x+\triangle x,v,w)-ku_x(s,x,v,w)dvdwds\\&=\int_t^{t+\triangle t}\int_x^{x+\triangle x}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}ku_{xx}(s,u,v,w)dudvdwds.\end{aligned}$$

同理

$$Q_{前}+Q_{后}=\int_t^{t+\triangle t}\int_x^{x+\triangle x}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}ku_{yy}(s,u,v,w)dudvdwds.$$

$$Q_{上}+Q_{下}=\int_t^{t+\triangle t}\int_x^{x+\triangle x}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}ku_{zz}(s,u,v,w)dudvdwds.$$

总计方体内热量变化

$$\int_t^{t+\triangle t}\int_x^{x+\triangle x}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}k(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})(s,u,v,w)+g(s,u,v,w)dudvdwds.$$

由热力学定律所需热量，即上式等于

$$\begin{aligned}&\int_x^{x+\triangle x}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}c\rho(u(t+\triangle t,u,v,w)-u(t,u,v,w))dudvdw\\=&\int_t^{t+\triangle t}\int_x^{x+\triangle x}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}c\rho u_t(s,u,v,w)dudvdwds.\end{aligned}$$

既然我们所取方体是任意的，我们有 $k(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+g=c\rho u_t$

$$u_t=\frac{k}{c\rho}(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+\frac{g}{c\rho}.$$

$k\Delta u+g=c\rho u_t$

设$a=\sqrt{k/c\rho},f=g/c\rho$，热传导方程为

$u_t=\frac{k}{c\rho}\Delta u+\frac{g}{c\rho}$

$$u_t=\frac{k}{c\rho}(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+\frac{g}{c\rho}=a^2\Delta_3u+f.$$

热传导方程 $u_t=a^2\Delta u+f$

三、泊松方程（静电场的场势方程）。

理想化假设： 电场的电势分布

如：扩散方程。

① 守恒

② 扩散速度与浓度成正比

(1) 介质各向同性且均匀分布（介电常数设为ε）；

$$\nabla\varphi=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

(2) 电荷密度，设为$\rho(x,y,z)$。标量

设$\vec{E}$ 为电场，则与电势有关系$\nabla_3\varphi=-\vec{E}$。推导依赖高斯定律：通过封闭曲面的电通量=封闭曲面内部载荷除以介电常数。任意封闭曲面S，有

$$\int\nabla_3\cdot\vec{E}dV\overset{\text{高斯公式}}{=}\int\vec{E}\cdot\vec{n}dS=\int\frac{\rho}{\varepsilon}dV.$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\rho}{\varepsilon}=\nabla\cdot\vec{E}=-(\nabla\cdot\nabla)\varphi=-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\varphi\right)=-\Delta\varphi$$

从而由封闭曲面选取的任意性，

$$-\Delta_3\varphi=\boxed{\nabla_3\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}}\Leftrightarrow\Delta_3\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

$$\boxed{\therefore\Delta\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon}\quad\text{(泊松方程)}}$$

我们也可以用推导热方程的办法推导泊松方程。取一个方体$(x,x+\triangle x)\times(y,y+\triangle y)\times(z,z+\triangle z)$，设$\vec{E}=(E_1,E_2,E_3)$。计算方体的左边一个面$\{x\}\times(y,y+\triangle y)\times(z,z+\triangle z)$的电场通量为

$$\Phi_{\text{左}}=\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}E_1(x,v,w)dvdw.$$

再计算从方体的右边一个面$\{x+\triangle x\}\times(y,y+\triangle y)\times(z,z+\triangle z)$的电场通量

$$\Phi_{\text{右}}=\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}E_1(x+\triangle x,v,w)dvdw.$$

从而左右两个面跑出方体的通量为

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{右}}-\Phi_{\text{左}}&=\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}E_1(x+\triangle x,v,w)-E_1(x,v,w)dvdw\\&=\int_x^{x+\triangle x}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}(E_1)_x(u,v,w)dudvdw.\end{aligned}$$

同理

$$\Phi_{\text{后}}-\Phi_{\text{前}}=\int_x^{x+\triangle x}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}(E_2)_y(u,v,w)dudvdw.$$

$$\Phi_{\text{上}}-\Phi_{\text{下}}=\int_x^{x+\triangle x}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}(E_3)_z(u,v,w)dudvdw.$$

总计离开方体的电通量为

$$\begin{aligned}&\int_x^{x+\triangle x}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}((E_1)_x+(E_2)_y+(E_3)_z)(u,v,w)dudvdw\\=&\int_x^{x+\triangle x}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}\nabla_3\cdot\vec{E}(u,v,w)dudvdw.\end{aligned}$$

由高斯定律，上式等于

$$\int_x^{x+\triangle x}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}\frac{\rho}{\varepsilon}dudvdw$$

既然我们所取方体是任意的，我们有

$$\nabla_3 \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

代入关系式$\nabla_3\varphi = -\vec{E}$。得到

$$\Delta_3\varphi = -\nabla_3 \cdot \vec{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

除此之外，泊松方程也可以描述某些平衡态，比如处于热平衡的方程。

0.3 定解条件

一般来说，哪怕是最最简单的偏微分方程，其解都有无数个，而且通常包含着任意函数。例如：求$u_t = 0$的通解，其中$u = u(t, x)$，答案为

$$u = f(x)$$

f为任意函数。为了让解唯一，我们必须加限制条件，称为定解条件。合起来称为定解问题

$$\begin{cases} \text{泛定方程：描述一般物理规律的数学物理方程} \\ \text{定解条件：使方程有唯一解的各种条件} \end{cases}$$

(1) 泛定方程：波动方程，热方程，泊松方程，其他方程(KDV方程，冲击波方程等)；

(2) 定解条件：

(a) 初始条件 系统的初始状态；

(b) 边界条件 系统的边界状态，分为Dirichlet条件(I类)，Neumann条件(II 类)，混合边界条件(Robin条件,III 类)，自然边界条件，周期边界条件等。

I 类 给出了状态函数在边界的取值，可以和时间有关；

II 类 给出了状态函数在边界法向(垂直于边界，远离区域)导数的取值，可以和时间有关；

关于状态函数u 在边界法向$\vec{n}$ 导数$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \nabla u \cdot \vec{n} = (u_x, u_y, u_z) \cdot \vec{n}$,

一维：$\pm u_x$，取决于$\vec{n}$ 选取；

二维：$(u_x, u_y) \cdot (n_1, n_2) = n_1 u_x + n_2 u_y$;

三维：$(u_x, u_y, n_z) \cdot (n_1, n_2, n_3) = n_1 u_x + n_2 u_y + n_3 u_z$。

III 类 上述两的线性组合；

自然边界条件 自然满足的边界条件，例如状态函数取值必须有界等；

周期边界条件 状态函数取值周期性发生变化，往往出现在柱坐标系和球坐标系中。

在这一节中，我们只考虑初始条件和I，II，III类边界条件。

只有初始条件的叫初始问题；只有边界条件的叫边界问题；既有初始条件又有边界条件的称为混合问题。

弦振动方程，热方程和泊松方程的定解条件。

(1) 弦振动方程：$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f$.

(a) 初始条件（初始问题）：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} + f, t > 0, -\infty < x < \infty \\ u\mid_{t=0}(x) = g_1(x), u_t\mid_{t=0}(x) = g_2(x) \end{cases}$$

↘初始位置 ↘初始速度

(b) 边界条件（混合问题）：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} + f, 0 < x < l, t > 0 \\ u(t,0) = A(t), u_x(t,l) = B(t) \Longleftarrow \text{（边界条件）} \\ u\mid_{t=0}(x) = g_1(x), u_t\mid_{t=0}(x) = g_2(x) \Longleftarrow \text{（初始条件）} \end{cases}$$

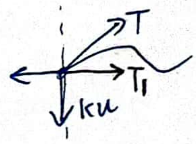
例子：常见边界条件

(I) Dirichlet边界条件：端点运动状态：$u(t,0) = A(t)$；特别地，端点固定在零点：$u(t,0) = 0$；

$u_x(t,0)=0$ 一端上下自由运动

(II) Neumann边界条件：端点竖直方向自由运动，受竖直方向力$F(t)$：则由受力分解，$Tu_x\mid_{x=0} + F(t) = 0$，即$u_x(t,0) = -\frac{F(t)}{T}$；特别地，$F(t) = 0$时，$u_x(t,0) = 0$；

(III) 混合边界条件：端点接了一个竖直的弹簧，弹性系数为k：由受力分解，$Tu_x\mid_{x=0} - ku = 0$，即$u_x(t,0) - \frac{k}{T}u(t,0) = 0$。



例子4. 一根长为l的理想弦躺在x轴上，张力为T，一端固定$x=0$处，另一端$x=l$端点接了一个竖直的弹簧，弹性系数为k。初始位置为$g_1(x)$，初始速度$g_2(x)$。写出定解问题。

$T_1 \approx T$

解.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx}, 0 < x < l, t > 0 \\ u(t,0) = 0, u_x(t,\overset{x}{0}) + \frac{k}{T}u(t,\overset{x}{0}) = 0 \Longleftarrow \text{（边界条件）} \\ u\mid_{t=0}(x) = g_1(x), u_t\mid_{t=0}(x) = g_2(x) \Longleftarrow \text{（初始条件）} \end{cases}$$?

u_x：视作斜率

$T\cdot u_x$ 即竖直方向的力

(2) 一维细杆热方程：我们认为与x垂直的界面上的温度是一样的，热源也是一样的，因而$u_{yy} = u_{zz} = 0$，可以在热传导方程中无视y与z。即：$u_t = a^2u_{xx} + f$.（二维类似）

(a) 初始条件（初始问题）：

$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx} + f, t > 0, -\infty < x < +\infty \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$$

1个t. 初始条件一个.

(b) 热方程边界条件（混合问题）：

$$\text{I类.}\begin{cases} u_t = a^2u_{xx} + f, \quad 0 < x < l, t > 0 \\ u(t,0) = A(t), u_x(t,l) = B(t) \Longleftarrow \text{（边界条件）} \\ u\mid_{t=0}(t,x) = g(x) \Longleftarrow \text{（初始条件）} \end{cases}$$

→II类

$u_x(t,l)=0$ 绝热.

例子：常见边界条件（记住一点，热量都是从高温往低温流，这样就不会搞错正负号了！）

(I) Dirichlet条件：$u(t,0) = g(t)$，特别地，恒温：$u(t,0) = T$；

$dQ = k\frac{\partial u}{\partial n}dSdt$

左端，n取1. $\frac{dQ}{k\,dSdt}=-u_x$

(II) Neumann条件：

如果0端有热流q流入，

$q=-ku_x(t,0)$

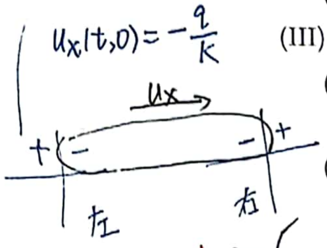
$u_x(t,0)=-\frac{q}{k}$

(α) 绝热：$u_x(t,0)=0$；

(β) 左端有热量$q(t)$ 流入：$\frac{dQ}{dSdt}=-ku_x\mid_{x=0}(t,x)$，即：$u_x\mid_{x=0}=-\frac{q(t)}{k}$；

(γ) 右端有热量$q(t)$ 流入：$\frac{dQ}{dSdt}=ku_x\mid_{x=l}(t,x)$，即：$u_x\mid_{x=l}=\frac{q(t)}{k}$。

(III) 混合边界条件：边界与介质接触，热流交换满足$h\times$温度差：



(α) 左端与温度为$T(t)$ 的介质接触：$h(u|_{x=0}-T)=ku_x\mid_{x=0}(t,x)$，即：$(u-\frac{k}{h}u_x)\mid_{x=0}=T$；

$q=h(T-u)=-ku_x(t,0) \Rightarrow (u-\frac{ku_x}{h})|_{x=0}=T$

(β) 右端与温度为$T(t)$的介质接触：$h(u|_{x=l}-T)=-ku_x\mid_{x=l}(t,x)$，即：$(u+\frac{k}{h}u_x)\mid_{x=l}=T$。

~~一般，左端正都是"一"号~~

例子5. 一根长为l的由理想介质组成的细杆(两端点分别为$0,l$)，$k=c=\rho=1$，侧面绝热，内部无热源，初始温度为x。两端分别与温度0,1的介质接触，热交换系数为2。写出定解问题。

h.

解.

$a=\sqrt{\frac{k}{c\rho}}$

作业 1.7

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}, 0<x<l, t>0 \\ u(0,x)=x \\ u(t,0)-\frac{1}{2}u_x(t,0)=0, u(t,l)+\frac{1}{2}u_x(t,l)=1 \end{cases}$$

$\overset{2}{h}(\overset{0}{T_0}-u)=-\overset{1}{k}u_x(t,0)$

$\overset{2}{h}(\overset{1}{T_l}-u)=\overset{1}{k}u_x(t,l)$

(3) 一般热方程边界问题：我们省略了二维的情形，反正都差不多。例子：常见边界条件（记住一点，热量都是从高温往低温流，这样就不会搞错正负号了!）我们用V表示区域，S表示V的边界。

(I) Dirichlet条件：$u(t,x,y,z)=g(t,x,y,z)$；

(II) Neumann条件：

(α) 绝热：$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_S=0$；

(β) 有热量$q(t,x,y,z)$ 流出：$-k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_S=q$，即：$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_S=-\frac{q}{k}$；

(γ) 有热量$q(t,x,y,z)$ 流入：$k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_S=q$，即：$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_S=\frac{q}{k}$。

(III) 混合边界条件：边界与介质接触，热流交换满足$h\times$温度差：

(α) 边界与温度为$\theta(t,x,y,z)$ 的介质接触：$h(u-\theta)=-k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_S$，即：$(u+\frac{k}{h}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})|_S=\theta$。

（需要注意的是，并不是所有边界都取一样的边界条件，可以不同。）

例子6. 有一块$[0,1]\times[0,1]$的正方形金属片，内部无热源，有初始温度xy，上下面绝热，$x=0$绝热，$x=1$恒温$=1$，$y=1$与温度为0的介质接触，热交换系数=热传导系数$=1$，$y=0$有热流密度$q(t)$流出，写出定解问题。

h　　K

解.

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+u_{yy}, 0<x,y<1, t>0 \\ u(0,x,y)=xy \\ u_x(t,0,y)=0, u(t,l,y)=1 \\ u_y(t,x,0)=q(t), u(t,x,1)+u_y(t,x,1)=0 \end{cases}$$

$h(0-u(t,x,1))=k\cdot u_y(t,x,1)$　　$h=k=1$

$\therefore u(t,x,1)+u_y(t,x,1)=0$.

(4) 泊松方程没有初始条件只有边界条件（边界问题）：$\Delta_3 u = f$.

$$\begin{cases} \Delta_3 u = f, \ (x,y,z) \in \Omega \\ u\mid_{\partial\Omega} = A(x,y,z) \Longleftarrow \ (\text{边界条件}) \end{cases}$$

注记. 在上述定解问题中，如果$f = 0$，则称方程齐次，如果边界条件中不含u, u_x项为0，则称边界条件齐次，一般我们总是希望方程和边界条件都是齐次，齐次化的过程需要叠加原理和冲量原理，详情见下一节。

例子7. 一个圆柱体，顶端恒温T_0，底端绝热，侧面与温度为T的介质接触，内部无热源，初始温度$\psi(x,y,z)$，写出定解问题。 热方程.

解. （要特别注意正负号，记住热流总是从高温到低温，这样就不会搞错了。）

假设.

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, \quad x^2+y^2 < R^2, 0 < z < H, t > 0 \\ u_z\mid_{z=0} = 0, u\mid_{z=H} = T_0 \\ u(0,x,y,z) = \psi(x,y,z) \\ (u + \frac{k}{h} u_r)\mid_{r=R} = T \end{cases}$$

$h(T-u) = +k\frac{\partial u}{\partial r}$

例子8. 一个圆柱体，顶端恒温T_0，底端绝热，侧面与温度为T的介质接触，内部无热源，处于热平衡，写出定解问题。 热平衡.

解.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ x^2+y^2 < R^2, 0 < z < H, t > 0 \\ u_z\mid_{z=0} = 0, u\mid_{z=H} = T_0 \\ (u + \frac{k}{h} u_r)\mid_{r=R} = T \end{cases}$$

0.4 达朗贝尔公式

如果 $0 < x < l$，有边界，用不了达朗贝尔公式，用分离变量法（下一章）

我们先求弦振动方程的初始问题。 没有边界

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(0,x) = g_1(x), u_t(0,x) = g_2(x) \end{cases}$$

为此，我们先要求泛定方程$u_{tt} = a^2 u_{xx}$的通解，做变量替换$\xi = x + at, \eta = x - at$，则有

$$u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = a u_\xi - a u_\eta, u_{tt} = a^2 u_{\xi\xi} + a^2 u_{\eta\eta} - 2a^2 u_{\xi\eta}.$$

同理，$u_{xx} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\eta}$，带入泛定方程得

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

从而$u = h_1(\xi) + h_2(\eta)$。即

$$u(t,x) = h_1(x+at) + h_2(x-at).$$

与初始条件结合有

$$\begin{cases} h_1(x) + h_2(x) = g_1(x) \\ h_1'(x) - h_2'(x) = \frac{g_2(x)}{a} \end{cases}$$

$h_1(x) - h_2(x) = \frac{1}{a}\int_0^x g_2(x)dx + C$

解得

$$\begin{cases} h_1(x) = \frac{1}{2}g_1(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x g_2(s)ds + C \\ h_2(x) = \frac{1}{2}g_1(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x g_2(s)ds - C \end{cases}$$

两个波的叠加.

带入通解，得到达朗贝尔公式

g_1 g_1

$$\boxed{u(t,x) = \frac{g_1(x+at)+g_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g_2(s)ds}$$

对于非齐次一维波动方程的初始问题。

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} + f, -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(0,x) = g_1(x), u_t(0,x) = g_2(x) \end{cases}$$

解题步骤如下:

(1) 先找泛定方程$v_{tt} = a^2v_{xx} + f$的一个特解$v(t,x)$;

(2) 用$\tilde{u} = u - v$建立新的初始问题:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = a^2\tilde{u}_{xx}, -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ \tilde{u}(0,x) = g_1(x) - v(0,x), \tilde{u}_t(0,x) = g_2(x) - v_t(0,x) \end{cases}$$

(3) 用达朗贝尔公式解出$\tilde{u}$ 并求出$u = \tilde{u} + v$。

例子9. 求解以下非齐次定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x^2e^{-t}, -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(0,x) = x, u_t(0,x) = \sin x \end{cases}$$

初始问题

解. 泛定方程$v_{tt} = v_{xx} + x^2e^{-t}$一个特解为 $v=(Ax^2+Bx+C)e^{-t}$

①找特解.

$$v(t,x) = x^2e^{-t} + 2e^{-t}.$$

$(Ax^2+Bx+C)\cancel{e^{-t}} = 2A\cancel{e^{-t}} + \cancel{x^2e^{-t}}$

$A=1\quad B=2.\quad C=0.$

令$\tilde{u} = u - v$, 得到

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{xx}, -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ \tilde{u}(0,x) = x - x^2 - 2, \tilde{u}_t(0,x) = \sin x + x^2 + 2. \end{cases}$$

由达朗贝尔公式，得

$$\tilde{u}(t,x) = \frac{x+t-(x+t)^2-2+x-t-(x-t)^2-2}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}(\sin s + s^2 + 2)ds.$$

整理得,

$$\tilde{u}(t,x) = -x^2 + x - 2 - t^2 + \sin x\sin t + x^2t + \frac{t^3}{3} + 2t.$$

从而

$$u(t,x) = \tilde{u}(t,x) + v(t,x) = -x^2 + x - 2 - t^2 + \sin x\sin t + x^2t + \frac{t^3}{3} + x^2e^{-t} + 2e^{-t} + 2t.$$

达朗贝尔公式的其他应用：

例子10. 求解一端固定的半弦齐次波动方程：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x < +\infty, t > 0 \\ u(0,x) = g_1(x), u_t(0,x) = g_2(x) \\ u(t,0) = 0. \end{cases}$$

解. 我们可以把半弦扩为完整的弦，但是要求解在$x=0$点取值始终为0，为此我们做奇扩充：

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = a^2 \tilde{u}_{xx}, -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ \tilde{u}(0,x) = \tilde{g}_1(x), u_t(0,x) = \tilde{g}_2(x) \end{cases}$$

$\tilde{g}_1(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \geq 0 \\ -g_1(-x), & x < 0 \end{cases}$

其中，$\tilde{g}_1(x) = sign(x)g_1(|x|)$，$\tilde{g}_2(x) = sign(x)g_2(|x|)$. 用达朗贝尔公式解该方程，得：

$\tilde{g}_2(x) = \begin{cases} g_2(x), & x \geq 0 \\ -g_2(-x), & x < 0 \end{cases}$

$$\tilde{u}(t,x) = \frac{\tilde{g}_1(x+at) + \tilde{g}_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \tilde{g}_2(s)ds.$$

整理得

$$u(t,x) = \begin{cases} \frac{g_1(x+at)+g_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g_2(s)ds & x - at \geq 0 \\ \frac{g_1(x+at)-g_1(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\left(\int_0^{x+at} \tilde{g}_2(s)ds - \int_0^{at-x} \tilde{g}_2(s)ds\right) & x - at < 0 \end{cases}$$

例子11. 求解一端上下自由运动的半弦齐次波动方程：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 \leq x < +\infty, t > 0 \\ u(0,x) = g_1(x), u_t(0,x) = g_2(x), 0 \leq x < +\infty \\ u_x(t,0) = 0. \end{cases}$$

解. 我们可以把半弦扩为完整的弦，要求解在$x=0$点导数取值始终为0，为此我们做偶扩充：

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = a^2 \tilde{u}_{xx}, -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ \tilde{u}(0,x) = \tilde{g}_1(x), u_t(0,x) = \tilde{g}_2(x) \end{cases}$$

$\tilde{g}_1(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \geq 0 \\ g_1(-x), & x < 0 \end{cases}$

其中，$\tilde{g}_1(x) = g_1(|x|)$，$\tilde{g}_2(x) = g_2(|x|)$. 用达朗贝尔公式解该方程，得：

$$\tilde{u}(t,x) = \frac{\tilde{g}_1(x+at) + \tilde{g}_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-at}^{x+at} \tilde{g}_2(s)ds.$$

$\tilde{g}_2(x) = \begin{cases} g_2(x), & x \geq 0 \\ g_2(-x), & x < 0 \end{cases}$

整理得

$$u(t,x) = \begin{cases} \frac{g_1(x+at)+g_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g_2(s)ds, & x - at \geq 0 \\ \frac{g_1(x+at)+g_1(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\left(\int_0^{x+at} g_2(s)ds + \int_0^{at-x} g_2(s)ds\right), & x - at < 0. \end{cases}$$

总结例子10和例子11的方法，就是$u(t,a)=0$就以$x=a$中心对称，$u_x(t,a)=0$就以$x=a$对称。

0.5 叠加原理和冲量原理

我们希望定解问题是其次的，叠加原理和冲量原理可以消除非齐次项，这往往是解数学物理方程的第一步。

二阶线性微分算子

$\mathcal{L}=\sum_{ij}a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+2\sum b_i\frac{\partial}{\partial x_i}+c$

$\mathcal{L}u=\sum_{ij}a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+2\sum b_i\frac{\partial}{\partial x_i}u+cu.$

0.5.1 叠加原理

对于一个复杂问题，我们试图用叠加原理将其分解成几个简单的问题（边界条件齐次，方程齐次）。设$\mathcal{L}$为线性微分算子，则有叠加原理

(1) 有限叠加$\mathcal{L}u_i=f_i, i=1,2,\cdots,n \Rightarrow \mathcal{L}(\sum_i u_i)=\sum_i f_i$;

(2) 可数叠加$\mathcal{L}u_i=f_i, i=1,2,\cdots \Rightarrow \mathcal{L}(\sum_i u_i)=\sum_i f_i$;

(3) 积分叠加$\mathcal{L}u_i(M;m)=f(M;m), m\in M_0 \Rightarrow \mathcal{L}(\int_{M_0}u(M;m)dm)=\int_{M_0}f(M;m)dm$。

↳下标，计数单位.

叠加原理最大的用处就是把一个复杂问题分解成若干简单问题（方程齐次，边界条件齐次），例如：找特解本身就表示我们使用了叠加原理，我们还是用例子说明：

例子12. 将下面弦振动方程做分解：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(t,x), 0<x<l, t>0 \\ u(0,x)=g_1(x), u_t(0,x)=g_2(x) \\ u(t,0)=\psi_1(t), u_x(t,l)=\psi_2(t). \end{cases}$$

⟸ 边界条件

解. 该方程本身非齐次，并且边界条件也是非齐次。我们先想办法将边界条件齐次化，一个办法是设

$$v(t,x)=\psi_1(t)+x\psi_2(t).$$

令$\tilde{u}=u-v$，则得到一个边界条件齐次的定解问题：

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}=a^2\tilde{u}_{xx}+\tilde{f}(t,x), 0<x<l, t>0 \\ \tilde{u}(0,x)=\tilde{g}_1(x), \tilde{u}_t(0,x)=\tilde{g}_2(x) \\ \tilde{u}(t,0)=0, \tilde{u}_x(t,l)=0 \end{cases}$$

其中$\tilde{f}=f-\psi_1''(t)-x\psi_2''(t), \tilde{g}_1=g_1-\psi_1(0)-x\psi_2(0), \tilde{g}_2=g_2-\psi_1'(0)-x\psi_2'(0)$. 设$\tilde{v}$ 是定解问题

$$\begin{cases} \tilde{v}_{tt}=a^2\tilde{v}_{xx}+\tilde{f}(t,x), 0<x<l, t>0 \\ \tilde{v}(0,x)=0, \tilde{v}_t(0,x)=0 \\ \tilde{v}(t,0)=0, \tilde{v}_x(t,l)=0 \end{cases}$$

的解。设$\bar{v}$ 是定解问题

$$\begin{cases} \bar{v}_{tt}=a^2\bar{v}_{xx}, 0<x<l, t>0 \\ \bar{v}(0,x)=\tilde{g}_1(x), \bar{v}_t(0,x)=\tilde{g}_2(x) \\ \bar{v}(t,0)=0, \bar{v}_x(t,l)=0 \end{cases}$$

的解。则$\tilde{u}=\tilde{v}+\bar{v}$，从而$u=\tilde{u}+v=v+\tilde{v}+\bar{v}$。因而仅需解出$\tilde{v}$和$\bar{v}$。$\bar{v}$ 的求法需要用下一章的分离变量法。$\tilde{v}$的解法可以使用冲量原理化为$\bar{v}$ 的情形。

思考. 上述例子中，v的选取是否唯一？如果边界条件为$u_x(t,0)=\psi_1(t), u(t,l)=\psi_2(t)$，该如何选择$v$？如果出现混合边界条件呢？对于热方程，我们是否可以做同样的操作？

（找不到特解时用这法）

（齐次化原理）

0.5.2 冲量原理 ~~非齐次泛定方程~~

即 $t=0$时. $\forall t$.

冲量原理适用范围：非齐次波动方程或热方程（可以高维）+平凡初始条件+齐次边界条件（可以没有边界条件）。推导冲量原理依赖一个求导公式

2个"0" 2个"0"

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t p(t,s)ds = p(t,t)+\int_0^t p_t(t,s)ds.$$

☆

$\boxed{\text{弦振动方程的冲量原理：}}$ 如果定解问题

$$\begin{cases} w_{tt}=a^2w_{xx}, 0<x<l, t>\tau \\ w(\tau,x)=0, w_t(\tau,x)=f(\tau,x) \\ w(t,0)=0, w_x(t,l)=0 \end{cases}$$

的解为 $w(t,x;\tau)$。则定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(t,x), 0<x<l, t>0 \\ u(0,x)=0, u_t(0,x)=0 \\ u(t,0)=0, u_x(t,l)=0 \end{cases}$$

4个"0"

的解为

$$\boxed{u(t,x)=\int_0^t w(t,x;\tau)d\tau.}$$

证明. 边界条件和初始条件上述表达式显然满足。我们仅需说明上述表达式满足泛定方程。

$$u_t = w(t,x;t)+\int_0^t w_t(t,x;\tau)d\tau = \int_0^t w_t(t,x;\tau)d\tau.$$

对于积分求导.

从而

$$u_{tt}=w_t(t,x;t)+\int_0^t w_{tt}(t,x;\tau)d\tau = f(t,x)+a^2\int_0^t w_{xx}(t,x;\tau)d\tau = a^2u_{xx}+f.$$

$$\left(\int_0^t p(t,s)ds\right)' = p(t,t)+\int_0^t p_t(t,s)ds.$$

$\boxed{\text{热方程的冲量原理：}}$ 如果定解问题

$$\begin{cases} w_t=a^2\Delta_3 w, -\infty<x,y,z<+\infty, t>\tau \\ w(\tau,x,y,z)=f(\tau,x,y,z) \end{cases}$$

的解为 $w(t,x,y,z;\tau)$。则定解问题

$$\begin{cases} u_t=a^2\Delta_3 u+f(t,x,y,z), -\infty<x,y,z<+\infty, \cancel{t>\tau}\ t>0 \\ u(0,x,y,z)=0 \end{cases}$$

的解为

$$\boxed{u(t,x,y,z)=\int_0^t w(t,x,y,z;\tau)d\tau.}$$

证明. 初始条件上述表达式显然满足。我们仅需说明上述表达式满足泛定方程。

$$\begin{aligned} u_t &= w(t,x,y,z;t)+\int_0^t w_t(t,x,y,z;\tau)d\tau = f+a^2\int_0^t \Delta w(t,x,y,z;\tau)d\tau \\ &= f+a^2\Delta u. \end{aligned}$$

例：求解 $\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+\cos x, & t\ge 0, -\infty<x<+\infty \\ u(0,x)=0, & u_t(0,x)=4x. \end{cases}$

法1：~~可以看出特解 $\cos x$~~ …… 再用达朗贝尔.

法2：

用冲量原理解：

拆开 ① $\begin{cases} (u_1)_{tt}=(u_1)_{xx} \\ (u_1)(0,x)=0, (u_1)_t(0,x)=4x \end{cases}$

② $\begin{cases} (u_2)_{tt}=(u_2)_{xx}+\cos x \\ (u_2)(0,x)=0, (u_2)_t(0,x)=0 \end{cases}$

① 由达朗贝尔公式 $u_1=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}4x\,dx=4xt.$

② 满足冲量原理条件.

$\begin{cases} W_{tt}=W_{xx}, -\infty<x<+\infty, t>\tau \\ W(\tau,x)=0, W_t(\tau,x)=\cos x \end{cases}$

由达朗贝尔公式：$t\to\tau$. 时间为 $t-\tau$.

$w(t,x;\tau)=\frac{\varphi(x+a(t-\tau))+\varphi(x-a(t-\tau))}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\psi(x)dx.$

代入得

$w(t,x;\tau)=\frac{1}{2}\int_{\sim_2}^{\sim_1}\cos x\,dx$

$=\frac{1}{2}(\sin(\sim_1)-\sin(\sim_2))$

$\Rightarrow u_2(t,x)=\int_0^t w(t,x;\tau)d\tau$

$=(1-\cos t)\cos x.$

$\therefore u=u_1+u_2=4xt-\cos t\cos x+\cos x$

~~例子13~~ (例子9). 求解以下非齐次定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+x^2e^{-t}, -\infty<x<+\infty, t>0 \\ u(0,x)=x, u_t(0,x)=\sin x \end{cases}$$

解. 注意到初始条件非平凡，我们设

如果能找到一特解使~~边界~~初始条件齐次. 则……

$$v(t,x)=t\sin x+x.$$

设 $\tilde{u}=u-v$，则有

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}=\tilde{u}_{xx}+x^2e^{-t}-t\sin x, -\infty<x<+\infty, t>0 \\ \tilde{u}(0,x)=0, \tilde{u}_t(0,x)=0 \end{cases}$$

解以下定解问题

$$\begin{cases} w_{tt}=w_{xx}, -\infty<x<+\infty, t>\tau \\ w(\tau,x;\tau)=0, w_t(\tau,x;\tau)=x^2e^{-\tau}-\tau\sin x \end{cases}$$

得

$$w(t,x;\tau)=\frac{1}{2}\int_{x+\tau-t}^{x+t-\tau}s^2e^{-\tau}-\tau\sin s ds=x^2(t-\tau)e^{-\tau}+\frac{1}{3}(t-\tau)^3e^{-\tau}-\tau\sin x\sin(t-\tau).$$

由冲量原理

$$\tilde{u}(t,x)=\int_0^t w(t,x;\tau)d\tau=x^2(e^{-t}+t-1)+2e^{-t}+\frac{t^3}{3}-t^2+2t-2-t\sin x+\sin x\sin t.$$

从而

$$u(t,x)=\tilde{u}(t,x)+v(t,x)=-x^2+x-2-t^2-\sin x\sin t+x^2t+\frac{t^3}{3}+x^2e^{-t}+2e^{-t}+2t.$$

注记. 并不是一定要用冲量原理消除方程的非齐次项，如果能直接找到泛定方程的满足要求（一般是边界条件的要求）的特解是最好的。例如

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+t\sin x, 0<x<\pi, t>0 \\ u(t,0)=0, u(t,\pi)=0 \\ u(0,x)=0, u_t(0,x)=0 \end{cases}$$

我们可以取泛定方程的特解 $v=t\sin x$，然后令 $\tilde{u}=u-v$，得到

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}=\tilde{u}_{xx}, 0<x<\pi, t>0 \\ \tilde{u}(t,0)=0, \tilde{u}(t,\pi)=0 \\ \tilde{u}(0,x)=0, \tilde{u}_t(0,x)=-\sin x \end{cases}$$

在下一章后半段将详细讲述。

在本章的最后，我们简要介绍下特征线法。特阵线法主要求一阶偏微分方程和波动方程的通解。我们从例子出发

例子14. 设$u=u(x,y)$，求$u_x+e^y u_y=e^{-y}$ 的通解。

解. 特征方程为

$$\frac{1}{dx}=\frac{e^y}{dy}.$$

这是个常微分方程，解得：$x+e^{-y}=C$。令$\xi=x+e^{-y}$，$\eta=x$，得到

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=u_\xi+u+\eta$$

$$u_y=-e^{-y}u_\xi.$$

带入原方程，得到$u_\eta=\xi-\eta$。从而

$$\begin{aligned}u(\xi,\eta)&=u(\xi,0)+\int_0^\eta u_\eta(\xi,s)ds=u(\xi,0)+\int_0^\eta \xi-sds\\&=f(\xi)+\xi\eta-\frac{\eta^2}{2}.\end{aligned}$$

从而

$$u=f(x+e^{-y})+xe^{-y}+\frac{x^2}{2}.$$

方法总结：设$u=u(x_1,\cdots,x_k)$，则$\sum a_i u_{x_i}=f$ 的特征方程为

$$\frac{a_1}{dx_1}=\frac{a_2}{dx_2}=\cdots.$$

解之，做相应的变量替换，不足的补上(要求Jacobi行列式不为零)，带入原方程，化解并求解。

二阶情形：

例子15. 设$u=u(x,y)$，求$u_{xx}+3u_{xy}+2u_{yy}=x$ 的通解。

解. 特征方程为

$$\frac{1}{(dx)^2}-\frac{3}{dxdy}+\frac{2}{(dy)^2}=0.$$

即

$$(\frac{1}{dx}-\frac{1}{dy})(\frac{1}{dx}-\frac{2}{dy})=0.$$

$\frac{1}{dx}-\frac{1}{dy}=0$ 或者$\frac{1}{dx}-\frac{2}{dy}=0$。分别解得

$$x-y=C,\quad 2x-y=\tilde{C}.$$

设$\xi=x-y$ 和$\eta=2x-y$，则

$$u_x=u_\xi+2u_\eta,u_{xx}=u_{\xi\xi}+4u_{\xi\eta}+4u_{\eta\eta},u_{xy}=-u_{\xi\xi}-3u_{\xi\eta}-2u_{\eta\eta},$$

$$u_y=-u_\xi-u_\eta,u_{yy}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}.$$

带入原方程，得到$u_{\xi\eta}=\xi-\eta$，解得$u_\xi=\xi\eta-\frac{\eta^2}{2}+f(\xi)$，得到

$$u=\frac{\xi^2\eta}{2}-\frac{\xi\eta^2}{2}+f(\xi)+g(\eta).$$

从而

$$u=\frac{3x^2y-2x^3-xy^2}{2}+f(x-y)+g(2x-y).$$

例子16. 设$u=u(x,y)$，求$u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}=0$ 的通解。

解. 特征方程为

$$\frac{1}{(dx)^2}-\frac{2}{dxdy}+\frac{1}{(dy)^2}=0.$$

即

$$(\frac{1}{dx}-\frac{1}{dy})^2=0.$$

$\frac{1}{dx}-\frac{1}{dy}=0$ 解得

$$x-y=C.$$

设$\xi=x-y$ 和$\eta=x$，则

$$u_x=u_\xi+u_\eta, u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}, u_{xy}=-u_{\xi\xi}-u_{\xi\eta},$$

$$u_y=-u_\xi, u_{yy}=u_{\xi\xi}.$$

带入原方程，得到$u_{\eta\eta}=0$，解得$u_\eta=f(\xi)$，得到

$$u=\eta f(\xi)+g(\xi).$$

从而

$$u=xf(x-y)+g(x-y).$$

欧拉方程的解法:

形如 $x^n y^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}xy'+p_ny=f(x)$ 的方程.

令$x=e^t$. $\cancel{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}}$ 把欧拉方程化为常系数线性微分方程.

再将自变量 x 换成 t.

对于二阶欧拉方程 $ax^2y''+bxy'+cy=f(x)$. 经变量代换可化为二阶常系数线性微分方程 $a\frac{d^2y}{dt^2}+(b-a)\frac{dy}{dt}+cy=f(e^t)$

eg: 欧拉方程 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}+2y=0$ $(x>0)$ 的通解是 ____.

令$x=e^t$. $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$

$(t=\ln x)$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt})}{dx}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\cdot\frac{d(\frac{dy}{dt})}{dx}\to\frac{d(\frac{dy}{dt})}{dt}\frac{dt}{dx}$$

$$=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{1}{x^2}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})$$

$\therefore\Rightarrow$ $\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=0$. (亦可利用待定系数求) 直接记结论 不用推

特征方程: $r^2+3r+2=(r+2)(r+1)=0$ $r_1=-1$ $r_2=-2$

$\therefore y=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$ 代入$x=e^t$

$\Rightarrow y=\frac{1}{x}C_1+\frac{1}{x^2}C_2.$

1 分离变量法

在上一章中，我们已经清楚了解如何将非齐次定解问题化为齐次定解问题，在这一章及下一章中我们将使用分离变量法处理齐次定解问题。分离变量一般适用范围：方程齐次，边界条件齐次。

即边界不能为 $-\infty < x < +\infty$

1.1 分离变量

1.1.1 弦振动方程分离变量

我们首先看弦振动方程的分离变量法。我们以两端固定的例子（即书上的例子）为例：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,x) = \varphi(x), u_t(0,x) = \psi(x) \\ u(t,0) = 0, u(t,l) = 0 \end{cases}$$

解. 求出所有形如$T(t)X(x)$ 的非零解，做线性叠加，求出线性叠加的系数。首先分离变量，我们假设

$$u(t,x) = T(t)X(x).$$

带入泛定方程可得

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X}.$$

上式左边为t的函数，右边为x的函数，因而肯定为常值，设为$-\lambda$，从而我们得到以下固有值问题：

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, 0 < x < l \\ X(0) = 0, X(l) = 0. \end{cases}$$

判断是否有零固有值.
对于含u的还是判断一下，
对于不含u,含x,y的
用S-L理论

(由边界条件$T(t)X(0) = 0$，从而仅当$X(0) = 0$ 的时候有非零解。）以及

$$T''(t) + \lambda a^2 T = 0.$$

~~$\lambda \geq 0$~~

~~$k(x)=1$~~

~~$k(0)>0$~~ ~~为三类边界条件~~

~~$k(l)>0$~~

~~由S-L理论 不存在零固有值~~

~~只需讨论$\lambda>0$即可~~

分情况讨论： $X'' + \lambda X = 0$

(1) $\lambda < 0$时，不妨设$\lambda = -k^2, (k > 0)$，则

$$X'' - k^2 X = 0.$$

$X = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}$。带入边界条件

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{kl} + C_2 e^{-kl} = 0. \end{cases}$$

二阶矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{kl} & e^{-kl} \end{pmatrix}.$$

的行列式$= e^{-kl} - e^{kl} \neq 0$。因而方程组只有零解，即$C_1 = C_2 = 0$。这种情况舍去。

(2) $\lambda=0$时，$X=C_1x+C_2$。带入边界条件

$$\begin{cases} C_2=0, \\ C_1l+C_2=0. \end{cases}$$

解之，$C_1=C_2=0$。这种情况舍去。

(3) $\lambda>0$时，$X=C_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+C_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$。带入边界条件

$$\begin{cases} C_1=0, \\ C_1\cos(\sqrt{\lambda}l)+C_2\sin(\sqrt{\lambda}l)=0. \end{cases}$$

解之，得到$C_1=0$ 以及当

$$\sqrt{\lambda}l=n\pi, n=1,2,3\cdots$$

时，有非零解。我们不妨将所有使得固有值问题有非零解的λ 的取值称为固有值，对应的函数称为固有函数。例如

$$\text{固有值:}\ \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \text{对应固有函数:}\ X_n=\sin(\frac{n\pi x}{l}), n=1,2,3\cdots.$$

固定λ_n，则可以得到对应T_n的常微分方程：

$$T_n''=-\lambda_n a^2T_n=-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T_n.$$

解得

$$T_n(t)=A_n\cos(\frac{n\pi at}{l})+B_n\sin(\frac{n\pi at}{l}), n=1,2\cdots.$$

整理得原定解问题的解为

$$\boxed{u(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos(\frac{n\pi at}{l})+B_n\sin(\frac{n\pi at}{l})\right)\sin(\frac{n\pi x}{l}).}$$

X_n

$u(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\varphi$

$u_t(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cdot\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$

最后一步，对初始条件做傅里叶展开，通过系数对应确定A_n和B_n的取值。对$\varphi(x)$ 做傅里叶展开

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nX_n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

~~A_n~~

其中

$$c_n=\frac{\langle\varphi,X_n\rangle}{\langle X_n,X_n\rangle}=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(s)\sin(\frac{n\pi s}{l})ds.$$

这里$\langle f,g\rangle=\int_0^l f(s)g(s)ds$。同理对$\psi(x)$ 做傅里叶展开

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}d_nX_n=\sum_{n=1}^{\infty}d_n\sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

$\langle X_n,X_n\rangle$

$=\int_0^l\sin^2\frac{n\pi x}{l}dx$

$=\frac{l}{2}$

其中

$$d_n=\frac{\langle\psi,X_n\rangle}{\langle X_n,X_n\rangle}=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(s)\sin(\frac{n\pi s}{l})ds.$$

令$t=0$并对照，我们可以得到：

$$\begin{cases} A_n = c_n \\ \frac{n\pi a}{l} B_n = d_n. \end{cases}$$

解之，

$$\begin{cases} A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin(\frac{n\pi s}{l})ds \\ B_n = \frac{l}{n\pi a}\frac{2}{l}\int_0^l \psi(s)\sin(\frac{n\pi s}{l})ds. \end{cases}$$

定解问题的解为

$$u(t,x) = \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin(\frac{n\pi s}{l})ds\cos(\frac{n\pi a t}{l}) \\ \quad +\frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(s)\sin(\frac{n\pi s}{l})ds\sin(\frac{n\pi a t}{l})\Big)\sin(\frac{n\pi x}{l}). \end{array}$$

在解中，我们称$\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$为固有频率，与初始条件的选取无关。称$\omega_1 = \frac{\pi a}{l}$为基频，其余为倍频。回忆$a=\sqrt{T/\rho}$，我们有

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l}\sqrt{T/\rho}.$$

基频

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{T/\rho}.$$

可以看出：想要让频率变高，我们需要降低密度，降低弦长，增大张力；反之如果想要让频率变低，我们需要增加密度，增加弦长，降低张力。一般来说，基频越高声音越尖锐，反之越低沉。

”大提琴声音低沉小提琴响亮这是跟琴弦的震动频率和琴箱相联系的 弦越细震动频率越大，声音就越高，你没发现小提琴的弦比大提琴的细很多吗，另外琴箱大的声音也会低沉一些。“

”随这年龄的增长人的声带会变粗，说话时声带的振幅会随着年龄的增长而减小，从而使声音变粗。声带长厚了，所以发音就浑浊了。就像琴弦，越细的声音越清脆，越粗的越低沉浑厚。“

”男女说话的声音音调不一样，就是由于男人与女人声带的长短粗细有差别。“

我们还是用上一章的例子：

例子1. 一根长为l的理想弦，一端固定$x=0$处，另一端$x=l$在竖直方向自由运动，无外力作用，初始位置为$\varphi(x)$，初始速度$\psi(x)$。写出定解问题并求解。

$f=0$

解. 定解问题为：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0<x<l, t>0 \\ u(0,x)=\varphi(x), u_t(0,x)=\psi(x) \\ u(t,0)=0, u_x(t,l)=0 \end{cases}$$

方程齐次，
边界条件齐次

首先分离变量，我们假设

$$u(t,x) = T(t)X(x).$$

带入泛定方程可得

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}.$$

上式左边为t的函数，右边为x的函数，因而肯定为常值，设为$-\lambda$。从而我们得到以下固有值问题：

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, 0<x<l \\ X(0)=0, X'(l)=0. \end{cases}$$

$\because k(x)=1.$ I类 ···

由 S-L，不存在零固有值

$\therefore \lambda > 0.$

($\lambda<0$不讨论)

以及

$$T''(t)+\lambda a^2T=0.$$

分情况讨论：

(1) $\lambda<0$时，$X=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$。带入边界条件得到$C_1=C_2=0$。舍去。

(2) $\lambda=0$时，$X=C_1x+C_2$。带入边界条件得到$C_1=C_2=0$。舍去。

(3) $\lambda>0$时，$X=C_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+C_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$。带入边界条件带入边界条件

$$\begin{cases} C_1=0, \\ -C_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}l)+C_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}l)=0. \end{cases}$$

得到$C_1=0$ 以及

$$\sqrt{\lambda}l=n\pi-\frac{\pi}{2},n=1,2,3\cdots.$$

固有值和固有函数为：

$$\text{固有值:}\lambda_n=\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^2\text{对应固有函数:}X_n=\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}).$$

固定λ_n，则可以得到对应T_n的常微分方程：

$$T_n''=-\lambda_na^2T_n=-\left(\frac{(2n-1)\pi a}{2l}\right)^2T_n.$$

解得

$$T_n(t)=A_n\cos(\frac{(2n-1)\pi at}{2l})+B_n\sin(\frac{(2n-1)\pi at}{2l}),n=0,1,2\cdots.$$

整理得原定解问题的解为

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(\frac{(2n-1)\pi at}{2l})+B_n\sin(\frac{(2n-1)\pi at}{2l})\right)\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}).$$

最后一步，确定A_n和B_n的取值。对$\varphi(x)$做展开

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nX_n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}).$$

其中

$$c_n=\frac{\langle\varphi,X_n\rangle}{\langle X_n,X_n\rangle}=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(s)\sin(\frac{(2n-1)\pi s}{2l})ds.$$

同理对$\psi(x)$做展开

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}d_nX_n=\sum_{n=1}^{\infty}d_n\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}).$$

其中

$$d_n=\frac{\langle\psi,X_n\rangle}{\langle X_n,X_n\rangle}=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(s)\sin(\frac{(2n-1)\pi s}{2l})ds.$$

令$t=0$并对照，我们可以得到：

$$\begin{cases} A_n = c_n \\ B_n = \frac{2l}{(2n+1)\pi a} d_n. \end{cases}$$

定解问题的解为

$$\tilde{u}(t,x) = \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin(\frac{(2n-1)\pi s}{2l}) ds \cos(\frac{(2n-1)\pi a t}{2l}) \right. \\ \left. + \frac{4}{(2n-1)\pi a} \int_0^l \psi(s) \sin(\frac{(2n-1)\pi s}{2l}) ds \sin(\frac{(2n-1)\pi a t}{2l}) \right) \sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}). \end{array}$$

1.1.2 热方程的分离变量

在这一节中，我们讨论一维热方程的分离变量。

例子2. 一根长为l的由理想介质组成的细杆(两端点分别为$0,l$)，全身绝热，内部无热源，初始温度为x。写出定解问题并求解。

解. 定解问题为：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, 0<x<l, t>0 \\ u(0,x) = x, \\ u_x(t,0) = 0, u_x(t,l) = 0 \end{cases}$$

首先分离变量，我们假设

$$u(t,x) = T(t)X(x).$$

$T'X = a^2 T X''$

带入泛定方程可得

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X}.$$

上式左边为t的函数，右边为x的函数，因而肯定为常值，设为$-\lambda$。从而我们得到X的常微分方程和边界条件：

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, 0<x<l \\ X'(0) = 0, X'(l) = 0. \end{cases}$$

$T' + \lambda a^2 T = 0 \longrightarrow T_0 = A_0$

分情况讨论：

(1) $\lambda < 0$时，$X = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$。带入边界条件得到$C_1 = C_2 = 0$。舍去。

(2) $\lambda = 0$时，$X = C_1 x + C_2$。带入边界条件得到$C_1 = 0$，C_2可以不等于0。固有值$\lambda_0 = 0$，对应固有函数$X_0 = 1$，$T_0 = A_0$。

(3) $\lambda > 0$时，记$X = C_1\cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$。带入边界条件得到$C_2 = 0$ 以及

$$\sqrt{\lambda} l = n\pi, n = 1,2,3\cdots.$$

$$\text{固有值}:\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \text{对应固有函数}:X_n = \cos(\frac{n\pi x}{l}).$$

固定λ_n，则可以得到对应T_n的常微分方程：

$$T_n' = -\lambda_n a^2 T_n.$$

解得

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2}t}, n = 1,2\cdots.$$

整理得原定解问题的解为

$$u(t,x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}\cos(\frac{n\pi x}{l}).$$

最后一步，确定A_n的取值。对初始条件做展开

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(\frac{n\pi x}{l}).$$

其中

$$c_n = \frac{\langle x, X_n\rangle}{\langle X_n, X_n\rangle} = \frac{2}{l}\int_0^l s\cos(\frac{n\pi s}{l})ds = \frac{2l((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}, \quad n = 1,2,3,\cdots,$$

单独算！

$$c_0 = \frac{\langle x, X_0\rangle}{\langle X_0, X_0\rangle} = \frac{l}{2} \qquad X_0 = 1$$

令$t=0$并对照，我们可以得到：

$$A_n = c_n, n = 0,1,2\cdots.$$

定解问题的解为

$$u(t,x) = \frac{l}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l((-1)^n-1)}{n^2\pi^2} e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}\cos(\frac{n\pi x}{l}).$$

注意到当n为偶数时，对应项为0，从而

$$u(t,x) = \frac{l}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4l}{(2n+1)^2\pi^2} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{l^2}t}\cos(\frac{(2n+1)\pi x}{l}).$$

1.1.3 泊松方程的分离变量

例子3. 有一块$[0,1]\times[0,1]$的正方形金属片，内部无热源，表面绝热且处于热平衡状态，已知$x=0, y=0, y=1$温度分别为$0, \varphi(x), \psi(x)$。$x=1$与温度为0的介质接触，热交换系数和热传导系数为1。试用分离变量法求出它内部的温度分布。

右

$h(T_{x=1} - u(1,y)) = k u_x(1,y)$

$\downarrow 1 \quad \downarrow 0 \qquad \downarrow 1$

$\therefore u(1,y) + u_x(1,y) = 0$

解. 写出定解问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, 0 < x, y < 1 \\ u(0,y) = 0, u(1,y) + u_x(1,y) = 0 \\ u(x,0) = \varphi, u(x,1) = \psi \end{cases}$$

$+ \quad (- \qquad -) \quad +$

分离变量，假设

$$u(x,y) = X(x)Y(y).$$

带入泛定方程可得

$$-\frac{Y''}{Y} = \frac{X''}{X}.$$

上式肯定为常值，设为$-\lambda$。从而我们得到X的固有值问题：

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, 0 < x < 1 \\ X(0) = 0, X'(1) + X(1) = 0. \end{cases}$$

以及

$$Y'' - \lambda Y = 0.$$

分情况讨论：

(1) $\lambda < 0$时，$X = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$。带入边界条件得到$C_1 = C_2 = 0$。舍去。

(2) $\lambda = 0$时，$X = C_1 x + C_2$。带入边界条件得到$C_1 = C_2 = 0$，舍去。

(3) $\lambda > 0$时，记$X = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$。带入边界条件$x = 0$得到$C_1 = 0$ 以及

$$\sin(\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

如果假设$k = \sqrt{\lambda}$，则我们需要求出

$$k = -\tan(k)$$

的所有正根$k_n, n \geq 1$，这活就交给计算机了。假设我们已经知道了k_n，则对应固有值$\lambda_n = k_n^2$，固有函数$X_n = \sin(k_n x)$，带入Y 的常微分方程，得

$$Y_n'' - k_n^2 Y_n = 0.$$

解得

$$Y_n = A_n e^{k_n y} + B_n e^{-k_n y}.$$

从而定解问题的解为

$$u(x, y) = \sum_{n \geq 1} (A_n e^{k_n y} + B_n e^{-k_n y}) \sin(k_n x).$$

为了对φ 和ψ 做傅里叶展开，我们计算

$$\begin{aligned}
\langle X_n, X_n \rangle &= \int_0^1 \sin^2(k_n s) ds = \int_0^1 \frac{1 - \cos(2k_n s)}{2} ds \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\sin(2k_n s)}{4k_n}\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\sin(2k_n)}{4k_n} = \frac{1}{2} - \frac{2\tan(k_n)}{4k_n(1 + \tan^2(k_n))} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2k_n}{4k_n(1 + k_n^2)} = \frac{2 + k_n^2}{2(1 + k_n^2)}.
\end{aligned}$$

从而

$$\varphi = \sum_{n \geq 1} \frac{2(1 + k_n^2)}{2 + k_n^2} \int_0^1 \varphi(s) \sin(k_n s) ds \sin(k_n x).$$

$$\psi = \sum_{n \geq 1} \frac{2(1 + k_n^2)}{2 + k_n^2} \int_0^1 \psi(s) \sin(k_n s) ds \sin(k_n x).$$

对照得

$$\begin{cases}
A_n + B_n = \frac{2(1+k_n^2)}{2+k_n^2} \int_0^1 \varphi(s) \sin(k_n s) ds \\
A_n e^{k_n} + B_n e^{-k_n} = \frac{2(1+k_n^2)}{2+k_n^2} \int_0^1 \psi(s) \sin(k_n s) ds.
\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A_n = \frac{2(1+k_n^2)}{(2+k_n^2)(e^{-k_n}-e^{k_n})}\left(e^{-k_n}\int_0^1\varphi(s)\sin(k_ns)ds - \int_0^1\psi(s)\sin(k_ns)ds\right) \\ B_n = \frac{2(1+k_n^2)}{(2+k_n^2)(e^{k_n}-e^{-k_n})}\left(e^{k_n}\int_0^1\varphi(s)\sin(k_ns)ds - \int_0^1\psi(s)\sin(k_ns)ds\right). \end{cases}$$

最后结果就不写了，太长了。所有这些都可以交给计算机处理。

☆☆☆ 例子4 (平面极坐标分离变量). 有个理想金属圆盘，厚度忽略不计，半径为R，没有热源，圆周上的温度为$\varphi=\varphi(\theta)$，上下面绝热。已知金属圆盘处于热平衡，求内部温度分布。

☆ 解. 平面拉普拉斯算子在极坐标$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 下可以表示为

$$\Delta_2=\frac{\partial}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta^2}$$

我们首先写出定解问题，既然是圆盘，我们用极坐标$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$

$$\begin{cases} \Delta_2 u=\frac{\partial u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta^2}=0, 0<r<R, 0<\theta<2\pi \\ u(R,\theta)=\varphi(\theta), \theta\in[0,2\pi) \end{cases}$$

分离变量，设$u=R\Theta, R=R(r), \Theta=\Theta(\theta)$，则有

$$R''\theta+\frac{1}{r}R'\theta+\frac{1}{r^2}R\theta''=0$$

$$-\frac{r^2R''+rR'}{R}=\frac{\Theta''}{\Theta}. =-\lambda$$

设$\frac{\Theta''}{\Theta}=-\lambda$，得到固有值问题

$$\begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0, 0<\theta<2\pi \\ \Theta(0)=\Theta(2\pi), \Theta'(0)=\Theta'(2\pi). \end{cases}$$

① $\lambda<0, \lambda=-k^2, k>0$

$\theta''-k^2\theta=0$

$\theta=C_1e^{k\theta}+C_2e^{-k\theta} \cdots C_1=C_2=0$

(舍去)

解得固有值及对应固有函数：$\lambda_0=0, \Theta_0=1$，$\lambda_n=n^2, \Theta_{n,1}=\cos(n\theta), \Theta_{n,2}=\sin(n\theta), n=1,2,3\cdots$. 解方程

② $\lambda=0$，$\theta_0=1$

$$r^2R''+rR'-n^2R=0,$$

③ $\lambda>0$，$\lambda=k^2, k>0 \Rightarrow \Theta=C_1\cos k\theta+C_2\sin k\theta$

这种类型的常微分方程叫欧拉方程，有固定的解法，做变量替换$r=e^t$，得(这里的导数是对t求导)

P16

$$\frac{d^2R}{dt^2}-n^2R=0.$$

$\therefore \Theta=\sqrt{C_1^2+C_2^2}\sin(k\theta+\psi)$

由边界条件，k为正整数

固有值$\lambda_k=k^2$，$\theta_k=\begin{cases}\cos k\theta \\ \sin k\theta\end{cases}$ 两个

解之，得

$$R_0=C_{0,1}t+C_{0,2}=C_{0,1}\ln r+C_{0,2}, R_n=C_{n,1}e^{nt}+C_{n,2}e^{-nt}=C_{n,1}r^n+C_{n,2}r^{-n}, n=1,2,3\cdots.$$

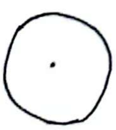
$$\Rightarrow u=A_0+B_0\ln r+\sum_{k=1}^{+\infty}(A_kr^k\cos k\theta+B_kr^k\sin k\theta+C_kr^{-k}\cos k\theta+D_kr^{-k}\sin k\theta)$$

注意到$|R(0)|<\infty$得

$\because$圆盘是实心的

$$R_0=C_0, R_n=C_nr^n, n=1,2,3\cdots.$$

$\Rightarrow \begin{cases} B_0=0 \\ C_k=0 \\ D_k=0 \end{cases}$



从而

$\therefore$进一步化简 $u=A_0+\sum_{k=1}^{+\infty}(A_kr^k\cos k\theta+B_kr^k\sin k\theta)$

$$u=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(n\theta)+B_n\sin(n\theta))r^n.$$

$\because u(R,\theta)=\varphi(\theta)$

按固有函数展开.

我们求出系数

$$C_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)ds$$

$\langle f,g\rangle=\int_0^{2\pi}fg\,d\theta$

$$=\frac{\langle\varphi,1\rangle}{\langle1,1\rangle}\cdot1+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\langle\varphi,\cos k\theta\rangle}{\langle\cos k\theta,\cos k\theta\rangle}\cos k\theta+\frac{\langle\varphi,\sin k\theta\rangle}{\langle\sin k\theta,\sin k\theta\rangle}\sin k\theta\right)$$

对照得 $A_0=\frac{\langle\varphi,1\rangle}{\langle1,1\rangle}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\,d\theta$

$A_kR^k=\frac{\langle\varphi,\cos k\theta\rangle}{\langle\cos k\theta,\cos k\theta\rangle}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\cos k\theta\,d\theta \Rightarrow A_k=\frac{1}{\pi\cdot R^k}\int_0^{2\pi}\varphi\cos k\theta\,d\theta$

$B_k=\frac{1}{\pi\cdot R^k}\int_0^{2\pi}\varphi\sin k\theta\,d\theta$

代入得 $u=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi d\theta+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{r^k}{\pi R^k}\left(\int_0^{2\pi}\varphi(s)\cos ks\,ds\underbrace{}_{\cos k\theta}+\int_0^{2\pi}\varphi(s)\sin ks\,ds\underbrace{}_{\sin k\theta}\right)$

$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi d\theta+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{\pi R^k}\left(\int_0^{2\pi}\varphi(s)(\cos ks\cos k\theta+\sin ks\sin k\theta)ds\right)$

 $=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi d\theta+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{r^k}{R^k}\cos(k(s-\theta))}d\theta$

$$A_n=\frac{1}{R^n\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)\cos(ns)ds$$

$$B_n=\frac{1}{R^n\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)\sin(ns)ds.$$

从而

$$\begin{aligned}u&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)ds+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r^n}{R^n\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)\cos(ns)ds\cos(n\theta)+\frac{r^n}{R^n\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)\sin(ns)ds\sin(n\theta)\right)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}\cos(n(s-\theta))\right)ds\end{aligned}$$

我们求和式$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}\cos(n(s-\theta))$，其为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}e^{n(s-\theta)i}=\frac{r/Re^{(s-\theta)i}}{1-r/Re^{(s-\theta)i}}=\frac{r/Re^{(s-\theta)i}(1-r/Re^{(\theta-s)i})}{(1-r/Re^{(s-\theta)i})(1-r/Re^{(\theta-s)i})}=\frac{r/Re^{(s-\theta)i}-(r/R)^2}{1-2r/R\cos(\theta-s)+(r/R)^2}$$

的实部。即

$$\frac{r/R\cos(s-\theta)-(r/R)^2}{1-2r/R\cos(\theta-s)+(r/R)^2}=\frac{rR\cos(s-\theta)-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-s)+r^2}.$$

从而

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)\left(1+2\frac{rR\cos(s-\theta)-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-s)+r^2}\right)ds=\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-s)+r^2}ds.}$$

余弦定理

上诉公式称为泊松公式。

例子5 (多自变量分离变量). 有一块$[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$的长方体金属块，内部无热源且处于热平衡状态，已知有一面温度为1，其余均为0。试用分离变量法求出它内部的温度分布。

解. 首先写出定解问题

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0,0<x,y,z<1\\u(1,y,z)=1,u(0,y,z)=u(x,0,z)=u(x,1,z)=u(x,y,0)=u(x,y,1)=0.\end{cases}$$

分离变量$u=XYZ$，其中$X=X(x),Y=Y(y),Z=Z(z)$。则有

$$-\frac{XY''+YX''}{XY}=\frac{Z''}{Z}.$$

不妨设$\frac{Z''}{Z}=-\lambda$，则有固有值问题

$$\begin{cases}Z''+\lambda Z=0,0<z<l\\Z(0)=Z(1)=0.\end{cases}$$

计算得，固有值及固有函数为

$$\lambda_n=n^2\pi^2,Z_n=\sin(n\pi z),n=1,2,3\cdots.$$

即 $\varphi=\frac{\langle\varphi,\theta_0\rangle}{\langle\theta_0,\theta_0\rangle}\cdot\theta_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\langle\varphi,\cos k\theta\rangle}{\langle\cos k\theta,\cos k\theta\rangle}\cos k\theta+\frac{\langle\varphi,\sin k\theta\rangle}{\langle\sin k\theta,\sin k\theta\rangle}\cdot\sin k\theta\right).$

固定λ_n，我们有

$$-\frac{X''-n^2\pi^2X}{X}=\frac{Y''}{Y}.$$

不妨设$\frac{Y''}{Y}=-\mu$，则有固有值问题

$$\begin{cases} Y''+\mu Y=0, 0<z<l \\ Y(0)=Y(1)=0. \end{cases}$$

计算得，固有值及固有函数为

$$\mu_m=m^2\pi^2, Y_m=\sin(m\pi y), m=1,2,3\cdots.$$

解微分方程$X''_{m,n}-(n^2\pi^2+m^2\pi^2)X_{m,n}=0$，得到$X_{m,n}=A_{m,n}e^{\sqrt{n^2+m^2}\pi x}+B_{m,n}e^{-\sqrt{n^2+m^2}\pi x}$。即

$$u=\sum_{n,m\geq 1}\left(A_{m,n}e^{\sqrt{n^2+m^2}\pi x}+B_{m,n}e^{-\sqrt{n^2+m^2}\pi x}\right)\sin(m\pi y)\sin(n\pi z).$$

分别令$x=0,1$得

$$\begin{cases} A_{m,n}+B_{m,n}=0 \\ A_{m,n}e^{\sqrt{n^2+m^2}\pi}+B_{m,n}e^{-\sqrt{n^2+m^2}\pi}=\frac{\langle 1,Y_mZ_n\rangle}{\langle Y_mZ_n,Y_mZ_n\rangle}. \end{cases}$$

注意到当m,n之一为偶数的时候，$\langle 1,Y_mZ_n\rangle=0$，此时我们取$B_{m,n}=0$。当$m,n$都是奇数时，则有

$$B_{m,n}=\frac{16}{mn\pi^2(e^{\sqrt{n^2+m^2}\pi}-e^{-\sqrt{n^2+m^2}\pi})}.$$

从而

$$u(x,y,z)=-\sum_{m,n\geq 1,m,n\text{为奇数}}\frac{16(e^{\sqrt{n^2+m^2}\pi x}-e^{-\sqrt{n^2+m^2}\pi x})}{mn\pi^2(e^{\sqrt{n^2+m^2}\pi}-e^{-\sqrt{n^2+m^2}\pi})}\sin(m\pi y)\sin(n\pi z)$$

思考. 有一块$[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ 的长方体金属块，无内部热源，热平衡，六个面满足边界条件(*I,II,III*类)，写出定解问题并用叠加原理和冲量原理将其分解为若干分离变量问题，不用求解。

1.2 固有值问题

1.2.1 一般分离变量

我们对一般齐次定解问题做分离变量并给出解题流程。

$$\begin{cases} \mathcal{L}_tu+\mathcal{L}_xu=0, t>0, a<x<b. \\ \text{边界条件} \\ \text{关于t的定解条件，一般是初始条件.} \end{cases}$$

其中

$$\mathcal{L}_t=a_0(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}+a_1(t)\frac{\partial}{\partial t}+a_2(t)$$
$$\mathcal{L}_x=b_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b_1(x)\frac{\partial}{\partial t}+b_2(x).$$

分离变量$u(t,x)=T(t)X(x)$，得到

$$-\frac{\mathcal{L}_tT}{T}=\frac{\mathcal{L}_xX}{X}.$$

设$\frac{\mathcal{L}_xX}{X}=-\lambda$，我们有固有值问题

$$\begin{cases}\mathcal{L}_xX+\lambda X=0, a<x<b\\ \text{边界条件}\end{cases}$$

解出固有值λ_n、对应固有函数X_n、对应T_n，得到

$$u=\sum C_nX_nT_n.$$

带入定解条件求出u。

1.2.2 固有值问题的SL理论

本节我们考察Sturm-Liouville(SL)型固有值问题： 标准形式:

$$\begin{cases}[k(x)X']'-q(x)X+\lambda\rho(x)X=0, a<x<b\\ \text{边界条件}\end{cases}$$

$kX''+k'X'-qX+\lambda\rho X=0$

$b_0X''+b_1X'+b_2X+\lambda X=0$

对照得: $(\ln k)'=\frac{k'}{k}=\frac{b_1}{b_0}\Rightarrow k=e^{\int\frac{b_1}{b_0}dx}$

$\frac{-q}{k}=\frac{b_2}{b_0}\Rightarrow q=-\frac{b_2}{b_0}k$

$\frac{\lambda}{b_0}=\frac{\lambda\rho}{k}\Rightarrow \rho=\frac{k}{b_0}$

其中边界条件取法

- I类. 要求$k(a)>0$ 同理b 点；
- II类. 要求$k(a)>0$ 同理b 点；
- III类. 要求$k(a)>0$ 同理b 点；$\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}=0,\alpha,\beta>0$，$a$:$\alpha u(a)-\beta u_x(a)=0$；$b$: $\alpha u(b)+\beta u_x(b)=0$；
- 自然边界条件. 要求$k(a)=0$ 同理b 点，最多一阶零点；可以取$|X(a)|<\infty$；
- 周期边界条件. $k(a)=k(b)>0$ 时，可以取到周期边界条件$X(a)=X(b),X'(a)=X'(b)$，与上面类型不同，周期边界条件必须两个端点同时取。

对于上节提到的固有值问题

$$\begin{cases}b_0(x)X''+b_1(x)X'+b_2(x)X+\lambda X=0, a\le x\le b\\ \text{边界条件}\end{cases}$$

我们总能化为SL型固有值问题，此时

$$\boxed{k(x)=\exp\left(\int_0^x\frac{b_1(s)}{b_0(s)}ds\right)},\boxed{q(x)=-\frac{b_2(x)}{b_0(x)}k(x)},\boxed{\rho(x)=\frac{k(x)}{b_0(x)}}.$$

回到SL固有值问题，我们约定(实际固有值问题并不一定满足)

(1) $k(x),q(x),\rho(x)$为$[a,b]$上连续函数；

(2) 限制在(a,b)上，$k(x)>0,\rho(x)>0$ $q(x)\ge 0$，端点为至多为$k(x),\rho(x)$ 的一级零点；

莫忘

(3) 内积$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$。

定理. 基于以上假设，固有值和固有函数满足

(常用) (1) 非负性，所有固有值都是非负实数；存在零固有值的充要条件是$q(x)=0$且两端为非I,III类边界条件，记为$\lambda_0=0$（周期边界条件；两边为自然边界条件或II类边界条件），对应固有函数为$X_0=1$；

$\lambda\geqslant 0$

(2) 可数性，仅有可数个固有值且有如下形式：

$$(0=\lambda_0<\text{如果存在的话})\lambda_1<\lambda_2<\cdots.$$

如果不是周期边界条件，则每个固有值λ_n仅对应一个固有函数X_n(无视非零常数倍)；

(3) 正交性，如果$n\neq m$，则$\langle X_n,X_m\rangle=\int_a^b X_n(x)X_m(x)\rho(x)dx=0$;

(4) 完备性，在约定内积下，所有固有函数构成$\mathcal{L}_\rho([a,b])$（所有满足边界条件的函数全体，其实不满足边界条件一般也是可以的）的一组完备正交积，可以如同Fourier 展开一样操作

$$f(x)=\sum_n\frac{\langle f,X_n\rangle}{\langle X_n,X_n\rangle}X_n(x)=\sum_n\frac{\int_a^b f(s)X_n(s)\rho(s)ds}{\int_a^b X_n(s)X_n(s)\rho(s)ds}X_n(x).$$

我们注意到书上有更细致的描述，在此我们忽略证明。

只有可以分解了，才能对照系数.

证明(非负性证明). 设λ 为固有值，对应固有函数为X。对

$$[k(x)X']'-q(x)X+\lambda\rho(x)X=0$$

乘上X 并从a 到b 积分，得到

$$\int_a^b X[k(x)X']'-q(x)XX+\lambda\rho(x)XXd(x)=0.$$

注意到

$$[k(x)X'X]'=X[k(x)X']'+k(x)X'^2.$$

我们有

$$\int_a^b[k(x)X'X]'-k(x)X'^2-q(x)XX+\lambda\rho(x)XXd(x)=0.$$

即：

$$\begin{aligned}\lambda\int_a^b\rho(x)XXd(x)&=\int_a^b-[k(x)X'X]'+k(x)X'^2+q(x)XXd(x)\\&=k(a)X(a)X'(a)-k(b)X(b)X'(b)+\int_a^b k(x)X'^2+q(x)X^2d(x).\end{aligned}$$

因为$k,q\geq 0$，我们仅需说明

$$k(a)X(a)X'(a)-k(b)X(b)X'(b)\geq 0.$$

为此需要按找边界条件的取法分类讨论。当取周期边界条件，$k(a)=k(b)$，$X(a)=X(b)$，$X'(a)=X'(b)$。显然成立。

当非周期边界条件的时候，分别说明$k(a)X(a)X'(a)\geq 0$ 和$-k(b)X(b)X'(b)\geq 0$。例如对于$x=a$ 端点：实际上，对于I 类（$X(a)=0$）；II 类（$X'(a)=0$）；自然边界条件（$k(a)=0$），显然成立。对于III 类：$\alpha X(a)-\beta X'(a)=0$，有

$$k(a)X(a)X'(a)=k(a)\frac{\alpha}{\beta}(X(a))^2\geq 0.$$

综上所述，我们完成了非负性的证明。

关于零固有值，如果零是固有值，设固有函数是X，则

$$\begin{aligned}0=\lambda\int_a^b\rho(x)XXd(x)&=\int_a^b-[k(x)X'X]'+k(x)X'^2+q(x)XXd(x)\\&=\big(k(a)X(a)X'(a)-k(b)X(b)X'(b)\big)+\Big(\int_a^b k(x)X'^2d(x)\Big)+\Big(\int_a^b q(x)X^2d(x)\Big).\end{aligned}$$

由前面讨论，上式右边三项都非负，要等式成立，则必然有

$$k(a)X(a)X'(a)-k(b)X(b)X'(b)=0;$$

$$\int_a^b k(x)X'^2d(x)=0;$$

$$\int_a^b q(x)X^2d(x)=0.$$

因为$X\neq 0$，所以$q(x)=0$。因为$k(x)|_{(a,b)}>0$，所以$X'=0$，即$X=$ 常数，固有函数取$X_0=1$。剩下的按照边界条件类型讨论，实际上，当某个端点：例如a 点取I 类边界条件时候，

$$X=X(a)=0.$$

取III 类边界条件的时候

$$0=\alpha X(a)-\beta X'(a)=\alpha X(a)$$

得到$0=X(a)=X$。这两类都没有非零固有函数，所以I,III类边界条件不可取。

反之，仅需把$\lambda=0,X=1$ 带入固有值问题验证即可。在此略过。

证明(正交性证明). 设λ_n 和λ_m 为不同固有值，对应固有函数为X_n,X_m。则

$$[k(x)X_n']'-q(x)X_n+\lambda_n\rho(x)X_n=0$$

$$[k(x)X_m']'-q(x)X_m+\lambda_m\rho(x)X_m=0$$

分别乘上X_m 和X_n 做差并从a 到b 积分得

$$(\lambda_n-\lambda_m)\int_a^b\rho X_nX_md(x)=\int_a^b[k(x)X_m']'X_n-[k(x)X_n']'X_md(x).$$

因为$\lambda_n-\lambda_m\neq 0$，仅需说明$\int_a^b[k(x)X_m']'X_n-[k(x)X_n']'X_md(x)=0$，为此注意到

$$[k(x)X_m'X_n]'=X_n[k(x)X_m']'+k(x)X_m'X_n',$$

$$[k(x)X_n'X_m]' = X_m[k(x)X_n']' + k(x)X_n'X_m'.$$

上面两式做差得

$$[k(x)X_m']'X_n - [k(x)X_n']'X_m = [k(x)X_m'X_n]' - [k(x)X_n'X_m]'.$$

即

$$\begin{aligned}
&\int_a^b [k(x)X_m']'X_n - [k(x)X_n']'X_m d(x) = \int_a^b [k(x)X_m'X_n]' - [k(x)X_n'X_m]'d(x)\\
&= (k(x)X_m'X_n - k(x)X_n'X_m)|_a^b\\
&= k(b)X_m'(b)X_n(b) - k(a)X_m'(a)X_n(a) - k(b)X_n'(b)X_m(b) + k(a)X_n'(a)X_m(a)
\end{aligned}$$

仅需说明上式= 0，依然根据边界条件类型讨论。当取周期边界条件，$k(a) = k(b)$，$X(a) = X(b)$，$X'(a) = X'(b)$。显然成立。

当非周期边界条件的时候，分别说明$k(a)X_m'(a)X_n(a)-k(a)X_n'(a)X_m(a) = 0$和$k(b)X_m'(b)X_n(b)-k(b)X_n'(b)X_m(b) = 0$。例如对于$x = a$端点：实际上，对于$I$类（$X_n(a) = X_m(a) = 0$）；$II$类（$X_n'(a) = X_m'(a) = 0$）；自然边界条件（$k(a) = 0$），显然成立。

对于III类：$\alpha X_n(a) - \beta X_n'(a) = 0$，$\alpha X_m(a) - \beta X_M'(a) = 0$，有

$$k(a)X_m'(a)X_n(a) = k(a)\frac{\alpha}{\beta}X_n(a)X_m(a).$$

同理

$$k(a)X_n'(a)X_m(a) = k(a)\frac{\alpha}{\beta}X_n(a)X_m(a).$$

也成立。

综上所述，我们完成了证明。

在这一章的一开始我们已经讲过分离变量的例子，在此我们举两个新的例子（也是下一章的内容）。 $\langle f,g\rangle = \int_0^a fgx\,dx$.

1). ν阶贝塞尔固有值问题 柱坐标系 注意内积里的$\rho(x) = x$.

$$\begin{cases} [xy']' - \frac{\nu^2}{x}y + \lambda xy = 0, 0 < x < a \\ |y(0)| < \infty, \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0. \end{cases}$$

固有值≥0，当$\nu=0$且$\alpha=0,\beta\neq0$时，有0固有值$X_0=1$

2). 勒让德固有值问题。 球坐标系.

$$\begin{cases} [(1-x^2)y']' + \lambda y = 0, -1 < x < 1 \\ |y(\pm 1)| < \infty. \end{cases}$$

存在0固有值，$\lambda_0=0$，$X_0=1$
满足自然边界条件.

1.2.3 一些固有值问题

例子6. 解固有值问题，

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, -l < x < l \\ y'(-l) = y'(l) = 0. \end{cases}$$

解. 这是标准的SL 固有值问题。边界条件均为II 类，$q=0$，因而$\lambda_0=0$，对应固有函数$y_0=1$，其余固有值均为正。解常微分方程得

$$y=A\cos(\sqrt{\lambda}x)+B\sin(\sqrt{\lambda}x),\lambda>0.$$

带入边界条件

$$\begin{cases} A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}l)+B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}l)=0 \\ -A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}l)+B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}l)=0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} A\sin(\sqrt{\lambda}l)=0 \\ B\cos(\sqrt{\lambda}l)=0 \end{cases}$$

既然$\sin(\sqrt{\lambda}l)$ 和$\cos(\sqrt{\lambda}l)$ 不可能同时为零。可以看出，要求这个方程组有非零解，则A,B 至少有一个$=0$。要求有非零解，故A,B 不全为零。

1). $A=0,B\neq 0$，$\cos(\sqrt{\lambda}l)=0$ 得到固有值和固有函数

$\sqrt{\lambda}l=(n-\frac{1}{2})\pi$

$$\lambda_{1,n}=\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{l}\right)^2,y_{1,n}=\sin(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l}),n=1,2,3,\cdots.$$

2). $A\neq 0,B=0$，$\sin(\sqrt{\lambda}l)=0$ 得到固有值和固有函数

$\sqrt{\lambda}l=n\pi$

$$\lambda_{2,n}=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,y_{2,n}=\cos(\frac{n\pi x}{l}),n=1,2,3,\cdots.$$

虽然写法不一样，但和书上是一致的。

例子7. 解固有值问题，

$$\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0,1<x<e \\ y(1)=y(e)=0. \end{cases}$$

$x^2y''+xy'+\lambda y=0.$

$[kX']'-qX+\lambda\rho X=0$

$kX''+k'X'-qX+\lambda\rho X=0$

对比得：

$\frac{k'}{k}=\frac{1}{x}=(\ln k)' \Rightarrow k=x$

$q=0$

$\frac{\lambda\rho}{k}=\frac{\lambda}{x^2}\Rightarrow\rho=k\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x}$

解. 先把固有值问题化为标准SL固有值问题：

$$k(x)=\exp(\int\frac{b_1(x)}{b_0(x)}dx)=\exp(\int\frac{x}{x^2}ds)=x,$$

$$q(x)=\frac{b_2(x)}{b_0(x)}k(x)=0,$$

$$\rho(x)=\frac{k(x)}{b_0(x)}=\frac{1}{x}.$$

固有值问题化为

$$\begin{cases} [xy']'+\lambda\frac{y}{x}=0,1\le x\le e \\ y(1)=y(e)=0. \end{cases}$$

由此判断固有值大于零（因为边界条件都是I 类，所以没有0 固有值)，因而只需要考虑$\lambda>0$ 的情形。

常微分方程是欧拉方程，变量替换，$x=e^t,0<t<1$，有

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\lambda y=0.$$

由于$\lambda > 0$，解得

$$y = A\cos(\sqrt{\lambda}t) + B\sin(\sqrt{\lambda}t) = A\cos(\sqrt{\lambda}\ln x) + B\sin(\sqrt{\lambda}\ln x).$$

由边界条件

$$\begin{cases} A = 0 \\ A\cos(\sqrt{\lambda}) + B\sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \end{cases}$$

得$\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$。固有值和固有函数为

$$\lambda_n = n^2\pi^2, y_n = \sin(n\pi\ln x), n = 1, 2, 3, \cdots.$$

例子8. 解固有值问题，

$$\begin{cases} y'' + 2ay' + \lambda y = 0, 0 < x < l \\ y(0) = y(l) = 0 \end{cases}$$

解. 首先由SL理论，零不是固有值，且固有值大于零。解方程$t^2+2at+\lambda = 0$，得$t = -a\pm\sqrt{a^2-\lambda}$。如果$\lambda < a$，解之，舍去。如果$\lambda = a$，解之，舍去。如果$\lambda > a$，$y = C_1e^{-ax}\cos(\sqrt{\lambda - a^2}x) + C_2e^{-ax}\sin(\sqrt{\lambda-a^2}x)$。代入边界条件，得$C_1 = 0$，$\sin(\sqrt{\lambda-a^2}l) = 0$。得

$$\sqrt{\lambda - a^2}l = n\pi, n = 1, 2, \cdots.$$

固有值$\lambda_n = a^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$，固有函数$y_n = e^{-ax}\sin(\frac{n\pi}{l}x)$.

注记. 实系数常微分方程$y'' + py' + qy = 0$ 的解法如下：首先求$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的根，只可能以下几种情形

(1) 只有零根：$C_1x + C_2$；

(2) 一个零根$\lambda_1 = 0$，一个实根$\lambda_2 \neq 0$：$C_1 + C_2e^{\lambda_2 x}$；

(3) 两个非零不同实根λ_1, λ_2：$C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$；

(4) 两个相同非零实根$\lambda_1 = \lambda_2$：$C_1e^{\lambda_1 x} + C_2xe^{\lambda_1 x}$；

(5) 两个共轭复根$\lambda_1 = a + bi, \lambda_2 = a - bi$，$a, b$为实数：$e^{ax}(C_1\cos(bx) + C_2\sin(bx))$。

☆ 求 $ax''+bx'+cx=0$ 的通解 $x=x(t)$
$a.b.c$ 为常数，$a\neq 0$，$b^2-4ac>0$
先利用特征多项式 $a\lambda^2+b\lambda+c=0$ 求出
$\lambda_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
得到两个简单特解 $x_1(t)=e^{\lambda_1 t}$，$x_2(t)=e^{\lambda_2 t}$
$\Rightarrow x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$

注记. 欧拉方程$x^2y'' + axy' + by = 0$ 解法：设$x = e^t$，则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{de^t} = e^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{de^t}(e^{-t}\frac{dy}{dt}) = e^{-t}\frac{d}{dt}(e^{-t}\frac{dy}{dt}) = e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}).$$

带入原方程，注意到$x = e^t$，得

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = 0.$$

化为上个注记的情形。

1.3 非齐次定解问题的分离变量

{方程齐次
边界条件齐次.

分离变量需要很强的齐次条件，一般定解问题并不一定成立，虽然在在上一章中我们已经讲过非齐次定解问题如何齐次化，无非是叠加原理和冲量原理。但对于方程非齐次而边界条件齐次的定解问题，还是太复杂。我们还是从例子开始。

若 $u_x(t,0)=A(t)$，$u_x(t,l)=B(t)$

设 $v=px+qx^2$

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(t,x), 0<x<l, t>0 \\ u(t,0)=A(t), u(t,l)=B(t) \\ u(0,x)=\varphi(x), u_t(0,x)=\psi(x) \end{cases}$$

假设 $v=p+qx$

代入边界条件 $\begin{cases} p=A(t) \\ p+ql=B(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=\cdots \\ q=\cdots \end{cases}$

首先寻找满足边界条件的特解:(把边界条件化为齐次)

$$v(t,x)=A(t)+\frac{x}{l}(B(t)-A(t)).$$

设$w=u-v$，则

$$(I) \quad \begin{cases} w_{tt}=a^2w_{xx}+\tilde{f}(t,x), 0<x<l, t>0 \\ w(t,0)=w(t,l)=0 \\ w(0,x)=\tilde{\varphi}(x), w_t(0,x)=\tilde{\psi}(x) \end{cases}$$

其中$\tilde{f}(t,x)=f(t,x)-v_tt(t,x)+a^2v_xx(t,x)$, $\tilde{\varphi}(x)=\varphi(x)-v(0,x)$,$\tilde{\psi}(x)=\psi(x)-v_t(0,x)$. 把$w$ 的方程拆分成

分离变量法 $\longleftrightarrow$

$$(II) \quad \begin{cases} w_{tt}=a^2w_{xx}, 0<x<l, t>0 \\ w(t,0)=w(t,l)=0 \\ w(0,x)=\tilde{\varphi}(x), w_t(0,x)=\tilde{\psi}(x) \end{cases}$$

$(\mathrm{I})=(\mathrm{II})+(\mathrm{III})$

$$(III) \quad \begin{cases} w_{tt}=a^2u_{xx}+\tilde{f}(t,x), 0<x<l, t>0 \\ w(t,0)=0, w(t,l)=0 \\ w(0,x)=0, w_t(0,x)=0 \end{cases}$$

其中，（II）是齐次定解问题，可以用分离变量法处理。（III）的方程非齐次，边界条件齐次，初始条件平凡，可以用齐次化原理处理。

对于(III) 方法一.冲量原理.

$$\begin{cases} \tilde{w}_{tt}=a^2\tilde{w}_{xx}, 0<x<l, t>\tau \\ \tilde{w}(t,0)=\tilde{w}(t,l)=0 \\ \tilde{w}(\tau,x)=0, \tilde{w}_t(\tau,x)=f(\tau,x) \end{cases}$$

用分离变量法得 $\tilde{w}(t,x;\tau)$

$\therefore$ III的解: $w=\int_0^t \tilde{w}(t,x,\tau)d\tau$

对于(III)，还可以从固有函数入手。固有值问题

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, 0<x<l \\ y(0)=y(l)=0 \end{cases}$$

的固有函数为$X_n=\sin(\frac{n\pi x}{l}), n=1,2,3,\cdots$。设我们的特解是$w=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$。则

$$w_{tt}=a^2w_{xx}+f.$$

即

$$w_{tt}=\sum_{n=1}^{\infty}T_n''(t)X_n(x)=-a^2\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n\pi}{l})^2T_n(t)X_n(x)+\tilde{f}(t,x).$$

对于(III)
另一个方法:(L变换)

$$w(t,x)=\sum_n \frac{\langle w, X_n\rangle}{\langle X_n, X_n\rangle}X_n=\sum_n a_n(t)X_n$$

~~$w=XY$~~ ~~XY''~~

~~$X''+\lambda X=0$~~

~~$X(0)=X(l)$~~

~~$X'(0)=X'(l)=0$~~

将$f(t,x)$ 分解为

$$\tilde{f}(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)X_n(x).$$

对照得

$$T_n''(t)=-a^2(\frac{n\pi}{l})^2T_n(t)+f_n(t).$$

用拉普拉斯变换解上述微分方程（由初始条件$T_n(0)=T_n'(0)=0$）。

$$p^2L[T_n]=-(\frac{n\pi a}{l})^2L[T_n]+L[f_n].$$

得

$$L[T_n]=\frac{1}{p^2+(\frac{n\pi a}{l})^2}\times L[f_n].$$

乘积的逆变换 = 逆变换的卷积

所以

$$T_n=L^{-1}(\frac{1}{p^2+(\frac{n\pi a}{l})^2})*L^{-1}(L[f_n])=(\frac{l}{n\pi a}\times\sin(\frac{n\pi at}{l})))*f_n(t)=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(t-\tau)\sin(\frac{n\pi a\tau}{l})d\tau.$$

从而

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(t-\tau)\sin(\frac{n\pi a\tau}{l})d\tau\sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

例子9. 求解如下定解问题：

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}+f,0<x<l,t>0\\u_x(t,0)=u_x(t,l)=0\\u(0,x)=0\end{cases}$$

解. 固有值问题

$$\begin{cases}y''+\lambda y=0,0<x<l\\y'(0)=y'(l)=0\end{cases}$$

的固有函数为$X_0=1,X_n=\cos(\frac{n\pi x}{l}),n=1,2,3,\cdots$。设$u=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$。则

$$u_t=a^2u_{xx}+f.$$

即

$$u_t=\sum_{n=0}^{\infty}T_n'(t)X_n(x)=-a^2\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{n\pi}{l})^2T_n(t)X_n(x)+f(t,x).$$

将$f(t,x)$ 分解为

$$f(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(t)X_n(x).$$

对照得

$$T_n'(t)=-a^2(\frac{n\pi}{l})^2T_n(t)+f_n(t).$$

用拉普拉斯变换解上述微分方程（初始条件$T_n(0)=0$）。

$$pL[T_n]=-(\frac{n\pi a}{l})^2L[T_n]+L[f_n].$$

得

$$L[T_n] = \frac{1}{p+(\frac{n\pi a}{l})^2} \times L[f_n].$$

所以

$$T_n = L^{-1}(\frac{1}{p+(\frac{n\pi a}{l})^2}) * L^{-1}(L[f_n]) = e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} * f_n(t) = \int_0^t f_n(t-\tau)e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2\tau}d\tau.$$

从而

$$u = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t f_n(t-\tau)e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2\tau}d\tau \sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

注记. 设f 是$[0,\infty)$ 上地实值或复值函数，拉普拉斯变换定义为

$$L[f] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

设f,g 是$[0,\infty)$ 上地实值或复值函数，卷积定义为

$$f*g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

拉普拉斯变换卷积性质

$$L[f*g] = L(f)L(g).$$

微分的拉普拉斯变换。

$$L[f^n] = p^n L[f] - p^{n-1}f(0+) - p^{n-2}f'(0+) - \cdots.$$

一些简单函数地拉普拉斯变换。

$$L[e^{\lambda t}] = \frac{1}{p-\lambda};$$

$$L[\frac{t^n}{n!}] = \frac{1}{p^{n+1}};$$

$$L[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2};$$

$$L[\cos(\omega t)] = \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

1.3.1 泊松方程的非齐次定解问题

对于泊松方程的非齐次定解问题

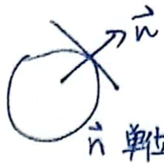
$$\begin{cases} \Delta u = f, (x,y,z) \in \Omega \\ u|_S = \varphi(x,y,z). \end{cases}$$

一般来说我们考虑的定解问题区域都是规则的，如方块，源，球等。我们一般用特解法，特别是当f 是多项式的时候，很容易用待定系数法求出一个特解v。然后令$w=u-v$，得到w 的齐次定解问题

$$\begin{cases} \Delta w = 0, 1 \le x \le e \\ w|_S = \varphi(x,y,z) - v(x,y,z). \end{cases}$$

以下是书上的例子：

见例子4 平面极坐标的分离变量.



$\vec{n}$ 单位外法向

例子10.

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=12(x^2-y^2), a^2\le x^2+y^2\le b^2\\ u|_{x^2+y^2=a^2}=1, \frac{\partial u}{\partial n}|_{x^2+y^2=b^2}=0.\end{cases}$$

解. 先找一个特解：$v=x^4-y^4$。设 $w=u-v$ 得

~~$v=x^4-y^4=r^4\cos 2\theta$~~

$$\begin{cases} w_{xx}+w_{yy}=0, a^2\le x^2+y^2\le b^2\\ w|_{x^2+y^2=a^2}=1-v, \frac{\partial u}{\partial n}|_{x^2+y^2=b^2}=-\frac{\partial v}{\partial n}.\end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{rr}+\frac{1}{r}w_r+\frac{1}{r^2}w_{\theta\theta}=0\\ w(a,\theta)=1-a^4\cos 2\theta\\ w_r(b,\theta)=-4b^3\cos 2\theta\end{cases}$$

用极坐标 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$. 即 $v=r^4\cos(2\theta)$，n 为单位法向方向沿着 r 往外。从而可以化为

$$\begin{cases} w_{xx}+w_{yy}=0, a^2\le x^2+y^2\le b^2\\ w|_{x^2+y^2=a^2}=1-a^4\cos(2\theta), \frac{\partial u}{\partial n}|_{x^2+y^2=b^2}=-4b^3\cos(2\theta).\end{cases}$$

极坐标下拉式方程得一般解为

$$u=A_0+B_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}(A_nr^n\cos(n\theta)+B_nr^{-n}\cos(n\theta))+C_nr^n\overset{\sin}{\cos}(n\theta)+D_nr^{-n}\sin(n\theta)).$$

代入边界条件，因为sin没出现 ∴ ~~B_n~~ $C_n=0$, $D_n=0$ $(n\neq 0)$

∴只出现 2θ， $A_n=B_n=0$ $(n\neq 2, n\neq 0)$

令 $r=a$ 和 b 得

$$\begin{cases} A_0+B_0\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}(A_na^n\cos(n\theta)+B_na^{-n}\cos(n\theta)+C_na^n\overset{\sin}{\cos}(n\theta)+D_na^{-n}\sin(n\theta))=1-a^4\cos(2\theta).\\ B_0b^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A_nb^n\cos(n\theta)+B_nb^{-n}\cos(n\theta)+C_nb^n\overset{\sin}{\cos}(n\theta)+D_nb^{-n}\sin(n\theta))=-4b^3\cos(2\theta).\end{cases}$$

我们仅需要考虑常数项和 $\cos(2\theta)$ 项，其他项系数全部为0。对照得

$$\begin{cases} A_0+B_0\ln a=1.\\ B_0b^{-1}=0.\\ C_2a^2+B_2a^{-2}=-a^4.\\ C_2b^2+B_2b^{-2}=-4b^3.\end{cases}$$

∴只求 A_2、B_2.

~~$A_0+B_0\ln a=1$~~

~~$A_0+B_0\ln b=0$~~ B_0b^{-1}

~~$A_2a^2+C_2a^{-2}=-a^4$~~

~~$A_2b^2+C_2b^{-2}=-4b^3$~~

解得：

$$\begin{cases} A_0=1.\\ B_0=0.\\ C_2=-\frac{a^6++b^6}{a^4+b^4}.\\ B_2=-\frac{a^4b^4(a^2-2b^2)}{a^4+b^4}.\end{cases}$$

所以

$$w=1-\frac{a^6++b^6}{a^4+b^4}r^2\cos(2\theta)-\frac{a^4b^4(a^2-2b^2)}{a^4+b^4}r^{-2}\cos(2\theta).$$

所以

$$u=v+w=1+[r^4-\frac{a^6++b^6}{a^4+b^4}r^2-\frac{a^4b^4(a^2-2b^2)}{a^4+b^4}r^{-2}]\cos(2\theta).$$

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0 & r<a,\ 0<z<H,\ 0<\theta\le 2\pi \\ u_r|_{r=a}=0 \\ u(x,y,0)=\varphi(r),\ u(x,y,H)=\psi(r)\end{cases}$$

与角度θ无关，则u与θ无关，$u=u(r,z)$

$$\Delta_3 u=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

设$u=RZ$

$R''Z+\frac{1}{r}R'Z+RZ''=0$

$$-\frac{Z''}{Z}=\frac{rR''+R'}{R\cdot r}=-\mu$$

$$\begin{cases}rR''+R'+\mu rR=0\\ |R(0)|<\infty,\ R'(a)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}r^2R''+rR'+(\mu r^2-0^2)R=0\\ |R(0)|<\infty,\ R'(a)=0\end{cases}$$

'零阶贝塞尔'

$SL:\ [rR']'+\mu rR=0$

$x=\sqrt{\mu}r.\ y(x)=R(\frac{x}{\sqrt{\mu}})=R(r)$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2y''+xy'+x^2y=0 & ①\\ |y(0)|<\infty,\ ~~y'(\sqrt{\mu}a)=0~~\end{cases}$$

方程①有解 ~~$C_1J_0(x)+C_2N_2(x)$~~

1

$C_1J_0(x)+C_2N_0(x)$

~~$J_0(x)$~~

$|J_0(0)|<\infty,\ |N_0(0)|=\infty$（舍去）

$\Rightarrow$ 解 $J_0(\sqrt{\mu}r)+J_0'(\sqrt{\mu}a)=0$

0.1 贝塞尔函数

贝塞尔函数是柱坐标系使用分离变量法后自然产生的函数族。

0.1.1 贝塞尔方程

我们以泊松方程为例：(齐次情形)设有一个半径为a 的圆柱体，高为H，处于热平衡状态，侧面绝热，上下表面温度已知，内部无热源。求温度分布？

首先我们写出定解问题：

$\Delta_3 u=0$

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0, r<R, 0<z<H, 0<\theta<2\pi\\ u_r|_{x^2+y^2=R^2}=0\\ u(x,y,0)=g_1(r,\theta), u(x,y,H)=g_2(r,\theta)\end{cases}$$

设$w=\sqrt{\mu}$，设$J_0'(wa)=0$的解为

$0<w_1<w_2<\cdots$

注意 $w_0=0, R_0=1$ （$q=0$、自然边界条件）

固有值$\mu_0=0.\ R_0=1$

$\mu_n=w_n^2.\ R_n=J_0(w_nr)$.

我们使用柱坐标系并用分离变离法，在柱坐标系下，齐次泊松方程为

$$\Delta_3 u=\frac{\partial u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial u}{\partial z^2}=0.$$

$Z''-w_n^2Z=0$

$\Rightarrow Z=C_ne^{w_nz}+D_ne^{-w_nz},\ n\neq0$

做分离变量

$$R''Z\Theta+\frac{1}{r}R'Z\Theta+\frac{1}{r^2}R\Theta''Z+R\Theta Z''=0$$

$$u=ZR\Theta,$$

$n=0$时，$Z''=0\quad Z=C_0+D_0z$

其中，$Z=Z(z), R=R(r), \Theta=\Theta(\theta)$。则有，

$$-\frac{r^2R''Z+rR'Z+r^2RZ''}{RZ}=\frac{\Theta''}{\Theta}=-\lambda$$

$$\therefore u=C_0+D_0z+\sum_{n=1}^{+\infty}(C_ne^{w_nz}+D_ne^{-w_nz})J_0(w_nr)$$

要求$u(r,0)=\varphi(r)$

$$=\frac{\langle\varphi,1\rangle}{\langle1,1\rangle}1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\langle\varphi,J_0(w_nr)\rangle}{\langle J_0(w_nr),J_0(w_nr)\rangle}J_0(w_nr)$$

不妨设$\frac{\Theta''}{\Theta}=-\lambda$，则有固有值问题

$$\begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0, 0\le\theta\le2\pi\\ \Theta(0)=\Theta(2\pi), \Theta'(0)=\Theta'(2\pi).\end{cases}$$

$\langle f,g\rangle=\int_0^a f\cdot g\,r\,dr$

$(\because R_0=1)$

这是周期边界条件的固有值问题，$k=1, q=0, \rho=1$，由SL 理论，$\lambda_0=0$，$\Theta_0=1$。其余固有值$\lambda_n=n^2, n\ge1$，对应固有函数$\Theta_n^{(1)}=\cos n\theta, \Theta_n^{(2)}=\sin n\theta, n\ge1$。将固有值代入原方程，得

$$\frac{r^2R''Z+rR'Z+r^2RZ''}{RZ}=n^2.$$

注意

即：

$$-\frac{Z''}{Z}=\frac{-n^2R+r^2R''+rR'}{r^2R}=-\mu$$

我们再用一次分离变量，假设上式为常值$-\mu$，则我们得到固有值问题

$$\begin{cases}r^2R''+rR'+(\mu r^2-n^2)R=0, r\ge0\\ |R(0)|<\infty, R'(a)=0.\end{cases}$$

贝塞尔固有值问题

写成标准形式，有

$$\begin{cases}[rR']'-\frac{n^2}{r}R+\mu rR=0, 0<x<a\\ |R(0)|<\infty, R'(a)=0.\end{cases}$$

我们根据n 的不同取值来讨论：

当$n=0$ 时，$q=0$，两端分别为自然边界条件和II 类边界条件。因而0 是固有值，对应固有函数为$R_0=1$。其余固有值均大于零，我们可以设$x=\sqrt{\mu}r, y(x)=R(x/\sqrt{\mu})$，我们就得到了

$$\begin{cases} x^2y''+xy'+x^2y=0, x>0. \\ |y(0)|<\infty. \end{cases}$$

$r=\frac{x}{\sqrt{\mu}}$

上述方程称为零阶贝塞尔方程。

当$n\neq 0$ 时，$q\neq 0$，我们不需要考虑零固有值。所有固有值都大于0，即$\mu>0$。我们可以设$x=\sqrt{\mu}r, y(x)=R(x/\sqrt{\mu})$，我们就得到了

$$\begin{cases} x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0, x>0. \\ |y(0)|<\infty. \end{cases}$$

上述方程称为n阶贝塞尔方程。一般ν阶（$\nu\geq 0$）贝塞尔方程的形式为

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0, x>0.$$

写成SL的形式为

$$[xy']'-\frac{\nu^2}{x}y+xy=0, x>0.$$

我们发现除了在0阶的时候需要考虑零固有值外，其他形式都是统一的，因而问题的核心在于解上诉常微分方程。

定理. *如果y_1 和y_2 是上述常微分方程的两个线性无关解，其中一个在0 点有界，则另一个必然在零点无界。*

实际上，我们假设y_1 是定理的有界解，y_2 是无界解，则常微分方程的所有解可以表示为$C_1y_1+C_2y_2$。可以说明，所有有界解都是y_1 的倍数。结合我们的边界条件，y_1 是我们所关心的。其某个特解称为ν-阶贝塞尔函数，记为$J_\nu(x)$。

现在假设我们已经知道了$J_n(x)$，我们回到了n-阶贝塞尔固有值问题。$R(r)=J_n(\sqrt{\mu}r)$。边界条件为

$$|R(0)|<\infty, R'(r)=(J_n(\sqrt{\mu}r))'|_{r=a}=\sqrt{\mu}J_n'(x)|_{x=\sqrt{\mu}a}=0.$$

设$\omega=\sqrt{\mu}$，设$J_n'(\omega a)=0$ 的所有正解为$\omega_{n,1}<\omega_{n,2}\cdots$。则固有值$\mu_{n,m}=\omega_{n,m}^2$，固有函数$R_{n,m}=J(\omega_{n,m}r)$，当$n=0$ 时，按情况讨论零固有值是否存在。将固有值带入Z 的方程，得到

$$Z''-\omega_{n,m}^2Z=0$$

固有值非零时解得

$$Z=C_{n,m,1}e^{\omega_{n,m}z}+C_{n,m,2}e^{-\omega_{n,m}z}.$$

固有值零时解得

$$Z=C+Dz.$$

所以原定解问题的解为

$$u=C+Dz+\sum_{m=1}^{\infty}(C_{0,m,1}^{(1)}e^{\omega_{0,m}z}+C_{0,m,2}^{(1)}e^{-\omega_{0,m}z})J_0(\omega_{0,m}r)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(C_{n,m,1}^{(1)}e^{\omega_{n,m}z}+C_{n,m,2}^{(1)}e^{-\omega_{n,m}z})J_n(\omega_{n,m}r)\Theta_n^{(1)}($$

λ　　μ　　Z

0, 1　　0, 1　　C+DZ

0, 1　　≠0, $J_0(W_{1,0}r)$

0.2 贝塞尔函数

我们来解ν阶（$\nu>0$）贝塞尔方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0,x>0.$$

这是一个2阶常微分方程，其解有形式$C_1J_\nu+C_2N_\nu$，其中J_ν 和N_ν 是定义在$(0,+\infty)$ 上线性无关的特解，其中，J_ν 在0 点有界，N_ν 在0 点无界。现在我们找这两特解：不妨设

$$y=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+\nu}.$$

$\cancel{x^2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+v)^2x^{n+v}}$

$x^2\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(n+v)(n+v-1)x^{n+v-2}+x\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(n+v)x^{n+v-1}$

$+(x^2-v^2)\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+v}=0$

代入贝塞尔方程，得到

$$(1+2\nu)a_1=0,n(n+2\nu)a_n+a_{n-2}=0.$$

我们只要特解，因而并不关心奇数项。我们有

$$a_{2k}=\frac{(-1)^ka_0}{2^{2k}k!(k+\nu)\cdot(k+\nu-1)\cdots(\nu+1)}.$$

对照系数：

$(1+2v)a_1=0$; $n(n+2v)a_n+a_{n-2}=0$

$\Rightarrow$ 奇数项为0：$a_1=a_3=\cdots=0$

$\therefore n=2k$. $\frac{a_{2k}}{a_{2k-2}}=\frac{-1}{2k(2k+2v)}=\frac{(-1)}{4k(k+v)}$

$\Rightarrow a_{2k}=\frac{(-1)^ka_0}{2^{2k}k!(k+v)(k+v-1)\cdots(v+1)}$

我们介绍一个函数Γ 函数： ← 阶乘的推广

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt.$$

该函数在$x\geq1$ 都有定义，并且有

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=-e^{-t}|_0^\infty=1.$$

$\Gamma(1)=1$

当$x\geq1$ 时，

$$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^xdt=-\int_0^\infty t^xde^{-t}=-t^xe^{-t}|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-t}dt^x=x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dx=x\Gamma(x)$$

用上述递推公式，我们可以说明$\Gamma(n+1)=n!$，还可以将Γ 函数的定义推广到全体实数去掉非正整数上。例如

$$\Gamma(-\frac{1}{2})=\Gamma(\frac{1}{2})/(-\frac{1}{2})=-4\Gamma(\frac{3}{2}).$$

$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$

$=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}e^{-t}dt^x$

$=\frac{1}{x}e^{-t}\cdot t^x\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}t^xe^{-t}dt$

$=\frac{1}{x}\Gamma(x+1)$

$\Rightarrow\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

$\Rightarrow\Gamma(n+1)=n!$

实际上

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt=\int_0^\infty e^{-s^2}s^{-1}ds^2=2\int_0^\infty e^{-s^2}ds=\sqrt{\pi}.$$

但是

$$\Gamma(0)=\Gamma(1)/0=\infty\text{ 以及 }\Gamma(-n)=\infty,n\in\mathbb{N},$$

在此不做展开。

有了Γ 函数，我们可以将a_{2k} 记为

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k\Gamma(\nu+1)a_0}{2^{2k}k!\Gamma(k+\nu+1)}.$$

$k+v-1=\frac{\Gamma(k+v)}{\Gamma(k+v-1)}$

$\because k+v=\frac{\Gamma(k+v+1)}{\Gamma(k+v)}$ $\cdots$

$v+1=\frac{\Gamma(v+2)}{\Gamma(v+1)}$

取$a_0=\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$，我们得到了贝塞尔方程的第一个特解也是我们最关心的特解：

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^kx^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(k+\nu+1)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

$n=2k$

消项 $\Rightarrow a_{2k}=\frac{(-1)^ka_0\Gamma(v+1)}{2^{2k}k!\Gamma(k+v+1)}$

找一特殊a_0(不为0). 令 $a_0=\frac{1}{2^v\Gamma(v+1)}$

$\Rightarrow a_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k+v}k!\Gamma(k+v+1)}$

J_ν 一般没有显式表达式，但我们有

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

实际上，当k 为正整数时。

$$\Gamma(\frac{1}{2}+k)=\Gamma(\frac{1}{2})\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{2k-1}{2}=\frac{\sqrt{\pi}(2k-1)!!}{2^k}.$$

从而

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\frac{1}{2}+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\frac{\sqrt{\pi}(2k+1)!!}{2^{k+1}}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}.$$

整理得

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\frac{\sqrt{\pi}(2k+1)!!}{2^{k+1}}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

为了求另一个特解，我们不妨假设另一个特解为

$$y=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n-\nu}.$$

$(1-2\nu)a_1=0 \rightarrow$ 不能说明 $a_1=0$

$n(n-2\nu)a_n+a_{n-2}=0$

带入贝塞尔方程，得到

$$n(n-2\nu)a_n+a_{n-2}=0.$$

我们可以将a_{2k} 记为

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k\Gamma(-\nu+1)a_0}{2^{2k}k!\Gamma(k-\nu+1)}.$$

把之前ν用$-\nu$代替

取$a_0=\frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}$，我们得到了贝塞尔方程的另一个特解：

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^kx^{2k-\nu}}{2^{2k-\nu}k!\Gamma(k-\nu+1)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}.$$

当ν 不是整数时，

$$\lim_{x\to0+}J_{-\nu}(x)=\infty.\ \lim_{x\to0+}J_\nu(x)=0$$

因而J_ν 与$J_{-\nu}$ 线性无关。但是当$\nu=n$ 为非负整数的时候

当$\nu>0$，ν不是整数，
$J_\nu(0)=0$，$J_{-\nu}(0)=\infty$ 线性无关。
当$\nu=n$ 是非负整数
$J_n=(-1)^nJ_{-n}$
线性相关。

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

$$=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k-n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)!k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

$$=(-1)^n\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+n+1)k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}=(-1)^nJ_n(x).$$

~~当k<~~ $(\Gamma(0)=\infty)$.

当$k<n$时，$\Gamma(-)=\infty$ 即式子为0.

$J_{-n}=(-1)^nJ_n$ 或 $J_n=(-1)^nJ_{-n}$

当$\nu=n$ 是非负整数 $J_n=(-1)^nJ_{-n}$ 线性相关.

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

$l=k-n$

$$=\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+l}}{(n+l)!\Gamma(l+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l+n}$$

当ν为整数时，

$N_n(x) = \lim_{\nu\to n} N_\nu(x)$

J_n 与J_{-n} 线性相关。为了解决这个问题。当ν 不是整数时，我们令

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu(x)}}{\sin(\nu\pi)}.$$

ν-阶贝塞尔方程的所有解可以表示为$C_1 J_\nu + C_2 N_\nu$。对于非负整数

$$N_n(x) = \lim_{\nu\to n} N_\nu(x) = \lim_{\nu\to n} \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu(x)}}{\sin(\nu\pi)}.$$

这个极限是是$\frac{0}{0}$ 的形式，可以用洛必达法则，得

$$N_n(x) = \frac{\cos(\nu\pi)\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}(x) - \pi J_\nu(x)\sin(\nu\pi) - \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}(x)}{\pi\cos(\pi\nu)}\Big|_{\nu=n} = \frac{\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}(x) - (-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}(x)}{\pi}\Big|_{\nu=n}.$$

J_ν 称为第一类ν-阶贝塞尔函数；N_ν 称为第二类ν-阶贝塞尔函数或者诺伊曼函数。在这本书中我们重点关注J_n 特别是J_0。

0.3 贝塞尔函数的性质

$\exp(\frac{x}{2}(\xi-\frac{1}{\xi})) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\xi^n$ △

0.3.1 母函数

$\exp(\frac{x}{2}(\xi-\frac{1}{\xi}))$ 称为贝塞尔函数的母函数。我们有

左 右

$$\exp(\frac{x}{2}(\xi-\frac{1}{\xi})) = \exp(\frac{x}{2}\xi)\exp(-\frac{x}{2}\frac{1}{\xi}) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{x\xi}{2})^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(\frac{x}{2\xi})^n\right)$$ (找ξ^n的系数)

依ξ 的次数展开得：

$$\begin{aligned}
\exp(\frac{x}{2}(\xi+\frac{1}{\xi})) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(n+k)!}(\frac{x\xi}{2})^{n+k}\frac{(-1)^k}{k!}(\frac{x}{2\xi})^k + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\frac{x\xi}{2})^k\frac{(-1)^{n+k}}{(n+k)!}(\frac{x}{2\xi})^{n+k}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}(\frac{x}{2})^{2k+n}\right)\xi^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}(\frac{x}{2})^{2k+n}\right)\xi^{-n}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}J_n(x)\xi^n + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_n(x)\xi^{-n}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}J_n(x)\xi^n + \sum_{n=1}^{\infty}J_{-n}(x)\xi^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)\xi^n.
\end{aligned}$$

左边的右边的n.
(k+n) (k)

∴ ξ^n的系数为：

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+n)!}(\frac{x}{2})^{k+n}(-1)^k \cdot \frac{1}{k!}(\frac{x}{2})^k$

$= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+n+1)}(\frac{x}{2})^{2k+n}$

$= J_n(x)$

注意到如果将母函数看成一个ξ的复函数，则母函数在$\xi\neq 0$ 解析，并且$\xi=0$ 是母函数的孤立奇点，可以洛朗展开，

$$\exp(\frac{x}{2}(\xi-\frac{1}{\xi})) = \sum_{-\infty}^{\infty}a_n\xi^n$$

$\exp(\sim) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(\xi-0)^n$

其中 $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}d\xi$

用洛朗展开的公式

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi, n = 0, \pm1, \pm2, \cdots,$$

$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{\exp(\sim)}{\xi^{n+1}}d\xi$

$\xi = e^{i\theta}$

$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\exp(\frac{x}{2}(e^{i\theta}-e^{-i\theta}))}{e^{i(n+1)\theta}}i\theta d\theta$

$=$

其中C 是围绕孤立奇点a 的闭路（见书本86页）。在这里取$f(\xi) = \exp(\frac{x}{2}(\xi - \frac{1}{\xi}))$，取$C$ 为单位圆，即$\xi = e^{\theta i}, 0 \le \theta < 2\pi$，取$a = 0$。则有

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\exp(\frac{x}{2}(e^{\theta i} - \frac{1}{e^{\theta i}}))}{(e^{\theta i} - 0)^{n+1}} de^{\theta i} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\exp(x\sin\theta i)}{e^{n\theta i}} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp((x\sin\theta - n\theta)i)d\theta.$$

注意到$\exp((x\sin\theta - n\theta)i) = \cos(x\sin\theta - n\theta) + i\sin(x\sin\theta - n\theta)$ 以及$\sin(x\sin\theta - n\theta)$ 为θ 的奇函数和周期2π 的函数，我们有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(x\sin\theta - n\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x\sin\theta - n\theta)d\theta = 0.$$

所以

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta)d\theta = J_n(x)}$$

（第n阶）

称之为整阶贝塞尔函数的积分表示。

利用母函数可以证明很多贝塞尔函数的性质。

$$J_0(0) = 1, J_n(0) = 0, n \ne 0.$$

又例如

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n+k}(x)J_{-k}(y).$$

实际上一方面

$$\exp(\frac{x+y}{2}(\xi - \frac{1}{\xi})) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x+y)\xi^n.$$

另一方面

$$\exp(\frac{x+y}{2}(\xi - \frac{1}{\xi})) = \exp(\frac{x}{2}(\xi - \frac{1}{\xi}))\exp(\frac{y}{2}(\xi - \frac{1}{\xi})) = (\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\xi^n)(\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(y)\xi^n).$$

依ξ 的阶数展开得

$$\exp(\frac{x+y}{2}(\xi - \frac{1}{\xi})) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n+k}(x)\xi^{n+k}J_{-k}(y)\xi^{-k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n+k}(x)J_{-k}(y)\xi^n.$$

对照得：

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n+k}(x)J_{-k}(y).$$

0.3.2 微分关系与递推公式

贝塞尔函数J_ν满足以下性质： 相对于x求导.

(1) $(x^\nu J_\nu)' = x^\nu J_{\nu-1} = x^\nu J_\nu' + \nu x^{\nu-1}J_\nu$;

(2) $(\frac{J_\nu}{x^\nu})' = -\frac{J_{\nu+1}}{x^\nu} = \frac{J_\nu'}{x^\nu} - \frac{\nu J_\nu}{x^{\nu+1}}$.

（考试提供）

整理得

(1) $J_{\nu-1}=J_\nu'+\nu x^{-1}J_\nu$; △

(2) $J_{\nu+1}=-J_\nu'+\nu x^{-1}J_\nu$. △

我们证明之:

证明. *(1)*. 首先

$J\nu$

$$x^\nu J_\nu(x)=x^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(k+\nu+1)}x^{2k+2\nu}.$$

对x 求导得

$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

$$(x^\nu J_\nu(x))'=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+2\nu)}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(k+\nu+1)}x^{2k+2\nu-1}=x^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu-1}k!\Gamma(k+\nu)}x^{2k+\nu-1}=x^\nu J_{\nu-1}(x).$$

(2). 同理

$$\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}=x^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(k+\nu+1)}x^{2k}.$$

需要注意得是$k=0$ 项为常数项，求导后为0，为了避免误导造成错误，我们单独提出来考虑。当然如果$k!$ 写成$\Gamma(k+1)$ 那么就没必要啰嗦了。求导得

$$\begin{aligned}(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu})'&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k2k}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(k+\nu+1)}x^{2k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu-1}(k-1)!\Gamma(k+\nu+1)}x^{2k-1}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k+\nu+1}k!\Gamma(k+\nu+2)}x^{2k+1}=-x^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu+1}k!\Gamma(k+\nu+2)}x^{2k+\nu+1}\\&=-x^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+(\nu+1)+1)}(\frac{x}{2})^{2k+(\nu+1)}=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x).\end{aligned}$$

由微分关系，我们可以得到递推公式

(1) $J_\nu'=\frac{1}{2}(J_{\nu-1}-J_{\nu+1})$; △

(2) $\frac{2\nu}{x}J_\nu=J_{\nu-1}+J_{\nu+1}$. △

以及

$$J_0'(x)=J_{-1}(x)=-J_1(x).$$

因而，整阶贝塞尔函数包括其导数总能用J_0,J_1 表出。这也是作业和考试答案的要求，尽量用J_0, J_1 表示。例如

$$J_1'=\frac{1}{2}(J_0-J_2)=\frac{1}{2}J_0-\frac{1}{2}(\frac{2}{x}J_1-J_0)=J_0-\frac{1}{x}J_1.$$

当然我们也可以用微分关系求J_1'

$$(xJ_1)'=xJ_0=J_1+xJ_1'.$$

得到

$$J_1' = J_0 - \frac{1}{x}J_1.$$

两者是一致的。又例如

$$J_3 = \frac{4}{x}J_2 - J_1 = \frac{4}{x}(\frac{2}{x}J_1 - J_0) - J_1 = (\frac{8}{x^2} - 1)J_1 - \frac{4}{x}J_0$$

例子1. 计算积分$\int_0^\infty e^{-ax}J_0(bx)dx, a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$. 并计算$L[J_0(t)], L[J_1(t)]$.

解. 用贝塞尔函数的积分表达式。

$$\begin{aligned}
2\pi\int_0^\infty e^{-ax}J_0(bx)dx &= \int_0^\infty\int_0^{2\pi} e^{-ax}\cos(bx\sin\theta)d\theta dx \\
&= \int_0^\infty\int_0^{2\pi} e^{-ax}e^{ibx\sin\theta}d\theta dx \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^\infty e^{x(-a+ib\sin\theta)}dxd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{1}{-a+ib\sin\theta}e^{x(-a+ib\sin\theta)}|_0^\infty d\theta \\
&= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{-1}{-a+ib\sin\theta}d\theta \\
&= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{a+ib\sin\theta}{a^2+b^2\sin^2\theta}d\theta \\
&= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{a}{a^2+b^2\sin^2\theta}d\theta.
\end{aligned}$$

设$t = \tan\theta$，则$dt = d(\tan\theta) = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$，带入得

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{a}{a^2+b^2\sin^2\theta}d\theta = \int_{-\infty}^\infty\frac{a\cos^2\theta}{a^2+b^2\sin^2\theta}dt = \int_{-\infty}^\infty\frac{a}{a^2+(a^2+b^2)t^2}dt.$$

设$s = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}t$，带入上式，得到

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{a}{a^2+b^2\sin^2\theta}d\theta = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{1+s^2}ds = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\arctan s|_{-\infty}^\infty = \frac{\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

从而

$$\int_0^\infty e^{-ax}J_0(bx)dx = \frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

如果用留数定理，可以说明

$$L[J_0(t)] = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, Re(p) > 0.$$

实际上当$Rep > 0$ 时

$$L[J_0(t)](p) = \int_0^\infty e^{-pt}J_0(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} e^{-pt}\cos(t\sin\theta)d\theta dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty\frac{p}{p^2+(p^2+1)t^2}dt.$$

$\frac{p}{p^2+(p^2+1)t^2}$ 作为复函数有两个一阶极点$t_1, t_2 = \pm\frac{pi}{\sqrt{p^2+1}}$，一个在上半平面（$t_1$），一个在下半平面（$t_2$）。

$$Res(\frac{1}{p^2+(p^2+1)t^2}, t_1) = \lim_{t\to t_1}\frac{p}{p^2+(p^2+1)t^2}\times(t-t_1) = \frac{p}{(p^2+1)(t-t_2)}|_{t=t_1} = \frac{p}{(p^2+1)(t_1-t_2)}.$$

$$L[J_0(t)](p) = \frac{1}{\pi}\times 2\pi i Res(\frac{1}{p^2+(p^2+1)t^2}, t_1) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

另当$Rep>0$ 时

$$L[J_1(t)] = \int_0^\infty e^{-pt}J_1(t)dt = -\int_0^\infty e^{-pt}J_0'(t)dt = -e^{-pt}J_0(t)|_0^\infty - p\int_0^\infty e^{-pt}J_0(t)dt = 1-pL[J_0(t)].$$

即

$$L[J_1(t)] = \frac{\sqrt{1+p^2}-p}{\sqrt{1+p^2}}.$$

例子2. $n\geq 2$，证明

$$\int_0^x x^n J_0(x)dx = x^n J_1(x) + (n-1)x^{n-1}J_0(x) - (n-1)^2 x^2\int_0^x x^{n-2}J_0(x)dx.$$

证明. 这是书后面的作业。

$$\int_0^x x^n J_0(x)dx = \int_0^x x^{n-1}xJ_0(x)dx = \int_0^x x^{n-1}(xJ_1(x))'dx = x^n J_1(x) - (n-1)\int_0^x x^{n-1}J_1(x)dx.$$

用微分关系$J_1(x) = -(J_0(x))'$，得

$$\int_0^x x^{n-1}J_1(x)dx = -\int_0^x x^{n-1}J_0'(x)dx = x^{n-1}J_0(x) + (n-1)\int_0^x x^{n-2}J_0(x)dx.$$

综合以上所述，证明结论。

实际上，对任意整数m,n:

$$\int x^m J_n(x)dx = \int x^{m-n}x^n J_n(x)dx = \int x^{m-n-1}(x^{n+1}J_{n+1}(x))'dx$$
$$= x^m J_{n+1}(x) - (m-n-1)\int x^{m-1}J_{n+1}(x)dx.$$

结合例子2，可以说明最终$\int x^m J_n(x)dx$ 总能表示成，$J_0, J_1, \int J_0$ 的组合。当$m+n$ 为奇数时候，尾巴项为

$$\int xJ_0 dx = \int (xJ_1)'dx = xJ_1.$$

当$m+n$ 为偶数的时候，尾巴项$\int J_0 dx$ 没法消掉。

0.3.3 渐近公式与零点

$$x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y = 0, x\geq 0.$$

设$u = \sqrt{x}y$，得

$$y' = \frac{u'}{x^{1/2}} - \frac{u}{2x^{3/2}}, y'' = \frac{u''}{x^{1/2}} - \frac{u'}{x^{3/2}} + \frac{3u}{4x^{5/2}}.$$

得到

$$u'' + (1 + \frac{1/4 - \nu^2}{x^2})u = 0.$$

当$|x|$ 非常大得时候，可以近似得认为

$$u'' + u = 0.$$

其通解为

$$u = C_1 \cos x + C_2 \sin x = A\cos(x + \theta).$$

实际上，进一步地推导可以证明（略）

$$J_v(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}),$$

$$N_v(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}).$$

从而可以发现$J_v, J_v', J_v + hJ_v'$ 都有无穷多正零点。这说明我们选取的边界条件总有可数无限个固有值。

0.4 贝塞尔方程的固有值问题

现在我们考虑贝塞尔方程的固有值问题，

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + (\mu x^2 - \nu^2)y = 0, 0 < x < a \\ |y(0)| < \infty, \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0. \end{cases}$$

SL型为，

$$[xy']' - \frac{\nu^2 y}{x} + \mu xy = 0.$$

需要注意的是$\rho = x$，因而内积为$\langle f.g\rangle = \int_0^a f(x)g(x)xdx$。

由上节讨论可得，该方程的解为

$$y = C_1 J_\nu(\sqrt{\mu}x) + C_2 N_\nu(\sqrt{\mu}x).$$

代入边界条件，$C_2 = 0$。设$\omega = \sqrt{\mu}$，则边界条件为

$$\alpha J_\nu(\omega a) + \beta\omega J_\nu'(\omega a) = 0.$$

上诉方程有无数解，我们假设所有解为$(0 = \omega_0 <)\omega_1 < \cdots$。

(固有值$\mu_0 = 0$，对应固有函数$Y_0 = 1$)

固有值$\mu_n = \omega_n^2$，对应固有函数$Y_n = J_\nu(\omega_n x)$.

需要注意的是只有当$\alpha = 0, \nu = 0$时，$\omega_0 = 0$存在。

我们需要以$\{J_\nu(\omega_n x)\}_n$为正交基做傅里叶展开，$(0,a)$ 的函数$f(x)$ 展开为

$$f = \text{可能的常数项} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n J_\nu(\omega_n x).$$

为了计算系数，我们需要计算$\int_0^a xJ_\nu^2(\omega_n)dx$，为此对下式乘以$2y'$

$$x[xy']' + (\omega^2x^2-\nu^2)y = 0.$$

得到

$$2[xy'][xy']' + (\omega^2x^2-\nu^2)2yy' = 0.$$

即

$$([xy']^2)' + (\omega^2x^2-\nu^2)(y^2)' = 0.$$

从0 到a 做积分，得到：

$$\int_0^a([xy']^2)'dx = -\int_0^a(\omega^2x^2-\nu^2)(y^2)'dx = -(\omega^2x^2-\nu^2)y^2|_0^a + \int_0^a 2\omega^2xy^2dx.$$

上式左边$=[xy']^2|_0^a = (ay'(a))^2$，从而

$$\int_0^a xy^2dx = \frac{(ay'(a))^2+(\omega^2a^2-\nu^2)y(a)^2+\nu^2y(0)^2}{2\omega^2}.$$

带入$y=J_\nu(\omega x)$ 及$\nu^2J_\nu(0)^2=0$，得

$$\int_0^a xy^2dx = \frac{a^2\omega^2J_\nu'^2(\omega a)+(\omega^2a^2-\nu^2)J_\nu^2(\omega a)}{2\omega^2}.$$

$N_\nu^2 = \langle J_\nu(\omega x), J_\nu(\omega x)\rangle = \int_0^a xJ_\nu^2(\omega x)dx$:

(α) $\alpha\neq0, \beta=0$: 此时$J_\nu(\omega a)=0$，得到$N_\nu^2 = \frac{a^2}{2}J_\nu'^2(\omega a) = \frac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2(\omega a)$;

(β) $\alpha=0, \beta\neq0$:此时$J_\nu'(\omega a)=0$，得到$N_\nu^2 = \frac{(\omega^2a^2-\nu^2)J_\nu^2(\omega a)}{2\omega^2} = \frac{1}{2}(a^2-\frac{\nu^2}{\omega^2})J_\nu^2(\omega a)$;

(γ) $\alpha\neq0, \beta\neq0$: 此时，设$h=\frac{\beta}{\alpha}$，有$J_\nu(\omega a)+h\omega J_\nu'(\omega a)=0$，得到$N_\nu^2 = \frac{1}{2}(\frac{a^2}{h^2\omega^2}+a^2-\frac{\nu^2}{\omega^2})J_\nu^2(\omega a)$。

特别地，当$\nu=0$ 时候：

$\alpha y(a)+\beta y'(a)=0$

(α) $\alpha\neq0, \beta=0$: $N_0^2 = \frac{a^2}{2}J_1^2(\omega a)$;

(β) $\alpha=0, \beta\neq0$: $N_0^2 = \frac{a^2}{2}J_0^2(\omega a)$;

(γ) $\alpha\neq0, \beta\neq0$:$N_0^2 = \frac{1}{2}(\frac{a^2}{h^2\omega^2}+a^2)J_0^2(\omega a)$。

例子3. 设$J_0(x)=0$ 得所有正根为$0<\omega_1<\omega_2<\cdots$，分别将$(0,1)$ 上的函数1，x^2 分解为$J_0(\omega_i x)$ 的级数。

$\because \alpha\neq0, \beta=0$时，才有$J_\nu(\omega a)=0$

$$\therefore \begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda\mu x^2y=0, & 0<x<1 \\ |y(0)|<\infty, \ y(1)=0 \end{cases}$$

解. ω_i^2 以及 $J_0(\omega_i)$ 为对应如下零阶贝塞尔固有值问题的固有值和固有函数

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + \mu x^2 y = 0, 0 \le x \le 1 \\ |y(0)| < \infty, y(1) = 0. \end{cases}$$

变量替换

边界条件为I 类边界条件，所以$N_{0,i}^2 = \frac{1}{2}J_1^2(\omega_i)$。 以 $s = w_i x$ $= \int_0^{w_i} J_0(s)\frac{s}{w_i}d\frac{s}{w_i} = \frac{1}{w_i^2}\int_0^{w_i} J_0(s)sds$

首先对1 分解：

$(x^\nu J_\nu)' = x^\nu J_{\nu-1}$

$$\langle 1, J_0(\omega_i x)\rangle = \int_0^1 1J_0(\omega_i x)xdx = \frac{1}{\omega_i^2}\int_0^{\omega_i} J_0(x)xdx = \frac{1}{\omega_i^2}\int_0^{\omega_i}(xJ_1(x))'dx = \frac{J_1(\omega_i)}{\omega_i}.$$

从而

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\langle 1, J_0(\omega_i x)\rangle}{N_{0,i}^2}J_0(\omega_i x) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{\omega_i J_1(\omega_i)}J_0(\omega_i x).$$

再对x^2 做分解：

变量替换

$$\langle x^2, J_0(\omega_i x)\rangle = \int_0^1 x^3 J_0(\omega_i x)dx = \frac{1}{\omega_i^4}\int_0^{\omega_i} J_0(x)x^3dx.$$

$$\begin{aligned}
\langle x^2, J_0(\omega_i x)\rangle = \int_0^1 x^3J_0(\omega_i x)dx &= \frac{1}{\omega_i^4}\int_0^{\omega_i} x^3J_0(x)dx \\
&= \frac{1}{\omega_i^4}\int_0^{\omega_i} x^2(xJ_1(x))'dx \\
&= \frac{1}{\omega_i^4}\left(\int_0^{\omega_i} x^2d(xJ_1(x))\right) \\
&= \frac{1}{\omega_i^4}\left(x^3J_1(x)|_0^{\omega_i} - 2\int_0^{\omega_i} x^2J_1(x)dx\right) \\
&= \frac{1}{\omega_i^4}\left(x^3J_1(x)|_0^{\omega_i} - 2\int_0^{\omega_i}(x^2J_2(x))'dx\right) \\
&= \frac{1}{\omega_i^4}\left(x^3J_1(x)|_0^{\omega_i} - 2x^2J_2(x)|_0^{\omega_i}\right) \\
&= \frac{1}{\omega_i^4}\left(x^3J_1(x) - 4xJ_1(x) + 2x^2J_0(x)\right)|_0^{\omega_i}.
\end{aligned}$$

$\frac{2\nu}{x}J_\nu = J_{\nu-1} + J_{\nu+1}$

注意到$J_0(\omega_i) = 0$,

$\frac{J_1(W_i)}{W_i} - \frac{4J_1(W_i)}{W_i^3}$

$$\langle x^2, J_0(\omega_i x)\rangle = \frac{1}{\omega_i^4}\left(x^3J_1(x) - 4xJ_1(x) + \cancel{2x^2J_0(x)}\right)|_0^{\omega_i} = \cancel{\frac{2}{\omega_i J_1(\omega_i)} - \frac{8}{\omega_i^3 J_1(\omega_i)}}.$$

$$x^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\langle x^2, J_0(\omega_i x)\rangle}{N_{0,i}^2}J_0(\omega_i x) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\omega_i J_1(\omega_i)} - \frac{8}{\omega_i^3 J_1(\omega_i)}\right)J_0(\omega_i x).$$

例子4. 设$J_0'(x) = 0$ 得所有正根为$0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots$，将$(0,1)$ 上的函数$1, x^2$ 分解为$1, J_0(\omega_i x)$ 的级数。

$\alpha = 0,\ \beta \neq 0.$ （题目要求有常数项）.

解. $0, \omega_i^2$ 和其对应的$1, J_0(\omega_i)$ 为如下零阶贝塞尔固有值问题的固有值和固有函数

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + \mu x^2 y = 0, 0 \le x \le 1 \\ |y(0)| < \infty, y'(1) = 0. \end{cases}$$

$1 - x^2 = \Sigma\frac{8}{W_i^3 J_1(W_i)}J_0(W_i x)$

$~~1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle 1, J_0(W_i x)\rangle}{\frac{1}{2}J_0^2(W_i)} J_0(W_i x)~~$

边界条件为II类边界条件，所以$N_{0,i}^2 = \frac{1}{2}J_0^2(\omega_i)$。$\to a=1$

跟上一题不一样的是，该题要求分解为1，$J_0(W_i x)$的级数。

首先对1分解：就是1。

$\therefore$对1分解，就是1，后面一堆为0

再对x^2做分解：首先求常数固有函数1的系数

$$\langle 1, 1\rangle = \int_0^1 1^2 x dx = \frac{1}{2}.$$

$$\langle x^2, 1\rangle = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}.$$

$1=1$

$$x^2 = \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}\cdot 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle x^2, J_0(W_i x)\rangle}{\langle J_0(W_i x), J_0(W_i x)\rangle} J_0(W_i x)$$

所以常数项系数$= \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} = \frac{1}{2}$。

$$\begin{aligned}
\langle x^2, J_0(\omega_i x)\rangle = \int_0^1 x^3 J_0(\omega_i x) dx &= \frac{1}{\omega_i^4}\int_0^{\omega_i} x^3 J_0(x) dx \\
&= \frac{1}{\omega_i^4}\int_0^{\omega_i} x^2 (x J_1(x))' dx \\
&= \frac{1}{\omega_i^4}\left(\int_0^{\omega_i} x^2 d(x J_1(x))\right) \\
&= \frac{1}{\omega_i^4}\left(x^3 J_1(x)|_0^{\omega_i} - 2\int_0^{\omega_i} x^2 J_1(x) dx\right) \\
&= \frac{1}{\omega_i^4}\left(x^3 J_1(x)|_0^{\omega_i} - 2\int_0^{\omega_i} (x^2 J_2(x))' dx\right) \\
&= \frac{1}{\omega_i^4}\left(x^3 J_1(x)|_0^{\omega_i} - 2x^2 J_2(x)|_0^{\omega_i}\right) \\
&= \frac{1}{\omega_i^4}\left(x^3 J_1(x) - 4x J_1(x) + 2x^2 J_0(x)\right)|_0^{\omega_i}.
\end{aligned}$$

注意到$J_0'(\omega_i) = -J_1(\omega_i) = 0$：

$$\begin{aligned}
\langle x^2, J_0(\omega_i x)\rangle &= \frac{1}{\omega_i^4}(x^3 J_1(x) + 2x^2 J_0(x) - 4x J_1(x))|_0^{\omega_i} \\
&= \frac{1}{\omega_i^4}(\omega_i^3 \cancel{J_1(\omega_i)} + 2\omega_i^2 J_0(\omega_i) - 4\omega_i \cancel{J_1(\omega_i)}) \\
&= \frac{2J_0(\omega_i)}{\omega_i^2}.
\end{aligned}$$

题目中 $J_0'(x)=0$

$\therefore J_0'(W_i)=0$

&

$$\left(\frac{J_v}{x^v}\right)' = -\frac{J_{v+1}}{x^v}$$

$\therefore -J_1(W_i)=0$

从而

$$x^2 = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle x^2, J_0(\omega_i x)\rangle}{N_{0,i}^2} J_0(\omega_i x) = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{\omega_i^2 J_0(\omega_i)} J_0(\omega_i x).$$

例子5（零阶贝塞尔固有值问题）. 有一个处于热平衡的理想金属圆柱，半径高均为1，上下底温度分别为$1-r^2$, 0，侧面温度为0，无热源，求圆柱体内的温度分布。$\to$ 泊松方程

解. 由对称性，容易知道温度分布与角度无关，不妨设温度$u = u(r, z)$。因而可以写出定解问题

$$\begin{cases}
\Delta_3 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, 0 \le r \le 1, 0 \le z \le 1 \\
u|_{r=1} = 0. \\
\cancel{u(0,z)} = 0, \cancel{u(1,z)} = 1 - r^2.
\end{cases}$$

$u=u(r,z)$

$u(r,0)$ $u(r,1)$

分离变量，$u(r,z)=R(r)Z(z)$，有

$$-\frac{Z''}{Z}=\frac{rR''+R'}{rR}. =-\mu$$

设上式为常值$-\mu$，得到固有值问题

乘上一个 $r \to (r^2=0^2)$

SL:

$k(x)=x$

$$\begin{cases} r^2R''+rR'+\mu r^2R=0,0\le r\le 1 \\ |R(0)|<\infty, R(1)=0. \end{cases}$$

这是零阶的贝塞尔固有值问题，因为有一个边界条件是I类边界条件，因而零不是固有值，设

$a=1$

$R \to$ $J_0(\omega_i)=0$ $J_0(w_i)=0$

的所有正解为$0<\omega_1<\omega_2<\cdots$。则对应固有值$\omega_n^2$，固有函数$J_0(\omega_n r)$，将固有值带入$Z_n$ 的方程，得到：

$\mu=w_n^2$

$$Z_n''-\omega_n^2Z_n=0.$$

$Z_n=A_ne^{\omega_n z}+B_ne^{-\omega_n z}$。从而

Z R

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_ne^{\omega_n z}+B_ne^{-\omega_n z})J_0(\omega_n r).$$

求系数，

$$u(r,1)=1-r^2=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{8}{\omega_i^3J_1(\omega_i)}J_0(\omega_i x), u(r,0)=0.$$

对照得

$$\begin{cases} A_n+B_n=0 \\ A_ne^{\omega_n}+B_ne^{-\omega_n}=\frac{\langle 1-r^2, J_0(\omega_n r)\rangle}{\langle J_0(\omega_n r), J_0(\omega_n r)\rangle}=\frac{8}{\omega_n^3J_1(\omega_n)} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A_n=\frac{8}{(e^{\omega_n}-e^{\omega_n})\omega_n^3J_1(\omega_n)} \\ B_n=-\frac{8}{(e^{\omega_n}-e^{\omega_n})\omega_n^3J_1(\omega_n)}. \end{cases}$$

从而

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(e^{\omega_n}-e^{\omega_n})\omega_n^3J_1(\omega_n)}(e^{\omega_n z}-e^{-\omega_n z})J_0(\omega_n r)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{sh(\omega_n)\omega_n^3J_1(\omega_n)}sh(\omega_n z)J_0(\omega_n r).$$

热方程

例子6. 有一半径为1 的无限长金属圆柱，初始温度为$1-r^2$，热传导系数/密度/比热都是1，侧面绝热，无热源，求圆柱体的温度变化。

$\Rightarrow a=1$

解. 容易知道温度分布与角度无关与z 无关，不妨设温度$u=u(t,r)$，因而可以写出定解问题

$$\begin{cases} u_t=\frac{\partial u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}, 0\le r\le 1, t>0 \\ u_r|_{r=1}=0 \\ u(0,r)=1-r^2. \end{cases}$$

$\to$ 表示侧面绝热

分离变量，设$u=T(t)R(r)$，得

$$\frac{T'}{T}=\frac{rR''+R'}{rR}. =-\lambda$$

$u_t=a^2\Delta u+f$

$a=\sqrt{\frac{k}{c\rho}}$

左边为t得函数，右边为r得函数，因而为常数，设为$-\lambda$，得到零阶固有值问题

$$\begin{cases} r^2R''+rR'+\lambda r^2R=0, 0\le r\le 1 \\ |R(0)|<\infty, R'(1)=0. \end{cases}$$

同乘以r

II类边界条件：$k(x)=x$，$k'(x)=1>0$.

自然边界条件

和

$$T'+\lambda T=0.$$

边界条件分别为自然边界条件和II类边界条件，因为$\lambda_0=0$为固有值，对应固有函数为$R_0=1$。设

$$J_0'(\omega)=0$$

得所有正解为$\omega_1<\omega_2<\cdots$，则固有值为ω_n^2，对应固有函数为$R_n=J_0(\omega_n r)$。代入固有值，解T_n的微分方程

$$T_n'+\omega_n^2T_n=0$$

得$T_0=A_0$和$T_n=A_ne^{-\omega_n^2t}$，$n\ge 1$。所以定解问题得解为

$$u(t,r)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-\omega_n^2t}J_0(\omega_n r).$$

代入初始条件

$1-r^2=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0(w_nr)$

拆开成：1，r^2分别在1，$J_0(W_ix)$上展开（见例4）

将$1-r^2$做展开

边界条件与之前相同.

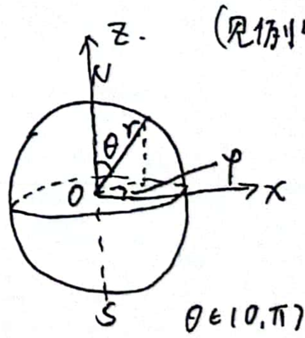
$$1-r^2=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\omega_n^2J_0(\omega_n)}J_0(\omega_n r).$$

对照得：

$$A_0=\frac{1}{2}, A_n=-\frac{4}{\omega_n^2J_0(\omega_n)}, n\ge 1.$$

所以

$$u(t,r)=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\omega_n^2J_0(\omega_n)}e^{-\omega_n^2t}J_0(\omega_n r).$$



$\theta\in[0,\pi]$.

0.5 勒让德固有值问题

在球坐标系，尤其是存在轴对称性的时候做变量分离，我们会碰到勒让德函数。

设有一个半径为a的金属球，内部无热源，表面的温度已知，为$f(\cos(\theta))$，$(r,\theta,\varphi), r\in[0,R], \theta\in[0,\pi], \varphi\in[0,2\pi)$为球极坐标系，$x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$。内部无热源，金属球处于热平衡，求温度分布？

在球极坐标下，拉普拉斯有如下形式：

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}.$$

很多物理问题，特别是静电场中的问题，都有轴对称性，这时候，解不依赖于φ，拉普拉斯可以化简为：

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right),$$

其中$u=u(r,\theta)$。

例如上述例子，设$u=u(r,\theta)$ 为温度分布，首先写出定解问题

$$\begin{cases}\Delta u=0\\ u(a,\theta)=f(\cos\theta)\end{cases}$$

分离变量，设$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，则有

$$\frac{1}{r^2}[r^2R']'\Theta+\frac{R}{r^2\sin\theta}[\sin\theta\Theta']'=0.$$

即

$$-\frac{[r^2R']'}{R}=\frac{[\sin\theta\Theta']'}{\sin\theta\Theta}.\ =-\lambda$$

为常值，设为$-\lambda$。得到固有值问题

$$(I)\quad\begin{cases}[\sin\theta\Theta']'+\lambda\sin\theta\Theta=0\\ |\Theta(0)|<\infty,|\Theta(\pi)|<\infty.\end{cases}$$

自然边界条件

→ 在N.S极处温度有限.

以及微分方程

$$-\frac{[r^2R']'}{R}=-\lambda.$$

做变量替换$x=\cos\theta$，则$x\in[-1,1]$，$\theta=\arccos x$。

不是坐标！仅是个符号

$$\frac{d}{d\theta}=\frac{d}{d\arccos x}=-\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx},\sin\theta=\sqrt{1-x^2}.$$

所以

$$[\sin\theta\Theta']'=\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\Theta)=-\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}(-(1-x^2)\frac{d}{dx}\Theta)=\sqrt{1-x^2}(-2x\frac{d\Theta}{dx}+(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}).$$

令$y(x)=\Theta(arccosx)$，则$\Theta(\theta)=y(\cos\theta)$，得到固有值问题

$$(II)\quad\begin{cases}(1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0.\\ |y(\pm1)|<\infty.\end{cases}$$

这是勒让德方程的固有值问题。其SL 型为

$$[(1-x^2)y']'+\lambda y=0.$$

$k=1-x^2$，$q=0$，$\rho=1$，两个边界条件都是自然边界条件，因而零是固有值，其他固有值都大于零。所有固有值都可以表示成$n(n+1)$，实际上只有当n 是非负整数的时候才有有界解，为了说明这件事情，我们还是像贝塞尔函数那样找两个线性无关的特解，假设解具有形式

$\lambda_0=0.\ y_0=1$

$\lambda_n=n(n+1).\ y_n=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

↓

n次多项式

↓

添加一个常数因子

变为$P_n(x)$，即$P_n(\cos\theta)$

$$y=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i.$$

带入固有值问题得

$$\sum_{i=0}^{\infty}i(i-1)a_ix^{i-2}-\sum_{i=0}^{\infty}i(i-1)a_ix^i-\sum_{i=0}^{\infty}2ia_ix^i+n(n+1)\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i=0.$$

从而

$$(i+2)(i+1)a_{i+2}-i(i-1)a_i-2ia_i+n(n+1)a_i=0.$$

即

$$a_{i+2}=\frac{(i-n)(i+n+1)}{(i+2)(i+1)}a_i.$$

令$a_0=a_1=1$，奇偶项分离，我们可以得到两个特解

$$y_1(x)=\sum_i a_{2i}x^{2i},$$

$$y_2(x)=\sum_i a_{2i+1}x^{2i+1}.$$

由递推公式：

$$\lim_{i\to\infty}\left|\frac{a_{2i}}{a_{2i-2}}\right|=\lim_{i\to\infty}\left|\frac{a_{2i+1}}{a_{2i-1}}\right|=1.$$

所以y_1 与y_2 得收敛半径至少都是1。并且y_1 为非零偶函数，y_2 为非零奇函数，y_1 和y_2 线性无关。即勒让德方程得所有解可以表示为

$$C_1y_1+C_2y_2.$$

当n 为非负整数得时候，我们按照奇偶性来讨论，1). $n=2k$ 为偶数，此时

$$a_{2k+2}=\frac{(2k-n)(2k+n+1)}{(2k+2)(2k+1)}a_{2k}=0.$$

顺带可以说明$a_{2i}=0, i=k+1,\cdots$. 即y_1 为多项式，因而$|y_1(\pm1)|<\infty$。2) 当n 为奇数得时候，也有类似讨论，在此略去。

当n 不是整数的时候，可以证明

$$\lim_{i\to\infty}a_{2i}=c_1\neq0, \lim_{i\to\infty}a_{2i+1}=c_2\neq0.$$

$y_1(1)$ 收敛性与$c_1\sum_i 1^{2i}$ 一致，极限趋向于$+\infty$ 或者$-\infty$。因为是偶函数，因而$y_1(1)=y_1(-1)=+\infty$ 或者$-\infty$。反之，y_2 的±1 的取值也是$\pm\infty$ 但符号相反。所以此时，y_1 和y_2 无论怎么线性组合，在±1 的取值都不可能同时有界，所以此时$n(n+1)$ 不是固有值。

所以（II）的固有值为

$$\boxed{\lambda_n=n(n+1), n=0,1,2,\cdots}.$$

λ_n 对应的固有函数为

$$\boxed{y_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.}$$

证明. 设$Y=(x^2-1)^n$，则

$$(x^2-1)Y'=2nx(x^2-1)^n=2nxY.$$

两边求$n+1$ 阶求导，用莱布尼兹求导公式得

$$\begin{aligned}[(x^2-1)Y']^{(n+1)}&=C_{n+1}^0(x^2-1)Y^{(n+2)}+C_{n+1}^1 2xY^{(n+1)}+C_{n+1}^2 2Y^{(n)}\\&=(x^2-1)Y^{(n+2)}+2(n+1)xY^{(n+1)}+n(n+1)Y^{(n)}.\end{aligned}$$

以及

$$[2nxY]^{(n+1)} = 2nxY^{(n+1)} + 2n(n+1)Y^{(n)}.$$

对照得并用$y_n = Y^{(n)}$ 替换得到

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda_n y = 0.$$

我们一般在y_n 前添加一个常数因子。

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} y_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

$p_n(x)$ 称为勒让德多项式，如果把$(x^2-1)^n$ 展开

$$(x^2-1)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!} x^{2n-2i}$$

得到

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^i \frac{(2n-2i)!}{2^n i!(n-i)!(n-2i)!} x^{n-2i}.$$

称为级数表示，$[\cdot]$ 取整符号。

简单计算容易得到

$$p_0(x) = 1,$$
$$p_1(x) = x,$$
$$p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1),$$
$$p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x).$$

$p_n(x)$ 为n 次多项式，当n 为偶数的时候为偶函数，当n 为奇数的时候为奇函数，$p_n(x)$ 的首项系数为$\frac{(2n)!}{2^n n! n!}$。

n次偶函数　　n次奇函数

现在我们已经有了$\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ 以及固有值$\lambda_n = n(n+1)$，

固有值问题(I) 的固有值同样为$\lambda_n = n(n+1)$，固有函数为$\Theta_n = p_n(\cos\theta), n = 1, 2, 3, \cdots$. 将固有值带到$R_n$ 的函数，有

$$-\frac{[r^2 R_n']'}{R_n} = -\lambda_n.$$

即

使该处变为1

$$r^2 R_n'' + 2rR_n' - n(n+1)R_n = 0.$$

这是一个欧拉方程，做变量替换$r = e^t$，得到

$$\frac{d^2 R_n}{dt^2} + \frac{dR_n}{dt} - n(n+1)R_n = 0.$$

$\to p^2 + p - n(n+1) = 0$

$\left\{ \begin{array}{l} n \\ -(n+1) \end{array} \right.$

解之，

$$R_n(r) = A_n e^{nt} + B_n e^{-(n+1)t} = A_n r^n + B_n r^{-n-1}.$$

(II)的固有值、固有函数

$$\begin{cases} \lambda_0=0, & y_0=1 \\ \lambda_n=n(n+1) & p_n=y_n=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_0=1 \\ P_1=x \\ P_2=\frac{1}{2}(3x^2-1) \\ P_3=\frac{1}{2}(5x^3-3x) \end{cases}$$

$\Theta_n=P_n(\cos\theta)$

所以

$$\boxed{u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n r^n+B_n r^{-n-1})p_n(\cos\theta).}$$ ☆☆☆(记).

在本例子中，$B_n=0$。令$r=a$，得到

实心球，u在0点有定义

代入边界条件 $u|_{r=a}=f(\cos\theta)$

$$f(\cos\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n a^n p_n(\cos\theta).$$

(1) 实心球 $B_n=0$

(2) $a<r<b$ A_n . B_n 都求

(3) $r>a$. $\lim_{r\to\infty}u=0$ $A_n=0$

(4) $r>a$. u有界. $A_n=0$ $(n\neq 0)$

需要将$f(\cos\theta)$ 做类似傅里叶分解：

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}A_n a^n p_n(\cos\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\langle f,p_n\rangle}{\langle p_n,p_n\rangle}p_n}$$

$$f(\cos\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n p_n(\cos\theta).$$

其中

$$A_n a^n = f_n=\frac{\int_0^{\pi}f(\cos\theta)p_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta}{\int_0^{\pi}p_n^2(\cos\theta)\sin\theta d\theta}=\frac{\int_{-1}^{1}f(x)p_n(x)dx}{\int_{-1}^{1}p_n^2(x)dx}.$$

$$\langle f,p_n\rangle=\int_0^{\pi}f(\cos\theta)p_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta \quad \rho=\sin\theta$$

$$=\int_{-1}^{1}f(x)p_n(x)dx$$

对照得，$A_n=\frac{f_n}{a^n}$ 以及

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(\frac{r}{a})^n p_n(\cos\theta).$$

为了求系数，我们需要将连续函数沿着p_n 做傅里叶分解。由SL 理论，$\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ 是一组完备正交基，从而可以把$[-1,1]$上的符合边界条件的连续函数分解为$\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的线性组合，且一致收敛，不符合的也能分解，除了可能边界上不收敛/整体不一致收敛其他都对。从而可以得到几个简单的事实：

(1) 当$m\neq n$ 时候$\int_{-1}^{1}p_n(x)p_m(x)dx=0$； 正交性 ☆

(2) 设$P_n(x)=a_0+\cdots+a_n x^n$ 为n 次多项式，则$P_n(x)$ 可以由$p_0,p_1,\cdots,p_n$ 线性组合，系数可以用待定系数法确定，且p_n 前面的系数等于$a_n\frac{2^n n!n!}{(2n)!}$；

(3) 如果$m\leq n$，则$\int_{-1}^{1}P_m(x)p_n(x)dx=0$；

(4) 如果多项式$P_n(x)$ 只有奇次项，则展开成$\{p_{2n+1}\}$ 的线性组合；如果多项式$P_n(x)$ 只有偶次项，则展开成$\{p_{2n}\}$ 的线性组合。 ☆

☆ **例子7.** 设有一个半径为a 的金属球，球表面的温度已知，为$f(\cos\theta)=\cos^2(\theta)$，内部无热源，金属球处于热平衡，求温度分布？

解. 取极坐标$(r,\theta,\varphi),r\in[0,a],\theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi)$表面温度与$\varphi$无关，由对称性，球内的温度分布也与$\varphi$ 无关，因而可以假设$u=u(r,\theta)$。写出定解问题为：

$$\begin{cases} \Delta u=0,r<a,\theta\in[0,\pi] \\ u|_{r=a}=\cos^2(\theta) \end{cases}$$

由以上讨论可知，第一步，写出解的形式

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n r^n+\underbrace{B_n r^{-n-1}}_{0})p_n(\cos\theta).$$ ☆

球心温度有限，因而$B_n = 0$，所以

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n p_n(\cos\theta).$$

令$r = a$ 得到

$$\overset{x^2}{\cos^2\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n p_n(\cos\theta).$$

看坐标x.

$x^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n a^n p_n(x)$

偶.

对照可得，除了p_0, p_2 项之外，其余全部为0。所以

$$\cos^2\theta = A_0 + A_2 a^2 (\frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)).$$

$x^2 = C_0 + C_2 p_2(x)$

$(\because p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1))$

$= C_0 + \frac{C_2}{2}(3x^2-1)$

解得$A_0 = \frac{1}{3}, A_2 = \frac{2}{3a^2}$。所以

$$u(r,\theta) = \frac{1}{3} + \frac{2r^2}{3a^2} p_2(\cos\theta) = \frac{r^2}{a^2}\cos^2\theta + (\frac{1}{3} - \frac{r^2}{3a^2}).$$

$\Rightarrow C_0 = \frac{1}{3}, C_2 = \frac{2}{3}$

$\therefore x^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} p_2(x)$

$\therefore A_0 = \frac{1}{3} \quad A_2 a^2 = \frac{2}{3}$

例子8. 设有一个半径为R厚度为$R/2$ 的空心球，外表面的温度为$\cos^2(\theta)$，内表面的温度为$\cos(\theta)$，空心球处于热平衡，求温度分布？

解. 取极坐标$(r,\theta,\varphi), r \in [0,a], \theta \in [0,\pi], \varphi \in [0, 2\pi)$表面温度与$\varphi$无关，由对称性，空心球内的温度分布也与$\varphi$ 无关，因而可以假设$u = r(r,\theta)$。写出定解问题为：

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 \le r \le a, \theta \in [0,\pi] \\ u|_{r=R} = \cos^2(\theta) \end{cases}$$

$u|_{r=\frac{R}{2}} = \cos\theta$

由以上讨论可知，

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) p_n(\cos\theta).$$

注意到

$\cos^2\theta = u(R,\theta) = \sum_{n=0}^{2} (A_n R^n + B_n R^{-n-1}) p_n(\cos\theta)$

$$\cos\theta = p_1(\cos\theta),$$
$$\cos^2\theta = \frac{1}{3}p_0(\cos\theta) + \frac{2}{3}p_2(\cos\theta).$$

$\cancel{A_nR^n + B_nR^{-n-1} =}$

$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}p_2(x).$

分别带入R 和$R/2$ 得$A_n = B_n = 0, n \ge 3$ 以及

$$\begin{cases} A_0 + \frac{B_0}{R} = \frac{1}{3} \\ A_0 + \frac{2B_0}{R} = 0. \end{cases}$$

$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}p_2(x) = (A_0 + \frac{B_0}{R}) \cdot p_0(\cos\theta) \to 1$

这3个怎么来的？

$$\begin{cases} A_1 R + \frac{B_1}{R^2} = 0 \\ \frac{A_1 R}{2} + \frac{4B_1}{R^2} = 1. \end{cases}$$

$+ (A_1 R + \frac{B_1}{R^2}) p_1(\cos\theta) \to x$

(由内表面温度)

$$\begin{cases} A_2 R^2 + \frac{B_2}{R^3} = \frac{2}{3} \\ \frac{A_2 R^2}{4} + \frac{8B_2}{R^3} = 0. \end{cases}$$

$+ (A_2 \cdot R^2 + \frac{B_2}{R^3}) \cdot p_2(\cos\theta).$

解得$A_0 = \frac{2}{3}, B_0 = -\frac{R}{3}, A_1 = -\frac{2}{7R}, B_1 = \frac{2}{7}R^2, A_2 = \frac{64}{93R^2}, B_2 = -\frac{2}{93}R^3$。最终结果我们就直接省略了。

$$\therefore \begin{cases} A_0 + \frac{B_0}{R} = \frac{1}{3} \\ A_1 R + \frac{B_1}{R^2} = 0 \\ A_2 R^2 + \frac{B_2}{R^3} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

关于半球问题：第一类边界条件奇展开，且只有奇数次项；第二类边界条件偶展开，且只有偶次项。

例子9. 设有一个半径为a的金属半球，球表面的温度已知，为$\cos^2(\theta)$，内部无热源，金属半球处于热平衡，根据以下情况分别求温度分布？

(1) 底部绝热； $u_z|_{z=0}=0$ 绝热

$$\begin{cases} \Delta u=0, & 0\le r\le a, \quad \theta\in[0,\frac{\pi}{2}) \\ u|_{r=a}=\cos^2\theta \\ u_z|_{z=0}=0 \end{cases}$$

(2) 底部恒温 = 0。

解. (1)把半球补成一个完整得球，要使得底部绝热，仅需让球得表面温度上下对称即可，即

$$\begin{cases} \Delta u=0, 0\le r\le a, \theta\in[0,\pi] \\ u|_{r=R}=\cos^2(\theta). \end{cases}$$

偶扩充 $\cos^2(\pi-\theta)=\cos^2\theta$

就是上上例子。例7

(2)把半球补成一个完整得球，要使得底部恒温0，仅需让球得表面温度上下反对称即可，即 奇扩充

$$\begin{cases} \Delta u=0, 0\le r\le a, \theta\in[0,\pi] \\ u|_{r=R}=\cos^2(\theta), \theta\in[0,\frac{\pi}{2}] \\ u|_{r=R}=-\cos^2(\theta), \theta\in[\frac{\pi}{2},\pi]. \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in(0,1) \\ -x^2 & x\in(-1,0) \end{cases}$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\langle f,P_n\rangle}{\langle P_n,P_n\rangle}P_n$$

我们暂时没法求系数。

$$\langle P_n,P_n\rangle=\frac{2}{2n+1}$$

0.5.1 勒让德函数的母函数与递推公式

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)t^n$$

勒让德函数的母函数为

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}, x\in[-1,1], -1<t<+1.$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n=\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^i\frac{(2n-2i)!\,x^{n-2i}}{2^n i!(n-i)!(n-2i)!}$$

我们尝试对t 在0 点Tayler展开。

$$(1+s)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{-\frac{1}{2}}^k s^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})!}{k!(-\frac{1}{2}-k)!}s^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2}-k)}s^k.$$

$$(1+s)^n=\sum_i C_n^i s^i=\sum_i\frac{n!\,s^i}{i!(n-i)!}=\sum_i\frac{\Gamma(n+1)\,s^i}{\Gamma(i+1)\Gamma(n-i+1)}$$

回忆Γ 函数，$\Gamma(x+1)=x!$。所以

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2}-k)}(t^2-2xt)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2}-k)}t^k(t-2x)^k.$$

t^n 前面的系数

$$(1+s)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{+\infty}C_{-\frac{1}{2}}^k s^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2}-k)}C_k^{n-k}(-2x)^{2k-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2}-k)}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(2k-n+1)}(-2x)^{2k-n}.$$

注意到

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s).$$

勒让德母函数用处大.

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)t^n \qquad P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

所以

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-k)} = (\frac{1}{2}-k)\times(\frac{1}{2}-(k-1))\times\cdots\times(\frac{1}{2}-1) = \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}k!}.$$

所以t^n 前系数为

$$= \sum_{k=\lceil \frac{n}{2}\rceil}^{n} \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}k!}\frac{1}{(n-k)!(2k-n)!}(-2x)^{2k-n}.$$

其中= $\lceil \frac{n}{2}\rceil$ 为不小于 $\frac{n}{2}$ 的最小整数。替换$l=n-k$ 则有上式等于

$$\sum_{l=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^{n-l}(2n-2l)!}{2^{2n-2l}(n-l)!}\frac{1}{l!(n-2l)!}(-2x)^{n-2l} = \sum_{l=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^l(2n-2l)!}{2^n(n-l)!l!(n-2l)!}x^{n-2l} = p_n(x).$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)t^n.$$

令$x=1$ 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(1)t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$

对照得

$$p_n(1) = 1.$$

令$x=-1$ 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(-1)t^n = \frac{1}{\sqrt{1+2t+t^2}} = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n.$$

对照得

$$p_n(-1) = (-1)^n.$$

令$x=0$ 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(0)t^n = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{-\frac{1}{2}}^{k} t^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2}-k)}t^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}k!k!}t^{2k}.$$

对照得: n 为奇数，则$p_n(0)=0$；$n=2k$ 为偶数，则$p_n(0)=\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}k!k!}$。利用母函数可以导出勒让德多项式的递推公式($n\geq 1$)。

(1) $(n+1)p_{n+1}(x) - x(2n+1)p_n(x) + np_{n-1}(x) = 0$;

(2) $np_n(x) - xp_n'(x) + p_{n-1}'(x) = 0$;

(3) $np_{n-1}(x) - p_n'(x) + xp_{n-1}'(x) = 0$;

(4) $p_{n+1}'(x) - p_{n-1}'(x) = (2n+1)p_n(x)$。 $\longrightarrow$ $P_n = \frac{1}{2n+1}(P_{n+1}' - P_{n-1}')$

证明. 记$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$，则

$$\varphi_t = (x-t)\varphi^3,$$

$$\varphi_x = t\varphi^3.$$

先证明(1)

$$\varphi_t = \sum_{n=1}^{\infty} np_n(x)t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)p_{n+1}(x)t^n,$$

$$2t\varphi_t + \varphi = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)p_n(x)t^n,$$

$$t\varphi + t^2\varphi_t = \sum_{n=0}^{\infty} np_{n-1}(x)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} np_{n-1}(x)t^n.$$

所以

$$\sum_{n\geq 0}((n+1)p_{n+1}(x) - x(2n+1)p_n(x) + np_{n-1}(x))t^n = \varphi_t - 2xt\varphi_t - x\varphi + t\varphi + t^2\varphi_t.$$

注意到

$$\varphi_t - 2xt\varphi_t + t^2\varphi_t = [1-2xt+t^2](x-t)\varphi^3 = (x-t)\varphi.$$

所以$(n+1)p_{n+1}(x) - x(2n+1)p_n(x) + np_{n-1}(x) = 0, n \geq 1.$

再证明(2).

$$\varphi_x = \sum_{n=0}^{\infty} p_n'(x)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n'(x)t^n.$$

所以

$$t\varphi_t - x\varphi_x + t\varphi_x = \sum_{n\geq 1}(np_n(x) - xp_n'(x) + p_{n-1}'(x))t^n.$$

注意到

$$t\varphi_t - x\varphi_x + t\varphi_x = [t(x-t) - xt + t^2]\varphi^3 = 0.$$

所以$np_n(x) - xp_n'(x) + p_{n-1}'(x) = 0, n \geq 1$。

再证明(3).

$$(t\varphi + t^2\varphi_t) - \varphi_x + tx\varphi_x = \sum_{n\geq 1}(np_{n-1}(x) - p_n'(x) + xp_{n-1}'(x))t^n.$$

注意到

$$(t\varphi + t^2\varphi_t) - \varphi_x + tx\varphi_x = t\varphi + [t^2(x-t) - t + t^2x]\varphi^3 = t\varphi - t[1-2xt+t^2]\varphi^3 = 0.$$

所以$np_{n-1}(x) - p_n'(x) + xp_{n-1}'(x), n \geq 1$。

最后证明(4).

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_x}{t} - t\varphi_x - (2t\varphi_t + \varphi) &= p_1'(x) - p_0(x) + \sum_{n\geq 1}(p_{n+1}'(x) - p_{n-1}'(x) - (2n+1)p_n(x))t^n \\ &= \sum_{n\geq 1}(p_{n+1}'(x) - p_{n-1}'(x) - (2n+1)p_n(x))t^n.\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{\varphi_x}{t} - t\varphi_x - (2t\varphi_t + \varphi) = -\varphi + [1 - t^2 - 2t(x-t)]\varphi^3 = \varphi + \varphi = 0.$$

所以$p_{n+1}'(x) - p_{n-1}'(x) = (2n+1)p_n(x)$。

例子10. $m,n\geq 0$ 正整数，求积分

$$\int_0^1 x^m p_n(x)dx.$$

解. 我们先处理两种简单情形。

$n=0$ 时候，化为 $\int_0^1 x^m p_0(x)dx=\int_0^1 x^m dx=\frac{1}{m+1}$.

$m=0, n\geq 1$ 的时候，

$$\int_0^1 p_n(x)dx=\frac{1}{2n+1}\int_0^1 p'_{n+1}(x)-p'_{n-1}(x)dx=\frac{-p_{n+1}(0)+p_{n-1}(0)}{2n+1}.$$

特别地，当n 为非零偶数的时候为0。

当$m,n\geq 1$ 的时候，

利用递推公式(2)

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^m p_n(x)dx &= \frac{1}{n}\int_0^1 x^m(xp'_n(x)-p'_{n-1}(x))dx\\ &= \frac{1}{n}\left(\underbrace{(x^{m+1}p_n(x)-x^m p_{n-1}(x))|_0^1}_{\text{消掉了}}-\int_0^1 (m+1)x^m p_n(x)-mx^{m-1}p_{n-1}(x)dx\right)\\ &= \frac{1}{n}\left(-\int_0^1 (m+1)x^m p_n(x)-mx^{m-1}p_{n-1}(x)dx\right).\end{aligned}$$

so-easy!

整理得

$$\boxed{\int_0^1 x^m p_n(x)dx=\frac{m}{m+n+1}\int_0^1 x^{m-1}p_{n-1}(x)dx.}$$

☆☆☆ 记住!!!

$(m,n)\to(m-1,n-1)$ 重复上述过程最终可以化成简单情形。而且容易看出把积分区域换成$[-1,0]$或者$[-1,1]$，这种流程依然成立。例如

$$\int_{-1}^1 p_4(x)x^4dx=\frac{4}{9}\int_{-1}^1 p_3(x)x^3dx=\frac{4}{21}\int_{-1}^1 p_2(x)x^2dx=\frac{8}{105}\int_{-1}^1 p_1(x)x^1dx=\frac{8}{315}\int_{-1}^1 p_0(x)x^0dx=\frac{16}{315}.$$

0.5.2 勒让德傅里叶展开 (L-F展开)

求范数 $\langle p_n,p_n\rangle=\int_{-1}^1 p_n^2(x)dx$

在处理勒让德固有值问题的时候，我们需要求

$$\int_{-1}^1 p_n^2(x)dx.$$

为此，我们将母函数平方后从-1 到1 做积分。 对x做积分

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1-2xt+t^2}dx=\sum_n\sum_m\int_{-1}^1 p_n(x)p_m(x)t^{m+n}dx.$$

左边原函数$\frac{\ln(1-2xt+t^2)}{-2t}$，所以

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1-2xt+t^2}dx=\frac{\ln(1-2xt+t^2)}{-2t}\Big|_{-1}^1=\frac{\ln(1+t)-\ln(1-t)}{t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}t^{2n}.$$

Taylor展开

右边由SL 理论，当$m\neq n$ 的时候$\int_{-1}^1 p_n(x)p_m(x)dx=0$。所以右边等于

$$\sum_n\left(\int_{-1}^1 p_n^2(x)dx\right)t^{2n}.$$

~~$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}$~~

$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\cdots$

对照得

$$\langle p_n, p_n\rangle = \int_{-1}^{1} p_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$$

例子11. 求积分

$$\int_{-1}^{1} p_4(x)(\cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{2x^2} + \cancel{3x^3} + 4x^4)dx.$$

解. 可以将$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4$展开为

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 = C_0p_0 + C_1p_1 + C_2p_2 + C_3p_3 + C_4p_4.$$

正交性

我们只需要关心C_4，因为

$$p_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

if $n \neq m$，则

$$\langle X_n, X_m\rangle = \int_a^b X_n(x)X_m(x)\rho(x)dx = 0$$

所以$C_4 = \frac{32}{35}$。所以

$$\int_{-1}^{1} p_4(x)(1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4)dx = \frac{32}{35}\int_{-1}^{1} p_4^2(x)d(x) = \frac{32}{35} \times \frac{2}{9} = \frac{64}{315}.$$

至此，由SL理论，任何$(-1, 1)$上得连续有界函数都可以用勒让德多项式展开。

例子12. 将

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < \alpha \\ 1/2 & x = \alpha \\ 1 & \alpha < x < 1. \end{cases}$$

按勒让德多项式展开。

$$\langle p_n, p_n\rangle = \frac{2}{2n+1}.$$

$$\langle f, p_n\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)p_n(x)dx$$

$$= \int_\alpha^1 p_n(x)dx$$

递推公式(4)

$$= \frac{1}{2n+1}\int_\alpha^1 (p_{n+1}' - p_{n-1}')dx$$

$$= \frac{1}{2n+1}(p_{n+1} - p_{n-1})\Big|_\alpha^1$$

$$= \frac{1}{2n+1}[p_{n-1}(\alpha) - p_{n+1}(\alpha)]$$

解.

~~$p_0 = 1$~~ $p_0(x) = 1$

① 当 $n = 0$ 时，$\int_{-1}^{1} f(x)p_0(x)dx = \int_\alpha^1 p_0(x)dx = 1 - \alpha.$

② 当$n \geq 1$，

$$\int_{-1}^{1} f(x)p_n(x)dx = \cancel{\frac{1}{2n+1}}\int_\alpha^1 p_n(x)dx = \frac{1}{2n+1}\int_\alpha^1 p_{n+1}'(x) - p_{n-1}'(x)dx = \frac{p_{n-1}(\alpha) - p_{n+1}(\alpha)}{2n+1}.$$

勒让德没有定义 p_{-1}

∴应分类讨论

$\begin{cases} n \geq 1 \\ n = 0 \end{cases}$

所以

$$f = \sum \frac{\langle p_n, f\rangle}{\langle p_n, p_n\rangle} p_n$$

$$f(x) = \frac{1-\alpha}{2}p_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n-1}(\alpha) - p_{n+1}(\alpha)}{2}p_n(x).$$

现在我们可以处理上节的半球问题。

例子13.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 \leq r \leq a, \theta \in [0, \pi] \\ u|_{r=R} = \cos^2(\theta), \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ u|_{r=R} = -\cos^2(\theta), \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

当$n=0$时，

$$\langle f, p_0\rangle = \int_\alpha^1 1\,dx = 1 - \alpha$$

解. 由前面的讨论可知，定解问题的解可以表示为

$$u = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n r^n + B_n r^{-n-1})p_n(\cos\theta).$$

因为$|u(0,\theta)| < \infty$，所以$B_n = 0$。所以

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n p_n(\cos\theta).$$

令$r = R$ 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n p_n(\cos\theta) = \begin{cases} \cos^2(\theta), \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\cos^2(\theta), \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n p_n(x) = f(x) = \begin{cases} x^2, x \in [0,1] \\ -x^2, x \in [-1,0]. \end{cases}$$

我们将$f(x)$ 按勒让德多项式分解

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n p_n(x).$$

其中

$$C_n = \frac{\langle f(x), p_n(x)\rangle}{\langle p_n(x), p_n(x)\rangle}.$$

$\langle p_n, p_n \rangle = \frac{2}{2n+1}$

注意到$f(x)$ 为奇函数，所以当n 为偶数得时候，

$$\langle f(x), p_n(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)p_n(x)dx = 0.$$

当n 为奇数得时候，如果$n = 1$

$\langle f, p_1 \rangle = 2\int_0^1 x^2 \cdot x\, dx = \frac{1}{2}$

$$\langle f(x), p_1(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)p_1(x)dx = 2\int_0^1 x^2 p_1(x)dx = \int_0^1 x p_0(x)dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

当n 为奇数且$n \geq 3$ 时

→偶.

$$\boxed{\int_0^1 x^m p_n(x)\,dx = \frac{m}{m+n+1}\int_0^1 x^{m-1} p_{n-1}(x)\,dx \quad (m.n \geq 1)}$$

$$\begin{aligned}\langle f(x), p_n(x)\rangle &= \int_{-1}^{1} f(x)p_n(x)dx \\ &= 2\int_0^1 x^2 p_n(x)dx = \frac{4}{n+3}\int_0^1 x p_{n-1}(x)dx = \frac{4}{(n+3)(n+1)}\int_0^1 p_{n-2}(x)dx \\ &= \frac{4(p_{n-3}(0) - p_{n-1}(0))}{(n+3)(n+1)(2n-3)}.\end{aligned}$$

→写出这个式子后发现$n \geq 3$

妙!

$\therefore \Rightarrow f(x) = \frac{3}{4}p_1 + \sum_{n\text{奇}, n\geq 3} \frac{2(p_{n-3}(0) - p_{n-1}(0))(2n+1)}{(n+3)(n+1)(2n-3)} p_n$. 对照系数 $\Rightarrow A_1, A_n$

所以

$$u = \frac{3r}{4R}p_1(\cos\theta) + \sum_{n\text{ 为奇数}, n\geq 3} \frac{2(2n+1)(p_{n-3}(0) - p_{n-1}(0))}{(n+3)(n+1)(2n-3)}\left(\frac{r}{R}\right)^n p_n(\cos\theta).$$

例子14. 一个半径为a 的空心金属球壳内部有一个点电荷$4\pi\epsilon_0 q$ (ϵ_0 是真空介电常数)，它与球心的距离为b，求球内电势分布。

解. 假设点电荷处于z正轴上，则由轴对称性，电势与φ无关。我们可以把电势分成两部分，一部分是由点电荷产生的电势为

$$\varphi_1(x,y,z)=\frac{q}{\rho(x,y,z)}$$

其中

$$\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}=\sqrt{r^2\sin^2\theta+(r\cos\theta-b)^2}=\sqrt{r^2-2br\cos\theta+b^2}.$$

另一部分是由球壳上的感应电荷产生的电势，满足

$$\begin{cases}\Delta u=0 & x^2+y^2+z^2<a^2\\ u|_{r=a}=-\frac{q}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+(a\cos\theta-b)^2}}\end{cases}$$

上述定解问题的解可以表示为

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}(A_nr^n+B_nr^{-n-1})p_n(\cos\theta).$$

球壳上的感应电荷在球心的电势有界，所以$B_n=0$。所以

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}A_nr^np_n(\cos\theta).$$

我们将边界电势按勒让德多项式进行分解

$$-\frac{q}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+(a\cos\theta-b)^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}C_np_n(\cos\theta).$$

其中

$$C_n=\frac{2n+1}{2}\times\int_0^{\pi}-\frac{q}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+(a\cos\theta-b)^2}}p_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta=-\frac{(2n+1)q}{2a}\int_{-1}^{1}\frac{p_n(x)}{\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2-2\frac{b}{a}x}}dx.$$

由母函数公式

$$\int_{-1}^{1}\frac{p_n(x)}{\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2-2\frac{b}{a}x}}dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-1}^{1}p_n(x)p_k(x)(\frac{b}{a})^kdx=(\frac{b}{a})^n\times\frac{2}{2n+1}.$$

所以,

$$C_n=-\frac{b^nq}{a^{n+1}}=A_na^n\Rightarrow A_n=-\frac{b^nq}{a^{2n+1}}.$$

所以

$$u=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^nq}{a^{2n+1}}r^np_n(\cos\theta)=-\frac{q}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{br}{a^2})^np_n(\cos\theta).$$

再次用母函数公式。

$$u=-\frac{q}{a}\times\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{br}{a^2}\cos\theta+(\frac{br}{a^2})^2}}=-\frac{q}{\sqrt{a^2-2br\cos\theta+(\frac{br}{a})^2}}.$$

所以电势

$$\varphi=\varphi_1+u=\frac{q}{\sqrt{r^2-2br\cos\theta+b^2}}-\frac{q}{\sqrt{a^2-2br\cos\theta+(\frac{br}{a})^2}}$$

1 积分变换法

1.1 傅里叶变换法

设$f(x)$ 为$(-\infty,+\infty)$ 的①逐段连续函数，则傅里叶变换定义为

$$F[f(x)]$$

$$F[f]=F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda x}dx$$

与《信号与系统》中的不一样

$$X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-jwt}dt$$

一般来说，我们会要求f 是②绝对可积的，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty.$$

如果需要的话，我们一般还会假设$f(\pm\infty)=0,f'(\pm\infty)=0\cdots$，我们默认需要的时候这些条件都是自动成立。（在广义下很多条件都可以无视，所以一般形式演算流程没有错误的话，结果也不会有错误。）在绝对可积性假设下，$F(\lambda)$ 是$(-\infty,+\infty)$ 上的有界连续函数。并且有反演公式

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda.$$

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\approx f(x).$$

除了有限个点以外都一样.

特别地，如果f 还是连续的，则

$\because \delta(x)\xleftrightarrow{F}1$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda.$$

$\therefore \delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda x}d\lambda$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

这两个积分很常用！

傅里叶变换有很多和拉普拉斯变换相似的性质。以下列出部分性质。

(1) 线性性质：$F[C_1f+C_2g]=C_1F[f]+C_2F[g]$；

(2) 频移性质：$F[f(x)e^{i\lambda_0x}]=F(\lambda+\lambda_0)$；

$$F[f(x)e^{i\lambda_0x}]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda_0x}e^{i\lambda x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i(\lambda+\lambda_0)x}dx=F(\lambda+\lambda_0).$$

(3) 位移性质：$F[f(x+a)]=F(\lambda)\times e^{-i\lambda a}$；

$$F[f(x+a)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x+a)e^{i\lambda x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda(x-a)}dx=e^{-i\lambda a}F(\lambda).$$

$\because \delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda x}d\lambda$

(4) 相似性质：$a>0,F[f(ax)]=\frac{1}{a}F(\frac{\lambda}{a})$；

$$F[f(ax)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(ax)e^{i\lambda x}dx=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda\frac{x}{a}}dx=\frac{1}{a}F(\frac{\lambda}{a}).$$

$\therefore \delta(x\pm at)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda(x\pm at)}d\lambda$

(5) 微分性质：$F[f^{(n)}(x)]=(-i\lambda)^nF(\lambda)$；　假设$f(\pm\infty)=0$，$f'(\pm\infty)=0$

仅需说明$n=1$ 的情形即可：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)e^{i\lambda x}dx=f(x)e^{i\lambda x}|_{-\infty}^{\infty}-i\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda x}dx=-i\lambda F(\lambda).$$

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\lambda x\,d\lambda.$$

乘积的逆变换＝逆变换的卷积

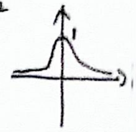
$F^{-1}[F[f]\times F[g]]=f*g$

(6) 卷积性质：$F[f*g]=F[f]\times F[g]$。这里的卷积定义为

$$f*g=\int_{-\infty}^{\infty}f(s)g(x-s)ds.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(s)g(x-s)ds\right)e^{i\lambda x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\left(\int_{-\infty}^{\infty}g(x-s)e^{i\lambda x}dxds\right)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(s)F[g]e^{i\lambda s}ds=F[f]F[g].$$

e^{-x^2}



常用的是它的反变换，

$$\boxed{F^{-1}[fg]=F^{-1}[f]*F^{-1}[g].}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}}$$

一些经典的傅里叶变换与反变换：设$a>0$，则：

$$\boxed{F[e^{-ax^2}]}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}e^{i\lambda x}dx=e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\sqrt{a}x-\frac{\lambda}{2\sqrt{a}}i)^2}dx=\boxed{\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}.}$$

最好会推.

$$=e^{-\lambda^2/4a}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\sqrt{a}x)^2}d(\sqrt{a}x)\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}$$

反之

$$\boxed{F^{-1}[e^{-a\lambda^2}]}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a\lambda^2}e^{-i\lambda x}d\lambda=\boxed{\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}.}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$$

高维傅里叶变换：设$f(x,y,z)$ 为$\mathbb{R}^3$ 上的逐段连续函数，满足

$$\iiint|f|dxdydz<\infty.$$

则有傅里叶变换

$$F(\lambda,\mu,\nu)=\iiint f(x,y,z)e^{i(\lambda x+\mu y+\nu z)}dxdydz.$$

傅里叶反变换为

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=1$$

$$f(x,y,z)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint F(\lambda,\mu,\nu)e^{-i(\lambda x+\mu y+\nu z)}d\lambda d\mu d\nu.$$

有类似的微分性质：

$$F[\frac{\partial f}{\partial x}]=-i\lambda F[f],F[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}]=-\lambda^2F[f].$$

特别地：

$$F[\Delta_3 f]=-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)F[f].$$

例子1. 用傅里叶变换求解热传导方程的初始问题。

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx},-\infty<x<+\infty,t>0\\ u(0,x)=\varphi(x)\end{cases}$$

解. 设

一个符号，表示对 $u(t,x)$ Fourier变换.

$$\bar{u}(t,\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t,x)e^{i\lambda x}dx.$$

则

先变过来再变回去.

$$\bar{u}_t=-\lambda^2a^2\bar{u}.$$

$$\bar{u}_t=a^2\cdot(-i\lambda)^2\bar{u}=-\lambda^2a^2\bar{u}$$

$$\to\bar{u}=C(\lambda)e^{-\lambda^2a^2t}$$

$$\underline{\bar{u}(0,\lambda) = F[\varphi].}$$

得

$$\underline{\bar{u}(t,\lambda) = C(\lambda)e^{-\lambda^2 a^2 t}.}$$ 代入 $t=0 \to F[\varphi]=C(\lambda)$

由初始条件

$$C(\lambda) = F[\varphi].$$

所以

$$\therefore \underline{\bar{u} = F[\varphi]e^{-\lambda^2 a^2 t}.}$$ $\therefore u = F^{-1}[\bar{u}]$

所以

$$u(t,x) = F^{-1}[F[\varphi]] * F^{-1}[e^{-\lambda^2 a^2 t}] = \varphi * \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}\right) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x-s)e^{-\frac{s^2}{4a^2 t}}ds.$$

稍微变换一下: $= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t}\cdot e^{-i\lambda x}d\lambda = \cancel{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t}\cos\lambda x\, d\lambda}$

例子2. 用傅里叶变换求解热传导方程的初始问题。

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u, -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(0,x) = e^{-x^2} \end{cases}$$

好像 Fourier 变换适合于
{ 热传导方程/热平衡 $\Delta u = 0$
{ $-\infty < x < +\infty$ 无边界.

解. 设

$$\bar{u}(t,\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)e^{i\lambda x}dx.$$

则

$$\bar{u}_t = -\lambda^2\bar{u} + \bar{u}.$$

$$\bar{u}(0,\lambda) = F[e^{-x^2}].$$

$\frac{d\bar{u}}{dt} = (-\lambda^2+1)\bar{u}$

$\frac{d\bar{u}}{\bar{u}} = (-\lambda^2+1)dt$

$\therefore \ln\bar{u} = (-\lambda^2+1)t + C$

$\therefore \bar{u} = C(\lambda)e^{(-\lambda^2+1)t}$

得

$$\bar{u}(t,\lambda) = C(\lambda)e^{-(\lambda^2-1)t}.$$

由初始条件

$$C(\lambda) = F[e^{-x^2}].$$

所以

$$\bar{u} = F[e^{-x^2}]e^{-(\lambda^2-1)t}.$$

所以

$$u(t,x) = F^{-1}[F[\varphi]] * F^{-1}[e^{-(\lambda^2-1)t}] = e^{-x^2} * \left(\frac{e^t}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = \frac{e^t}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-s)^2}e^{-\frac{s^2}{4t}}ds.$$

$= F^{-1}[e^{-\lambda^2 t}e^t]$

~~$\because F^{-1}$ 是对 λ. 除 λ 以外, 其余均常数~~
~~$\therefore F^{-1}[e^{-\lambda^2 t}e^t]$~~

最后结果

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}}e^{t-\frac{1}{1+4t}x^2}.$$

特征 → 不是达朗贝尔就是 Fourier 变换.

~~$= e^t \cdot F^{-1}[e^{-\lambda^2 t}]$~~ ×

例子3. 解定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0, -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(0,x) = \varphi(x), u_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

~~$= F^{-1}[e^{-\lambda^2 t}]$~~

~~利用公式. 其中 a 可~~.

$= e^t \cdot F^{-1}[e^{-\lambda^2 t}]$ 代入之前公式.

相当于 $a=t$.

解. 设

$$\bar{u}(t,\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t,x)e^{i\lambda x}dx.$$

则

$$\bar{u}_{tt}+a^2\lambda^4\bar{u}=0.$$

$$\bar{u}(0,\lambda)=F[\varphi],$$

$$\bar{u}_t(0,\lambda)=0.$$

得

$$\bar{u}(t,x)=C_1(\lambda)\cos(a\lambda^2 t)+C_2(\lambda)\sin(a\lambda^2 t).$$

由初始条件

$$\begin{cases} C_1(\lambda)=F[\varphi] \\ C_2(\lambda)=0. \end{cases}$$

所以

$$\bar{u}=F[\varphi]\cos(a\lambda^2 t).$$

所以

$$u(t,x)=F^{-1}[F[\varphi]]*F^{-1}[\cos(a\lambda^2 t)].$$

需要计算$F^{-1}[\cos(a\lambda^2 t)]$，即求 $\Rightarrow = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(a\lambda^2 t)e^{-i\lambda x}d\lambda. = Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ia\lambda^2 t}e^{-i\lambda x}d\lambda\right)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ia\lambda^2 t-i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}e^{-i\frac{x^2}{4at}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iat(\lambda-\frac{x}{2at})^2}d\lambda=\frac{1}{2\pi}e^{-i\frac{x^2}{4at}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iat\lambda^2}d\lambda.$$

要计算$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}e^{iat\lambda^2}d\lambda.}$即

$$2\int_0^{\infty}e^{iat\lambda^2}d\lambda=2e^{\frac{\pi}{4}i}\int_0^{\infty}e^{-at\mu^2}d\mu=\sqrt{\frac{\pi}{at}}e^{\frac{\pi}{4}i}.$$ 课本 117. 例6.

所以

$$F^{-1}[\cos(a\lambda^2 t)]=Re\frac{1}{2\pi}e^{-i\frac{x^2}{4at}}\times\sqrt{\frac{\pi}{at}}e^{\frac{\pi}{4}i}=\frac{\cos(\frac{x^2}{4at})+\sin(\frac{x^2}{4at})}{2\sqrt{2\pi at}}.$$

所以由傅里叶变换的卷积性质，得

$$u(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x-s)\frac{\cos(\frac{s^2}{4at})+\sin(\frac{s^2}{4at})}{2\sqrt{2\pi at}}ds.$$

正弦变换与余弦变换 当我们只有半弦得时候，我们可以用正弦变换或者余弦变换。设f为$[0,\infty)$上的绝对可积函数，正余弦变换分别定义为：

$$f_s(\lambda)=\int_0^{\infty}f(x)\sin(\lambda x)dx;$$

$$f_c(\lambda)=\int_0^{\infty}f(x)\cos(\lambda x)dx.$$

f_s 为奇函数，f_c 为偶函数。相应的正余弦反变换分别定义为：

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f_s(x)\sin(\lambda x)d\lambda;$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f_c(x)\cos(\lambda x)d\lambda.$$

正余弦变换可以看做傅里叶变换的某种变形，实际上我们将f 偶展开，设

$$g(x)=\begin{cases} f(x), x\geq 0\\ f(-x), x<0.\end{cases}$$

则

$$F[g]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{i\lambda x}dx=2\int_0^{\infty} f(x)\cos(\lambda x)dx=2f_c(\lambda).$$

$=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cos\lambda x dx$

反之，对于$x\geq 0$，有

$$f(x)=g(x)=F^{-1}[F[g]]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\underbrace{f_c(\lambda)}_{\text{偶函数}}e^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f_c(\lambda)\cos(\lambda x)d\lambda.$$

同样对于正弦变换，我们可以做奇展开，设

$$h(x)=\begin{cases} f(x), x\geq 0\\ -f(-x), x<0.\end{cases}$$

则

$$F[h]=\int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{i\lambda x}dx=2i\int_0^{\infty} f(x)\sin(\lambda x)dx=2if_s(\lambda).$$

反之，对于$x\geq 0$，有

$$f(x)=h(x)=F^{-1}[F[h]]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2if_s(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f_s(\lambda)\sin(\lambda x)d\lambda.$$

正余弦变换有如下微分性质

$$(f')_s=-\lambda f_c;$$

$$(f')_c=\lambda f_s-f(0).$$

实际上

$$(f')_s=\int_0^{\infty} f'(x)\sin(\lambda x)dx=f(x)\sin(\lambda x)|_0^{\infty}-\lambda\int_0^{\infty} f(x)\cos(\lambda x)dx=-\lambda f_c.$$

$$(f')_c=\int_0^{\infty} f'(x)\cos(\lambda x)dx=\underbrace{f(x)\cos(\lambda x)|_0^{\infty}}_{=-f(0)}+\lambda\int_0^{\infty} f(x)\sin(\lambda x)dx=\lambda f_s-f(0).$$

所以

$$(f'')_s=-\lambda(f')_c=-\lambda^2 f_s+\lambda f(0),$$

$$(f'')_c=\lambda(f')_s-f'(0)=-\lambda^2 f_c-f'(0).$$

特别地，如果$f(0)=0$，则$(f')_c=\lambda f_s,(f'')_s=-\lambda(f')_c=-\lambda^2 f_s$。如果$f'(0)=0$,则$(f'')_c=-\lambda^2 f_c$。

描述半导体制造的一个方程.

掺杂

单边扩散方程.

例子4. 用余弦变换解定解问题:

$$
\begin{cases}
u_t = a^2 u_{xx}, x > 0, t > 0 \\
u(0,x) = 0, u_x(t,0) = Q, \\
u(t,+\infty) = u_x(t,+\infty) = 0
\end{cases}
$$

解. 设

$$\bar{u}(t,\lambda) = \int_0^\infty u(t,x)\cos(\lambda x)dx.$$

则

$$(u_{xx})_c = \lambda(u_x)_s - u_x(t,0) = -\lambda^2\bar{u} - Q.$$

即

$$\bar{u}_t = -\lambda^2 a^2 \bar{u} - a^2 Q.$$

先找一个特解$v(t,\lambda) = -\frac{Q}{\lambda^2}$.再令$w(t,\lambda) = \bar{u} - v$。得到

$$w_t = -\lambda^2 a^2 w.$$

得到通解$w(t,\lambda) = C(\lambda)e^{-\lambda^2 a^2 t}$，所以

$$\bar{u} = C(\lambda)e^{-\lambda^2 a^2 t} - \frac{Q}{\lambda^2}.$$

令$t = 0$ 得到

$$C(\lambda) = \frac{Q}{\lambda^2}.$$

$$\cancel{\frac{Q}{\lambda^2}\left(e^{-a^2\lambda^2 t} - 1\right)}$$

所以

$$\bar{u} = \frac{Q}{\lambda^2}e^{-\lambda^2 a^2 t} - \frac{Q}{\lambda^2} = -a^2 Q\int_0^t e^{-\lambda^2 a^2 \tau}d\tau.$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 \tau} e^{i\lambda x} d\lambda$$

用反余弦变换

$$
\begin{aligned}
u = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(-a^2 Q\int_0^t e^{-\lambda^2 a^2 \tau}d\tau\right)\cos(\lambda x)d\lambda &= -\frac{2a^2 Q}{\pi}\int_0^t\int_0^\infty e^{-\lambda^2 a^2 \tau}\cos(\lambda x)d\lambda d\tau \\
&= -\frac{2a^2 Q}{\pi}\int_0^t \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}d\tau \\
&= -\frac{aQ}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}}e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}d\tau.
\end{aligned}
$$

做变量替换$y = \sqrt{\frac{x^2}{4a^2\tau}}$，则$\tau = \frac{x^2}{4a^2 y^2}$。带入得

$$u = -\frac{xQ}{\sqrt{\pi}}\int_{+\infty}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}\frac{1}{y^2}e^{-y^2}dy.$$

$f(x) \longrightarrow$ Fourier变换

$f(t) \longrightarrow$ Laplace变换

1.2 拉普拉斯变换法

拉普拉斯变换：设$f(t)$ 为定义再$[0,\infty)$ 上的分段连续函数，f 的拉普拉斯变换定义为

$$L[f]=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

$f(t)$

$L[f](p)$ 一般是定义在$Rep>c$ 上。f 也可以看作是$(-\infty,+\infty)$ 上得函数，其在$(-\infty,0)$ 上得取值为零。设$p=\sigma+i\lambda$，则拉普拉斯变换和傅里叶变换有如下关系

$$L[f]=L(\sigma+i\lambda)=F[f(t)e^{-\sigma t}].$$

所以

$$f(t)e^{-\sigma t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} L(\sigma+i\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda.$$

拉普拉斯变换得反演公式为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} L(\sigma+i\lambda)e^{(\sigma+i\lambda)t}d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} L(p)e^{pt}dp$$

特别地，如果$\lim_{p\to\infty} L(p)=0$，则有

$$f(t)=\sum Res(L(p)e^{pt},p_i).$$

其中p_i 为左半平面$Rep<c$ 的所有奇点。

和傅里叶变换一样，拉普拉斯变换也有类似性质，包括

(1) 线性性质：$L[C_1f+C_2g]=C_1L[f]+C_2L[g]$;

(2) 频移性质：$L[f(t)e^{\lambda t}]=L(p-\lambda)$;

$$L[f(t)e^{\lambda_0 t}]=\int_0^{\infty} f(t)e^{-(p-\lambda_0)t}dt=L(p-\lambda_0).$$

(3) 延迟性质：$\tau>0$, $L[f(t-\tau)h(t-\tau)]=L(p)\times e^{-p\tau}$, 其中$h(t)=1,t\geq 0;h(t)=0,t<0$;

$$L[f(t-\tau)]=\int_0^{\infty} f(t-\tau)e^{-pt}dt=e^{-p\tau}\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt=e^{-p\tau}L(p).$$

(4) 相似性质：$a>0$, $L[f(at)]=\frac{1}{a}L(\frac{p}{a})$;

$$L[f(at)]=\int_0^{\infty} f(at)e^{-pt}dt=\frac{1}{a}\int_0^{\infty} f(t)e^{-p\frac{t}{a}}dt=\frac{1}{a}L(\frac{p}{a}).$$

(5) 微分性质：$L[f^{(n)}(t)]=p^nL(p)-p^{n-1}f(0+)-p^{n-2}f'(0+)-\cdots$.

仅需说明$n=1$ 的情形即可：

$$\int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt}dt=f(t)e^{-pt}|_0^{\infty}+p\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt=pL[f]-f(0+).$$

注意了.

(6) 像函数微分：$L[f(t)]^{(n)} = L[(-t)^n f]$.

$$L[f(t)]^{(n)} = \int_0^\infty f(t)\frac{\partial^n e^{-pt})}{\partial p^n}dt = L[(-t)^n f].$$

(7) 本函数积分：$L[\int_0^t f(s)ds] = \frac{L[f]}{p}$.

(8) 卷积性质：$L[f * g] = L[f] \times L[g]$。这里的卷积定义为

$$f * g = \int_0^t f(s)g(t-s)ds.$$

常用的是它的反变换，

$$L^{-1}[fg] = L^{-1}[f] * L^{-1}[g].$$

我们可以计算一些简单的拉普拉斯变换。

$$L[e^{\lambda t}] = \frac{1}{p-\lambda};$$

$$L[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

$$L[\frac{t^n}{n!}] = \frac{1}{p^{n+1}};$$

$$L[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2};$$

$$L[\cos(\omega t)] = \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

例子5. 解混合问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t), x > 0, t > 0 \\ u(0,x) = 0, u_t(0,x) = 0, \\ u(t,0) = 0, u(t,+\infty) \text{ 有界}. \end{cases}$$

用冲量原理也可以

解. 做拉普拉斯变换，设

$$U(p,x) = \int_0^\infty u(t,x)e^{-pt}dt.$$

$U(p,0)=0$ $U(p,+\infty)$ 有限.

由微分关系

$$p^2 U(p,x) = a^2 U_{xx}(p,x) + L[f(t)].$$

有特解$V(p,x) = \frac{L[f(t)]}{p^2}$。设$W(p,x) = U(p,x) - V(p,x)$，得到

$$p^2 W(p,x) = a^2 W_{xx}(p,x).$$

所以

$$W(p,x) = C_1(p)e^{\frac{px}{a}} + C_2(p)e^{-\frac{px}{a}}.$$

所以

$$U(p,x) = \frac{L[f(t)]}{p^2} + C_1(p)e^{\frac{px}{a}} + C_2(p)e^{-\frac{px}{a}}$$

因为$u(t,+\infty)$ 有界，所以$U(p,+\infty)$ 也有界。所以

$$U(p,x) = \frac{L[f(t)]}{p^2} + C_2(p)e^{-\frac{px}{a}}.$$

令$x=0$，得$C_2(p)=-\frac{L[f(t)]}{p^2}$。所以

$$U(p,x)=\frac{L[f(t)]}{p^2}-\frac{L[f(t)]}{p^2}e^{-\frac{px}{a}}.$$

做拉普拉斯逆变换：

$$L^{-1}[\frac{L[f(t)]}{p^2}]=L^{-1}[L[f(t)]]*L^{-1}[\frac{1}{p^2}]=\int_0^t f(t-s)sds.$$

$f(t)$ t

由延迟定理

$$L^{-1}[\frac{L[f(t)]}{p^2}e^{-\frac{px}{a}}]=\int_0^{t-\frac{x}{a}} f(t-\frac{x}{a}-s)sds\times h(t\cancel{t}-\frac{x}{a}).$$

$$L^{-1}[L[f]\frac{1}{p^2}\times e^{-\frac{px}{a}}]$$
$$=(f*t)(t-\frac{x}{a})\,h(t-\frac{x}{a})$$
$$=\int_0^{t-\frac{x}{a}} f(t-\frac{x}{a}-s)s\,ds$$

整理得：

$$u(t,x)=\begin{cases}\int_0^t f(t-s)sds, t<\frac{x}{a}\\ \int_0^t f(t-s)sdst-\int_0^{t-\frac{x}{a}} f(t-\frac{x}{a}-s)sds, t\geq\frac{x}{a}.\end{cases}$$

例子6. 一条半无限长的杆，无热源，温度有界，端点的温度变化已知，杆的初始温度为零，求杆的温度变化。

解. 首先写出定解问题：

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}, x>0, t>0\\ u(t,0)=f(t)\\ u(0,x)=0, u(t,+\infty)\ \text{有界}.\end{cases}$$

做拉普拉斯变换，设

$$U(p,x)=\int_0^\infty u(t,x)e^{-pt}dt.$$

由微分关系

$$pU(p,x)=a^2U_{xx}(p,x).$$

所以

$$U(p,x)=C_1(p)e^{\frac{\sqrt{p}x}{a}}+C_2(p)e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}}.$$

因为$u(t,+\infty)$ 有界，所以$U(p,+\infty)$ 也有界。所以

$$U(p,x)=C_2(p)e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}}.$$

令$x=0$，得$C_2(p)=L[f]$。所以

$$U(p,x)=L[f]e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}}.$$

做拉普拉斯逆变换：

$$u(t,x)=f*L^{-1}[e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}}]=f*\left(\frac{x}{2a\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{x^2}{4at}}\right)=\int_0^t f(t-\tau)\frac{x}{2a\sqrt{\pi\tau^3}}e^{-\frac{x^2}{4a\tau}}d\tau.$$

例子7. 解以下定解问题：

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, 0<x<l, t>0\\ u(t,0)=0, u_x(t,l)=A\sin(\omega t),\\ u(0,x)=0, u_t(0,x)=0.\end{cases}$$

这里$\omega\neq\frac{2k-1}{2l}a\pi,(k=1,2,3,\cdots)$.

解. 做拉普拉斯变换

$$U(p,x)=\int_0^\infty u(t,x)e^{-pt}dt.$$

以及边界条件

$$U(p,0)=0, U(p,l)=L[A\sin(\omega t)].$$

则

$$p^2U=a^2U_{xx}.$$

解得

$$U(p,x)=C_1(p)e^{\frac{p}{a}x}+C_2(p)e^{-\frac{p}{a}x}.$$

代入边界条件，有

$$\begin{cases} C_1(p)+C_2(p)=0, \\ C_1(p)e^{\frac{p}{a}l}-C_2(p)e^{-\frac{p}{a}l}=\frac{a}{p}L[A\sin(\omega t)]. \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} C_1(p)=\frac{e^{\frac{p}{a}l}}{e^{\frac{2p}{a}l}+1}\frac{a}{p}L[A\sin(\omega t)], \\ C_2(p)=-\frac{e^{\frac{p}{a}l}}{e^{\frac{2p}{a}l}+1}\frac{a}{p}L[A\sin(\omega t)]. \end{cases}$$

所以

$$U(p,x)=\frac{e^{\frac{p}{a}l}}{e^{\frac{2p}{a}l}+1}\frac{a}{p}L[A\sin(\omega t)]\left(e^{\frac{px}{a}}-e^{-\frac{p}{a}x}\right)=\frac{Aa\omega sh(\frac{p}{a}x)}{p(p^2+\omega^2)ch(\frac{pl}{a})}.$$

它的奇点为

$$0,\pm\omega i,\pm\frac{2k+1}{2l}a\pi i, k=0,1,\cdots.$$

其中0 为可去奇点。所以

$$u(t,x)=\sum_{p_i}Res(\frac{Aa\omega sh(\frac{p}{a}x)}{p(p^2+\omega^2)ch(\frac{pl}{a})},p_i)=\text{略}.$$

第五章　基本解

1　δ 函数(狄拉克函数)

狄拉克函数是由英国物理学家狄拉克引入的函数，虽然在物理方面有明确的意义并广泛使用，但直到20世纪30年代才建立了完整的数学理论。被称为广义函数论或者分布论，本书不做讨论。

在物理里面，我们常常会用一个点来表示一个物体，并把物体的所有质量集中在该点上，称为质点。那么如何用密度函数来表示质点的密度分布？我们假设x 轴上分布着某种物质A ，总计质量为1，全部位于x 轴的零点。我们将物质A 在x 轴上密度函数记为$\rho(x)$, 显然在零点之外，物质A 分布的密度函数为0，因而

① $\rho(x)=\begin{cases}+\infty, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$ + ② $\int \rho(x)v(x)dx$

$$\rho(x)=0, x\neq 0.$$

而在零点，其密度只能取无穷大。如果给物质A 赋予速度$v(x)$（方向沿着x 轴，连续分布），则冲量为

检验函数

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(x)\rho(x)dx = v(0).$$

广义函数.

$\delta(x)$函数: 质量为1的质点放在0点的密度函数

特别地，如果$v=1$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho dx = 1.$$

我们将这样的密度函数称为δ 函数，记为$\delta(x)$。$\delta(x)$ 为满足以下两个条件缺一不可的函数：

(1)

$$\delta(x)=\begin{cases}0, x\neq 0,\\ +\infty, x=0.\end{cases}$$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1.$

特别地，上诉两条件与$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$对所有连续函数$f$ 成立等价。狄拉克函数可以看作一个作用在连续函数空间的线性算符，

$$\delta(x): f(x)\to f(0).$$

一般来说如果需要我们要求算符作用在速降函数空间上（$\lim_{x\to\pm\infty} x^m f^{(n)}(x)=0, \forall m,n\in\mathbb{N}$ ）。任何我们常见的函数都能看成一个算符（一般不包括指数函数），两个算符相等当且仅当作用在所有速降函数上的取值相等，例如要说明$x\delta(x)=0$，仅需说明

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x\delta(x))f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)(xf(x))dx=0\times f(0)=0=\int_{-\infty}^{\infty}(0)f(x)dx$$

对所有速降（连续）函数成立即可。

如果我们改变下积分区域则

$$\int_a^b \delta(x)dx=\begin{cases}1, x\in(a,b),\\ 0, x\notin[a,b].\end{cases}$$

对于$a=0$ 或者$b=0$ 的情况我们不做考虑。

如果质量1 集中在$x=\xi$ 点，则密度函数$\rho(x)=\delta(x-\xi)$。设$f(x)$ 为连续函数，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-\xi)f(x)dx=f(\xi).$$

例子1. 有一根无限长紧绷的弦，在$x=0$敲一下，给它冲量1，求初始速度分布。

解. 对于任何连续密度函数$\rho(x)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)v(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\rho(0)v(x)dx=1=\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)\frac{\delta(x)}{\rho(0)}dx.$$

所以$v(x)=\frac{\delta(x)}{\rho(0)}$.

狄拉克函数的一些性质：

(1) 对称性: $\delta(x)=\delta(-x)$。更一般地$\delta(x-\xi)=\delta(\xi-x)$。将狄拉克函数看作质点的密度分布，则对称性是显然的。我们由以下卷积公式

$$\delta*f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-\xi)f(\xi)d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi)f(x-\xi)dx=f(x).$$

即

卷积性质: $\boxed{\delta*f=f.}$

(2) 求导: 我们可以清楚知道狄拉克函数在非零点的导数是零，但在零点的导数呢？因此我们要以算符来理解：设f 无限可导，则由分部积分公式

速降函数 $\lim_{x\to\pm\infty}x^n f^{(m)}(x)=0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x)f(x)dx=\delta(x)f(x)|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f'(x)dx=-f'(0).$$

即，$\delta'(x)$: $\boxed{f\to-f'(0)}$。同样的理解：$\boxed{\delta^{(n)}(x):f\to(-1)^n f^{(n)}(0)}$。这样的算符在数学上称为广义函数。

(3) 傅里叶变换: 依照狄拉克函数的定义

$$F[\delta(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{i\lambda x}dx=e^{i\lambda\times 0}=1.$$

即狄拉克函数的傅里叶变换为1；反之，1 的傅里叶反变换为狄拉克函数，即

$$F^{-1}[1]=\delta(x).$$

把傅里叶反变换的公式代入，有形式表达式

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot e^{-i\lambda x}d\lambda.$$

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{-i\lambda x}d\lambda$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\cos(\lambda x)-i\sin(\lambda x))d\lambda$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\lambda x)d\lambda$$

用算符来理解：

$$\begin{aligned}\langle\delta,f\rangle&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}d\lambda dx\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dxd\lambda\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(-\lambda)d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)e^{-i\lambda\times 0}d\lambda=f(0).\end{aligned}$$

又$e^{-i\lambda x}=\cos(\lambda x)-i\sin(\lambda x)$,注意到$\sin(\lambda x)$ 是关于x 的奇函数，所以有形式表达式

$$\boxed{\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\lambda x)d\lambda.}$$

λ=0，为+∞
λ≠0，为0.

同样地，$\delta(x-\xi)$ 的傅里叶变换

$$F[\delta(x-\xi)]=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-\xi)e^{i\lambda x}dx=e^{i\lambda\xi}.$$

反过来

$$F^{-1}[e^{i\lambda\xi}]=\delta(x-\xi).$$

例子2. 设有一根长为$2l$ 温度为0各种绝热的细杆无热源，在细杆的中间烧一下，给他一个热量$c\rho$，求杆上的温度变换。

解. 设温度为$u(t,x)$，则初始温度$u(0,x)$ 满足

$$u(0,x)=\begin{cases}0, x\neq l,\\ +\infty, x=l.\end{cases}$$

和$\int_0^{2l}u(0,x)c\rho dx=c\rho$。所以$u(0,x)=\delta(x-l)$。

写出定解问题

标志：分离变量

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}, 0<x<2l, t>0\\ u(0,x)=\delta(x-l)\\ u_x(t,0)=u_x(t,2l)=0.\end{cases}$$

用分离变量法，设$u(t,x)=T(t)X(x)$，则得到

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{X''}{X}.$$

设为$-\lambda$，则得到固有值问题

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0,\\ X'(0)=X'(2l)=0.\end{cases}$$

以及

$$T'+\lambda^2a^2T=0.$$

有零固有值$\lambda_0=0$，固有函数为$X_0=1$。其余固有值全部为正，解得$X=A\cos(\sqrt{\lambda}x)+B\sin(\sqrt{\lambda}x)$。所以

$$B=0, \sin(2l\sqrt{\lambda})=0.$$

解得固有值及固有函数

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{4l^2}, X_n=\cos(\frac{n\pi}{2l}x), n=1,2,\cdots.$$

将固有值代入T 的方程，得到

$$T_0=C_0, T_n=C_ne^{-\frac{n^2\pi^2}{4l^2}a^2t}, n=1,2,3,\cdots.$$

所以

$$u(t,x) = C_0 + \sum_{i=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{4l^2}a^2 t}\cos(\frac{n\pi}{2l}x).$$

由初始条件

$$\delta(x-l) = u(0,x) = C_0 + \sum_{i=1}^{\infty} C_n \cdot \cos\underbrace{\left(\frac{n\pi x}{2l}\right)}_{X_n}$$

确定系数，令$t=0$，则

$$C_0 = \frac{1}{2l}, C_n = \frac{\int_0^{2l}\delta(x-l)X_n(x)dx}{\int_0^{2l}X_n(x)X_n(x)dx} = \frac{X_n(l)}{l}.$$

$$C_n = \frac{\langle \delta(x-l), X_n\rangle}{\langle X_n, X_n\rangle}$$

$n=0$时，$C_0 = \frac{\langle \delta(x-l), X_0\rangle}{\langle X_0, X_0\rangle}$

$\because \langle X_0, X_0\rangle = 2l$

$\langle \delta(x-l), X_0\rangle = \int_0^{2l}\delta(x-l)\cdot 1\cdot dx = 1$

($\because l$在区间$0\sim 2l$内)

$\therefore C_0 = \frac{1}{2l}$

$n\geq 1$时，$C_n = \frac{\langle \delta(x-l), X_n\rangle}{\langle X_n, X_n\rangle} = \frac{\int_0^{2l}\delta(x-l)X_n dx}{l} = \frac{\int_0^{2l}\delta(x-l)\cdot\cos(\frac{n\pi x}{2l})dx}{l} = \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{l}$

得到当$n\geq 1$时，

$$C_n = \begin{cases} 0, n = 2k+1 \\ \frac{(-1)^k}{l}, n = 2k. \end{cases}$$

所以

$$u(t,x) = \frac{1}{2l} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{l}e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}a^2 t}\cos(\frac{k\pi}{l}x).$$

例子3. $f(t)$ 连续，计算积分

$$I = \frac{2a}{\pi}\int_0^{\infty}d\lambda\int_0^t f(\tau)\sin(\lambda x)\sin(a\lambda(t-\tau))d\tau.$$

$a>0, at>x>0.$

解. 首先

$$I = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_0^t f(\tau)\sin(\lambda x)\sin(a\lambda(t-\tau))d\tau.$$

用三角函数的积化和差公式：

$$\sin(\lambda x)\sin(a\lambda(t-\tau)) = \frac{1}{2}\left(\cos(a\lambda(t-\tau)-\lambda x) - \cos(a\lambda(t-\tau)+\lambda x)\right)$$

所以

$$\begin{aligned} I &= \frac{a}{2\pi}\int_0^t f(\tau)d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\cos(a\lambda(t-\tau)-\lambda x) - \cos(a\lambda(t-\tau)+\lambda x)d\lambda \\ &= a\int_0^t f(\tau)\left(\delta(a(t-\tau)-x) - \delta(a(t-\tau)+x)\right)d\tau \\ &= a\int_0^t f(\tau)\delta(a(t-\tau)-x)d\tau \\ &= a\int_{at-x}^{-x} f(\frac{at-\eta-x}{a})\delta(\eta)d\frac{at-\eta-x}{a} \\ &= \int_{-x}^{at-x} f(\frac{at-\eta-x}{a})\delta(\eta)d\eta \\ &= f(t-\frac{x}{a}). \end{aligned}$$

我们同样可以定义高维的狄拉克函数。将质量为1 的质点置于三维空间的零点，则密度函数$\delta(x,y,z)$满足

(1)
$$\delta(x,y,z)=\begin{cases}0,(x,y,z)\neq(0,0,0),\\+\infty,(x,y,z)=(0,0,0).\end{cases}$$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y,z)\delta(x,y,z)dxdydz=f(0,0,0).$

我们发现$\delta(x)\delta(y)\delta(z)$ 也满足上诉条件，所以$\delta(x)\delta(y)\delta(z)=\delta(x,y,z)$，记$M=(x,y,z)$，用$\delta(M)$ 表示$\delta(x,y,z)$。高维狄拉克函数的性质是类似的：

(1) 对称性：$\delta(M)=\delta(-M)$。更一般地$\delta(M-M_0)=\delta(M_0-M)$。卷积公式

→权重函数

$$\delta*f=f(M)=\int_{\mathbb{R}^3}f(M_0)\delta(M-M_0)dM_0.$$

→质点放在M_0点密度

(2) 求导：我们可以清楚知道狄拉克函数在非零点的导数是零，但在零点的导数呢？因此我们要以算符来理解：设f 无限可导，则由分布积分公式

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\delta(x,y,z)}{\partial x}f(x,y,z)dxdydz&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y)\delta(z)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x)f(x,y,z)dx\right)dydz\\&=-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y)\delta(z)\frac{\partial f}{\partial x}(0,y,z)dydz\\&=-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0).\end{aligned}$$

(3) 傅里叶变换：回顾高维的傅里叶变换

$$F[f(x,y,z)]=\int_{\mathbb{R}^3}f(x,y,z)e^{i(\lambda x+\mu y+\nu z)}dxdydz.$$

傅里叶反变换

$$f(x,y,z)=F^{-1}[F(\lambda,\mu,\nu)]=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}f(x,y,z)e^{-i(\lambda x+\mu y+\nu z)}d\lambda d\mu d\nu.$$

依照狄拉克函数的定义

$$F[\delta(x,y,z)]=\int_{-\mathbb{R}^3}\delta(x,y,z)e^{i(\lambda x+\mu y+\nu z)}dxdydz=1.$$

即狄拉克函数的傅里叶变换为1；反之，1 的傅里叶反变换为狄拉克函数，即

$$F^{-1}[1]=\delta(x,y,z).$$

$F[\frac{\partial f}{\partial x}]=(-i\lambda)F[f]$

$F[\frac{\partial f}{\partial y}]=(-i\lambda)F[f]$

$F[\frac{\partial f}{\partial z}]=(-i\nu)F[f]$

$F[\Delta f]=F[(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})f]$

$=-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)F[f]$

$\delta(x)\xleftrightarrow{F}1$

2 场势方程基本解与格林函数

书上的形式更一般，但我们直接考虑泊松方程。在三维真空空间中的零点，我们放电量为$-\varepsilon_0$的点电荷(ε_0为真空介电常数)，其电荷密度设为$\rho(x,y,z)$，则

$\Delta u=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}=-\frac{-\varepsilon_0\cdot\delta(x,y,z)}{\varepsilon_0}$

电势

$=\delta(x,y,z)$

(1)
$$\delta(x,y,z)=\begin{cases}0,(x,y,z)\neq(0,0,0),\\+\infty,(x,y,z)=(0,0,0).\end{cases}$$

$\therefore\Delta u=\delta(x,y,z).$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x,y,z)dxdydz=-\varepsilon_0$。

所以$\rho(x,y,z)=-\varepsilon_0\delta(x,y,z)$。回忆泊松方程，我们设电势函数为$u(x,y,z)$，则有

$$\Delta_3 u=-\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}=\delta(x,y,z).$$

$F[\delta(x,y,z)]=1$

该方程的解称为泊松方程$\Delta_3 u=0$ 的基本解。我们解该方程，做高维傅里叶变换，有

$$F[\Delta u]=-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\bar{u}(\lambda,\mu,\nu)=1.$$

$\Rightarrow \bar{u}=F[u]=-\frac{1}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}$

其中$\bar{u}$ 为u 的傅里叶变换。用球坐标，设$\lambda=\rho\sin\theta\cos\varphi,\mu=\rho\sin\theta\sin\varphi,\nu=\rho\cos\theta$，则

$$\bar{u}=-\frac{1}{\rho^2}.$$

做傅里叶反变换，得到

$$u(x,y,z)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{u}(\lambda,\mu,\nu)e^{-i(\lambda x+\mu y+\nu z)}d\lambda d\mu d\nu$$

我们设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，容易发现$u(x,y,z)$ 的取值只与r 有关，所以我~~们~~只要求$u(0,0,r)$ 就可以了，

$\nu=\rho\cos\theta$

$$\begin{aligned}
u(0,0,r)&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{u}(\lambda,\mu,\nu)e^{-i\rho r\cos\theta}d\lambda d\mu d\nu\\
&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}-\frac{1}{\rho^2}e^{-i\rho r\cos\theta}\rho^2\sin\theta d\theta d\varphi d\rho\\
&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}-e^{-i\rho r\cos\theta}\sin\theta d\rho d\theta\\
&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}\frac{e^{-i\rho r\cos\theta}}{-i\rho r}\Big|_0^{\pi}d\rho=-\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}\frac{2\sin(\rho r)}{\rho r}d\rho=-\frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^{\infty}\frac{\sin(\rho)}{\rho}d\rho\\
&=-\frac{1}{4\pi r}.
\end{aligned}$$

对φ的积分可以消掉

所以

$$\Delta u=\delta(x,y,z)\Rightarrow u=-\frac{1}{4\pi r}.$$

至此，我们得到了泊松方程的基本解。因为我们摆放的是负电荷，所以电势为负，如果我们摆放的是正电荷，那么电势为正，即

$$\tilde{u}=\frac{1}{4\pi r}.$$

如果放的是 $-\varepsilon_0 f$

则$\Delta u=f$

$\delta * f=\iiint\delta(M-M_0)f(M_0)dM_0$

$\Delta u=\delta(M-M_0)$的解 $-\frac{1}{4\pi r(M,M_0)}$

我们设$M=(x,y,z)$，$M_0=(\xi,\eta,\zeta)$，如果我们一开始的点电荷$-\varepsilon_0$ 不是放在零点，而是放在M_0 点，那么电势为

$$u(M;M_0)=-\frac{1}{4\pi r(M,M_0)},$$

其中$r(M,M_0)$ 表示两个点之间的间距。此为

$$\Delta_3 u=\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta).$$

$\int_{M_0}(\Delta u^{(M_0)})f(M_0)dM_0$

$=\int\delta(M-M_0)f(M_0)dM_0$

$=f(M)$

即 $f(M)=\int\delta(M-M_0)f(M_0)dM_0$

把f分解为狄拉克函数的积分和

$\Delta u=f$ 的解为

$\int_{M_0}-\frac{1}{4\pi r(M,M_0)}f(M_0)dM_0$

$\Delta U(M)=\delta(M)\ x\in R^3$

$U(M)=-\frac{1}{4\pi r}$, $r=\|OM\|$

$\Delta U(M)=f(M)$, $x\in R^3$的解 $u(M)=-\frac{1}{4\pi r}*f(M)$

$$=\int_{R^3}\frac{-1}{4\pi(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}f(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)d\xi d\eta d\zeta$$

的解。

如果空间的电荷密度为$\rho(M)$，则相应的泊松方程为

$$\Delta_3 u=-\frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$$

我们可以将$-\frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$分解为狄拉克函数的积分叠加，

$$-\frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}=-\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\rho(M_0)\delta(M-M_0)dM_0.$$

那么相应的解也是积分叠加：

$$u(M)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\rho(M_0)u(M;M_0)dM_0=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(M_0)}{r(M;M_0)}dM_0.$$

对于基本解，我们还可以这么理解，我们再零点放上大小为$-\varepsilon_0$电荷。由高斯公式，通过封闭曲面的电通量等于封闭曲面的电荷除上介电常数，且由对称性，电场强度只与与零点的距离有关，方向指向零点，设其大小为$E(a)$（方向就不管了）。因而通过以零点为圆心，a为半径的电通量为

$$-E(a)\times 4\pi a^2=-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0}=-1$$

即

$$E(a)=\frac{1}{4\pi a^2}$$

假设无穷远处电势为零，则r处电势为

$$U(+\infty)-U(r)=\int_r^{\infty}\frac{1}{4\pi a^2}da=-\frac{1}{4\pi a}\Big|_r^{\infty}=\frac{1}{4\pi r},$$

即

$$U(r)=-\frac{1}{4\pi r}$$

和我们计算的结果是一致的，这说明虽然我们没说，但我们已经默认了无穷远处电势为零。但这种默认并不总是正确的，例如，当我们求二维泊松方程

$$\Delta_2 u(x,y)=\delta(x,y)$$

的时候，此时

$$-E(a)\times 2\pi a=-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0}=-1$$

得到

$$E(a)=\frac{1}{2\pi a},$$

这时候再默认无穷远处电势为零，则

$$U(+\infty)-U(r)=\int_r^{\infty}\frac{1}{2\pi a}da=\text{不可积},$$

这时候我们就不能默认无穷远处电势为零，否则没法算。电势是个相对量，可以默认任何地方电势为零，然后求其他点的相对电势，因而我们可以默认$a=1$处电势为零，则

$$U(1)-U(r)=\int_r^1\frac{1}{2\pi a}da=\frac{\ln a}{2\pi}\Big|_r^1=-\frac{\ln r}{2\pi}.$$

所以

$$U(r) = \frac{\ln r}{2\pi}.$$

与后面结果是一致的。那么如果是一维呢？

$$\Delta_1 u(x) = \delta(x).$$

此时

$$-E(a) \times 2 = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0} = -1$$

得到

$$-E(a) = -\frac{1}{2},$$

我们干脆默认零点的电势为零，则

$$U(0) - U(r) = \int_r^0 \frac{1}{2} da = \frac{a}{2}\Big|_r^0 = -\frac{r}{2}.$$

所以

$$U(r) = \frac{r}{2}.$$

2.1 格林函数及其物理意义

注意此处是正电荷

设有一个由金属球壳围成的区域V，金属球壳接地（电势为零），内部M_0 处放一点电荷，电量为ε_0，则V 内部电势分布u 满足

$$\Delta U = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{\varepsilon_0 \delta(M - M_0)}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{cases} \Delta_M u = -\delta(M - M_0), M \in V \\ u|_{\partial V} = 0. \end{cases}$$

该定解问题的解我们称为格林函数，记为$G(M; M_0)$，格林函数是有两部分组成的，一部分是有点电荷ε_0产生的电势，这个已经在前面讲过，为

$$(1) \qquad u(M; M_0) = \frac{1}{4\pi r(M, M_0)}, \quad \text{特解，}$$

其中$r(M, M_0)$ 表示两个点之间的间距。另一部分是由感应电荷产生的电势，满足如下定解问题：

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0, M \in V \\ u(M)|_{\partial V} = -\frac{1}{4\pi r(M, M_0)}. \end{cases}$$

$G(M, M_0) = (1) + (2)$的解即为格林函数，这也提供了一个求格林函数的办法，只要求出（2）就可以了，然而还是难求，我们只能对一些特殊的情形求格林函数。

定理. 格林函数具有对称性，即$G(M_1; M_2) = G(M_2; M_1)$，$M_1, M_2$ 为V 内两点。

在M_1处放的电荷在M_2产生的电势
$=$在M_2 · · · · M_1 · · ·

证明. 推导需要用到格林第二公式

$$\int_V w\Delta v - v\Delta w dV = \int_S w\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial w}{\partial \vec{n}} dS$$

$S = \partial V$ 边界　　单位外法向量

设$G(M;M_i), i=1,2$ 满足定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = -\delta(M-M_i), M\in V \\ u(M)|_{\partial V} = 0. \end{cases}$$

在格林第二公式中取$w=G(M;M_1), v=G(M;M_2)$，得到左边

$$\int_V G(M;M_1)\Delta G(M;M_2) - G(M;M_2)\Delta G(M;M_1)dV$$
$$= \int_V G(M;M_1)(-\delta(M-M_2)) - G(M;M_2)(-\delta(M-M_1))dV$$
$$=G(M_1;M_2) - G(M_2;M_1)$$

右边

$$\int_S \underbrace{G(M;M_1)}_{0}\frac{\partial G(M;M_2)}{\partial \vec{n}} - \underbrace{G(M;M_2)}_{0}\frac{\partial G(M;M_1)}{\partial \vec{n}}dS = 0$$

对照得到

$$G(M_1;M_2) = G(M_2;M_1).$$

如果我们知道了格林函数，我们可以求出一般泊松方程边值问题的解。即

定理. 泊松方程边值问题：

$$\begin{cases} \Delta u = -f(x,y,z), M\in V & -f(M) \\ u|_{\partial V} = \varphi(x,y,z). & \varphi(M) \end{cases}$$

的解为

$$u(M) = -\int_S \varphi(M_0)\frac{\partial_{M_0}G}{\partial \vec{n}}dS + \int_V G(M;M_0)f(M_0)dM_0,$$

其中$G=G(M;M_0)$。

→ 证明：
分解为
① $\begin{cases}\Delta u=-f\\ u|_S=0\end{cases}$ ② $\begin{cases}\Delta u=0\\ u|_S=\varphi\end{cases}$

③ $f=\delta * f=\int \underbrace{\delta(M-M_0)}_{\uparrow\, G(M,M_0)} f(M_0)\,dM_0$

⇒①的解：$\int G(M,M_0)f(M_0)dM_0$

要证 $v=-\int_S \varphi(M_0)\frac{\partial_{M_0}G}{\partial \vec{n}}dS$ 为②的解.

仅需验证满足②

$\Delta v = -\int_S \varphi(M_0)\cdot\frac{\partial_{M_0}\Delta_M G}{\partial \vec{n}}dS$

$=-\int_S \varphi(M_0)\cdot\frac{\partial_{M_0}(-\delta(M-M_0))}{\partial \vec{n}}dS = 0$

证明. 解有两部分，后面部分$\int_V Gf(M_0)dM_0$ 为定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = -f(x,y,z), M\in V \\ u|_{\partial V} = 0. \end{cases}$$

的解。我们只要证明前面部分$v(M) = -\int_S \varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}dS$ 为定解问题

$$\begin{cases} \Delta v = 0, M\in V \\ v|_{\partial V} = \varphi(x,y,z). \end{cases}$$

的解即可。由格林第二公式

$$\int_S G(M;M_0)\frac{\partial v(M_0)}{\partial \vec{n}} - v(M_0)\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}dS = \int_V G(M;M_0)\Delta v(M_0) - v(M_0)\Delta G(M;M_0)dM_0$$
$$= \int_V 0 + v(M_0)\delta(M-M_0)dM_0 = v(M).$$

~~对 $\begin{cases}\Delta u=0\\ u|_\Sigma=0\end{cases}$~~

又在边界上$G(M;M_0)=0$，所以在边界上

$$\varphi(M)=-\int_S v(M_0)\frac{\partial G}{\partial \vec n}dS=-\int_S \varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial \vec n}dS.$$

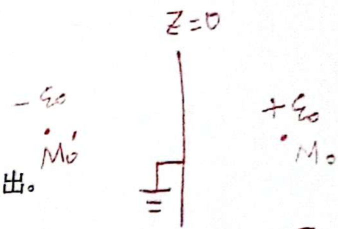
这样我们验证了边界条件，现在我么验证泛定方程。

$$\Delta\left(v(M)\right)=-\int_S \varphi(M_0)\frac{\partial_{M_0}\Delta_M G}{\partial \vec n}dS=-\int_S \varphi(M_0)\frac{\partial_{M_0}\delta(M-M_0)}{\partial \vec n}dS=0.$$

为了方便，我们经常交换M,M_0的位置。

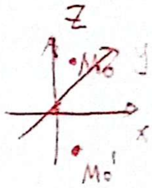
$$u(M_0)=-\int_S \varphi(M)\frac{\partial G}{\partial \vec n}dS+\int_V Gf(M)dM.$$

2.2 用镜象法求格林函数



一般来说格林函数很难求，但是对于特殊的情况，格林函数可以用镜像法求出。

1）半空间的格林函数：定解问题



$$\Delta\begin{cases}\Delta G=-\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)=-\delta(M-M_0),z>0\\ G|_{z=0}=0.\end{cases}$$

$+\varepsilon_0$

的解称为半空间的格林函数。从物理角度看，这就是在$M_0=(\xi,\eta,\zeta)$处放上电量为ε_0的电荷Q，$z=0$为无限大的接地的金属板，求上半空间的电势分布。方法是镜像法，也就是在(ξ,η,ζ)关于$z=0$的对称点$M_0'=(\xi,\eta,-\zeta)$处放上电量为$-\varepsilon_0$的电荷Q'，并移掉金属板。则由电荷Q和电荷Q'产生的电势为

$$u(M)=\frac{1}{4\pi r(M,M_0)}-\frac{1}{4\pi r(M,M_0')}.$$

由对称性，在$z=0$处，电势为0。并且

$\Delta_3 u=\delta(x,y,z)$

$u=-\frac{1}{4\pi r}$ 负电荷

$$\Delta u=-\delta(M-M_0)+\delta(M-M_0').$$

在上半平面为0

在上半平面正好为

$$\Delta u=-\delta(M-M_0).$$

所以

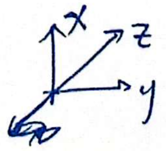
$$G(M;M_0)=u(M)=\frac{1}{4\pi r(M,M_0)}-\frac{1}{4\pi r(M,M_0')}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r(M,M_0)}-\frac{1}{r(M,M_0')}\right).$$

就是我们要求的格林函数。即

$$G(M;M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}}\right).$$

对于一般形式定解问题：

$$\begin{cases}\Delta u=-f(x,y,z),z>0\\ G|_{z=0}=\varphi(x,y).\end{cases}$$



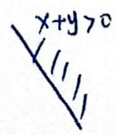
$(z>0)$

若 $\begin{cases}\Delta u=0\\ u|_{z=0}=\varphi\end{cases}$ $\Rightarrow u=-\int_{z=0}\varphi(M_0)\frac{\partial_{M_0}G}{\partial \vec n}dS$

单位外法向

$\vec n=(0,0,-1)$

eg:



$$\frac{\partial_{M_0}G}{\partial \vec n}=(G_\xi,G_\eta,G_\zeta)\cdot\vec n$$
$$=-G_\zeta$$

我们代入蓝色公式，有

$$u(M) = -\int_S \varphi(M_0)\frac{\partial_{M_0}G}{\partial\vec{n}}dS + \int_V Gf(M_0)dM_0.$$

其中前面一半

$$-\int_S \varphi(M_0)\frac{\partial_{M_0}G}{\partial\vec{n}}dS = \int_S \varphi(M_0)\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial\zeta}dM_0 = \int_S \varphi(\xi,\eta)\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial\zeta}dM_0.$$

计算

$$\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=0} = -\frac{1}{8\pi}\left(\frac{2(\zeta-z)}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2)^{3/2}} - \frac{2(\zeta+z)}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2)^{3/2}}\right)\Big|_{\zeta=0}$$
$$= \frac{z}{2\pi((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2)^{3/2}}$$

所以定解问题

$$\begin{cases} \Delta v = 0, z>0 \\ v|_{z=0} = \varphi(x,y). \end{cases}$$

的解为

$$v(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\varphi(\xi,\eta)z}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2)^{3/2}}d\xi d\eta.$$

或者写成

$$v(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\varphi(x,y)\zeta}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2)^{3/2}}dxdy.$$

书上答案自然是错的。

所以半平面求格林函数的关键是在M_0关于半平面的对称点M_0'虚设一个电量为$-\varepsilon_0$的电荷，并将两个电荷产生的电势叠加。所以关键是找对称点，解析几何书上应该有公式（好吧，反正百度找不到）。求$M_0=(\xi,\eta,\zeta)$关于$ax+by+cz+d=0$的对称点。先做经过M_0和平面垂直的线，有参数表示$\boxed{(\xi+pa,\eta+pb,\zeta+pc)}$然后求该线和平面的交点$P$。只要解出$p$

$$\underset{P}{\downarrow}$$

$$a(\xi+pa)+b(\eta+pb)+c(\zeta+pc)+d=0.$$

☆☆☆

最后对称点即为

$$2P-(\xi,\eta,\zeta) = (\xi+2pa,\eta+2pb,\zeta+2pc)$$

求对称点。

例子4. 区域$\Omega=\{(x,y,z): x+y+z>0\}$，求格林函数。☆

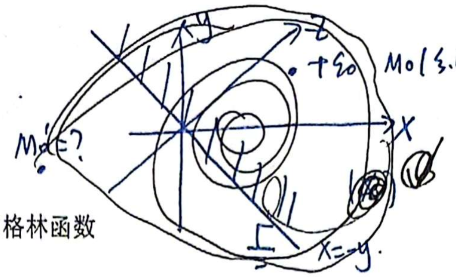
解. 在Ω区域的$M_0=(\xi,\eta,\zeta)$放电量为ε_0的点电荷，在它的关于$x+y+z=0$的对称点$M_0'=\left(\frac{\xi-2\eta-2\zeta}{3},\frac{\eta-2\xi-2\zeta}{3},\frac{\zeta-2\xi-2\eta}{3}\right)$放另一点电荷，电量为$-\varepsilon_0$。格林函数为两个电荷产生电势的叠加：即

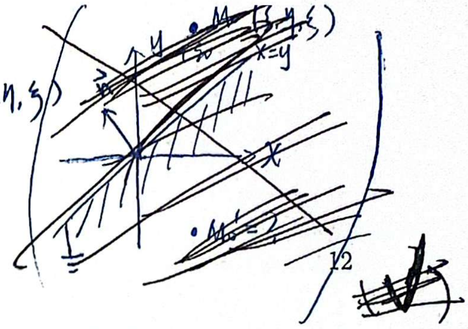
$$G(M;M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{\xi-2\eta-2\zeta}{3})^2+(y-\frac{\eta-2\xi-2\zeta}{3})^2+(z-\frac{\zeta-2\xi-2\eta}{3})^2}}\right).$$

例子5. 区域$\Omega=\{(x,y,z): x>y\}$，求格林函数。

$$\therefore \frac{\partial_{M_0}G}{\partial\vec{n}}\Big|_{\zeta=0} = -G_\zeta\Big|_{\zeta=0} = \frac{z}{2\pi((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore u = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\varphi(\xi,\eta)z}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2)^{3/2}}d\xi d\eta.$$





解. 在Ω 区域的$M_0=(\xi,\eta,\zeta)$ 放电量为ε_0 的点电荷，在它的关于$x=y$ 的对称点$M_0'=(\eta,\xi,\zeta)$ 放另一点电荷，电量为$-\varepsilon_0$。格林函数为两个电荷产生电势的叠加：即

$$G(M;M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-\eta)^2+(y-\xi)^2+(z-\zeta)^2}}\right).$$

外单位法向为$\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$，所以定解问题

$x>y$

$$\begin{cases}\Delta u=0,\ \cancel{x+y>0}\\ u|_{x=y}=\varphi(x).\end{cases}$$

$u(M)=-\int_S\varphi(M_0)\frac{\partial_{M_0}G}{\partial\vec n}dS$

$=-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{2}\,\varphi(M_0)\frac{\partial_{M_0}G}{\partial\vec n}d\zeta\, d\xi$

的解为

$$u(M)=-\int_S\varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial\vec n}dS=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)(G_\xi-G_\eta)|_{\eta=\xi}d\xi d\zeta.$$

$\because \frac{\partial_{M_0}G}{\partial\vec n}\Big|_{\xi-\eta=0}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-G_\xi+G_\eta)\Big|_{\xi-\eta=0}$

最后求得

$$u(M)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-y)\varphi(\xi)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\xi)^2+(z-\zeta)^2}^3}d\xi d\zeta.$$

$\vec n=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$

实际上，可以进一步化简为

$$u(M)=\frac{x-y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\xi)^2}}d\xi.$$

例子6. 求定解问题

$$\begin{cases}u_{xx}+4u_{yy}+9u_{zz}=0\ (x>0)\\ u|_{x=0}=\varphi(y,z).\end{cases}$$

解. 设$\bar x=x,\bar y=\frac{1}{2}y,\bar z=\frac{1}{3}z$，则定解问题化为

$$\begin{cases}u_{\bar x\bar x}+u_{\bar y\bar y}+u_{\bar z\bar z}=0,\bar x>0\\ u|_{\bar x=0}=\varphi(2\bar y,3\bar z).\end{cases}$$

我们求$\bar x>0$ 区域的格林函数，设$M_0=(\xi,\eta,\zeta)$ 为$\xi>0$，其关于$\bar x=0$ 的对称点$M_0'=(-\xi,\eta,\zeta)$，在M_0 点放上ε_0 的电荷，在M_0' 放上$-\varepsilon_0$ 的电荷。所以格林函数

$$G(M;M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(\bar x-\xi)^2+(\bar y-\eta)^2+(\bar z-\zeta)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(\bar x+\xi)^2+(\bar y-\eta)^2+(\bar z-\zeta)^2}}\right).$$

单位外法向为$\vec n=(-1,0,0)$，所以

$$\frac{\partial G}{\partial\vec n}\Big|_{\xi=0}=-\frac{\partial G}{\partial\xi}\Big|_{\xi=0}=-\frac{1}{2\pi}\frac{\bar x}{\sqrt{\bar x^2+(\bar y-\eta)^2+(\bar z-\zeta)^2}^3}.$$

看题目

所以

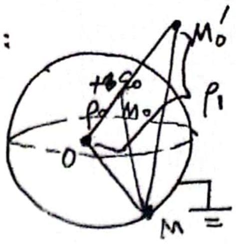
$$u=\frac{\bar x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(2\eta,3\zeta)}{\sqrt{\bar x^2+(\bar y-\eta)^2+(\bar z-\zeta)^2}^3}d\eta d\zeta=\frac{x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(2\eta,3\zeta)}{\sqrt{x^2+(\frac{y}{2}-\eta)^2+(\frac{z}{3}-\zeta)^2}^3}d\eta d\zeta.$$

$\vec n\to(-1,0,0)$

$\frac{\partial G}{\partial\vec n}\Big|_{\xi=0}=(G_\xi+G_\eta+G_\zeta)\cdot\vec n\Big|_{\xi=0}$

$=-G_\xi\Big|_{\xi=0}$

球形区域:



$\rho_1 = \frac{R^2}{\rho_0}$

$M_0' = \frac{R^2}{\rho_0^2}(\xi,\eta,\zeta)$

$-\frac{R}{\rho_0}\varepsilon_0$

与圆域不同.

2) 球形域上的格林函数: 假设有一个金属球壳, 接地, 球内$M_0=(\xi,\eta,\zeta)$处有ε_0的电荷, 求球内电势分布。我们设$\rho_0=r(O,M_0)$, $\rho_1=R^2/\rho_0$。在

$$M_0'=\frac{\rho_1}{\rho_0}M_0=\frac{R^2}{\rho_0^2}(\xi,\eta,\zeta)$$

处摆放电荷, 电量为

$$-\frac{R}{\rho_0}\varepsilon_0.$$

我们可以验证这两电荷产生的电势在球壳上的电势为零。对于任意金属球壳上的点M, 三角形OMM_0与三角形OMM_0'相似, 所以

$$\frac{|MM_0'|}{|MM_0|}=\frac{|MO|}{|OM_0|}=\frac{R}{\rho_0},$$

所以当M在金属球壳上的时候, M处的电势为

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|MM_0|}-\frac{R}{|MM_0'|\rho_0}\right)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|MM_0|}-\frac{1}{|MM_0|}\right)=0.$$

因而由这两电荷生成电势分布的叠加就是我们要求的格林函数为 → 多了个系数$\frac{R}{\rho_0}$

$$G(M;M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r(M,M_0)}-\frac{R}{\rho_0 r(M,M_0')}\right).$$

如果我们记OM_0与OM之间的夹角为ψ, 则由余弦定理

$$r(M,M_0)=\sqrt{r^2+\rho_0^2-2r\rho_0\cos\psi},$$

单位外法向n垂直于球面
(与选取有关)

$\frac{\partial G}{\partial n}=G_r$

和

$$r(M,M_0)=\sqrt{r^2+\rho_1^2-2r\rho_1\cos\psi}=\sqrt{\frac{r^2\rho_0^2+R^4-2R^2r\rho_0\cos\psi}{\rho_0^2}}.$$

所以

$$G(M;M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+\rho_0^2-2r\rho_0\cos\psi}}-\frac{R}{\sqrt{r^2\rho_0^2+R^4-2R^2r\rho_0\cos\psi}}\right).$$

特别地,

$$\lim_{\rho_0\to 0}G(M;M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2}}-\frac{R}{\sqrt{R^4}}\right)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right).$$

所以

$$G_{\rho_0}|_{\rho_0=R}=-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{2\rho_0-2r\cos\psi}{\sqrt{r^2+\rho_0^2-2r\rho_0\cos\psi}^3}-\frac{R(2\rho_0r^2-2R^2r\cos\psi)}{\sqrt{r^2\rho_0^2+R^4-2R^2r\rho_0\cos\psi}^3}\right)|_{\rho_0=R}.$$

即

$$G_{\rho_0}|_{\rho_0=R}=-\frac{1}{4\pi}\frac{R^2-r^2}{\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\psi}^3}.$$

定解问题

$$\begin{cases}\Delta u=0, r\le R\\ u|_{r=R}=\phi(\theta,\varphi).\end{cases}$$

的解为

$$u=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\phi(\theta,\varphi)\frac{R^2-r^2}{\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\psi}^3}\sin\theta d\theta d\varphi$$

基本解：$(-\varepsilon_0)$ $\Delta_3 u=\delta(x,y,z)$. $u=-\frac{1}{4\pi r}$

放的都是负电荷. $\Delta_2 u=\delta(x,y)$ $u=\frac{\ln r}{2\pi}$

2.2.1 二维情形

我们求半平面的格林函数，首先求以下基本解问题

$$\Delta_2 u=\delta(x,y).$$

这个在前面我们已经求过了，基本解为

$$u=\frac{\ln r}{2\pi}.$$

这是在0 点摆放了一个$-\varepsilon_0$ 电荷产生的电势。同样的如果我们在零点摆放ε_0 电荷产生的电势为

$$-\frac{\ln r}{2\pi}.$$

当然我们也可以用书上的解法，由物理直观，解应该有对称性，所以$u=u(r)$，r 为$M=(x,y)$ 到零点距离。则有

$$u_{rr}+\frac{u_r}{r}=0,r>0$$

即

$$r^2u_{rr}+ru_r=0.$$

这是欧拉方程，做变量替换$r=e^t$，得到

$$u_{tt}=0.$$

所以

$$u=A+Bt=A+B\ln r,r>0$$

取$A=0$，并对小圆域做积分

$$1=\int_{\mathbb{R}^2}\Delta_2 u dxdy=\int_{C_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}dl=\int_{C_\varepsilon}\frac{B}{r}dl=2\pi B.$$

所以$B=\frac{1}{2\pi}$. 所以

$$u=\frac{\ln r}{2\pi}.$$

现在我们假设在上半平面$y>0$的某位置$M_0=(\xi,\eta)$ 处摆放了电荷ε_0. $y=0$ 是金属板接地。我们求格林函数，即求：

$$\begin{cases}\Delta_2 u=-\delta(M-M_0),y>0\\ u|_{y=0}=0.\end{cases}$$

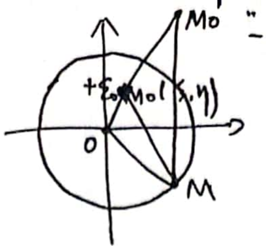
方法类似，同样在M_0 关于$y=0$ 的对称点$M_0'=(\xi,-\eta)$ 处摆放电荷$-\varepsilon_0$，格林函数即是由这两电荷产生电势的叠加，即

$$G(M;M_0)=-\frac{1}{2\pi}(\overset{+\varepsilon_0}{\ln r(M,M_0)}-\overset{-\varepsilon_0}{\ln r(M,M_0')})=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

三维的定解问题公式对二维依然成立，以下定解问题：

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0,y>0\\ u|_{y=0}=\varphi(x).\end{cases}$$

圆形区域



$M_0' = \frac{R^2}{\rho_0^2}(\xi,\eta)$ 处放电荷 $-\varepsilon_0$ ↳与球壳的不一样

☆

$\triangle OMM_0 \backsim \triangle OMM_0'$（M在圆弧上）

M点电势 $= \frac{1}{2\pi}(\ln|MM_0'| - \ln|MM_0|)$

$= \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|MM_0'|}{|MM_0|} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\rho_0} =$ 常数

$G(M;M_0) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln|MM_0'| - \ln|MM_0| - \ln\frac{R}{\rho_0}\right)$

不要忘记

球壳的话没有该部分

的解为

$$u(x,y) = -\int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi)\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}d\xi.$$

$\vec{n} = (0,-1)$ 为单位外法向，所以

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}|_{\eta=0} = -G_\eta|_{\eta=0} = -\frac{1}{\pi}\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}.$$

所以

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi.$$

一般定解问题：

$$\begin{cases} \Delta_2 u = -f(x,y), y>0 \\ u|_{y=0} = \varphi(x). \end{cases}$$

的解为

$$u(x,y) = \int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(\xi,\eta)Gd\xi d\eta + \frac{y}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi.$$

例子7. 求定解问题：

$$\begin{cases} u_{xx} + 4u_{yy} = 0, x<0 \\ u|_{x=0} = \varphi(y). \end{cases}$$

解. 设 $\bar{x} = x, \bar{y} = \frac{1}{2}y$，则定解问题化为

$$\begin{cases} u_{\bar{x}\bar{x}} + u_{\bar{y}\bar{y}} = 0, \bar{x}<0 \\ u|_{\bar{x}=0} = \varphi(2\bar{y}). \end{cases}$$

我们求 $\bar{x}<0$ 区域的格林函数，设 $M_0 = (\xi,\eta)$ 为 $\xi<0$，其关于 $\bar{x}=0$ 的对称点 $M_0' = (-\xi,\eta)$，所以格林函数

$$G(M;M_0) = -\frac{1}{2\pi}(\ln r(M,M_0) - \ln r(M,M_0')) = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{(\bar{x}+\xi)^2+(\bar{y}-\eta)^2}{(\bar{x}-\xi)^2+(\bar{y}-\eta)^2}.$$

拆开成

$\frac{1}{4\pi}\left(\ln[(\bar{x}+\xi)^2+(\bar{y}-\eta)^2] - \ln[(\bar{x}-\xi)^2+(\bar{y}-\eta)^2]\right)$

再求导.

单位外法向为 $\vec{n} = (1,0)$，所以

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}|_{\xi=0} = \frac{\partial G}{\partial \xi}|_{\xi=0} = \frac{1}{\pi}\frac{\bar{x}}{\bar{x}^2+(\bar{y}-\eta)^2}.$$

所以

$$u = -\frac{\bar{x}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(2\eta)}{\bar{x}^2+(\bar{y}-\eta)^2}d\eta = -\frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4\varphi(2\eta)}{4x^2+(y-2\eta)^2}d\eta.$$

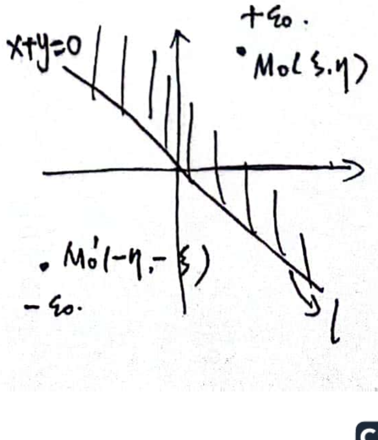
例子8. 设平面区域 $\Omega = \{(x,y): x+y>0\}$，

☆

(1) 求区域 Ω 的格林函数；

(2) 求区域 Ω 的定解问题：

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, x+y>0 \\ u|_{x+y=0} = \varphi(x). \end{cases}$$



解. (1). 设$M_0=(\xi,\eta)$为Ω 内点，则M_0 关于$x+y=0$ 的对称点为$M_0'=(-\eta,-\xi)$ 所以格林函数为

$$G(M;M_0)=-\frac{1}{2\pi}\left(\ln r(M,M_0)-\ln r(M,M_0')\right)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x+\eta)^2+(y+\xi)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

(2).单位外法向为$\vec{n}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$，所以

$$\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}|_{\xi+\eta=0}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(G_\xi+G_\eta)|_{\xi+\eta=0}=-\frac{x+y}{\pi\sqrt{2}}\frac{1}{(x-\xi)^2+(y+\xi)^2}.$$

注意：$dl=\sqrt{2}\,d\xi$
有个45°关系.
最后消去$\sqrt{2}$.

所以

$$u(x,y)=\frac{x+y}{\sqrt{2}\pi}\int\frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+(y+\xi)^2}dl=\frac{x+y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+(y+\xi)^2}d\xi.$$

2) 圆域上的格林函数：二维区域为半径为R 的圆内部，求格林函数，在圆内$M_0=(\xi,\eta,\zeta)$ 处有ε_0 的电荷，圆周上电势为零，求圆内电势分布。我们设$\rho_0=r(O,M_0)$，$\rho_1=R^2/\rho_0$。在

$$M_0'=\frac{\rho_1}{\rho_0}M_0=\frac{R^2}{\rho_0^2}(\xi,\eta,\zeta)$$

处摆放电荷，电量为

$$-\varepsilon_0.$$

此时，可以计算得到圆周上的电势虽然不是0，但是常数。实际上对于圆周上的任意点M，三角形OMM_0 与三角形OMM_0' 相似，所以

$$\frac{|MM_0'|}{|MM_0|}=\frac{|MO|}{|OM_0|}=\frac{R}{\rho_0},$$

所以当M 在圆周上的时候，M 处的电势为

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|MM_0'|}{|MM_0|}=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\rho_0}.$$

因而格林函数为

不要忘记

$$G(M;M_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r(M,M_0')}{r(M,M_0)}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\rho_0}=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\rho_0 r(M,M_0')}{Rr(M,M_0)}.$$

当M 再圆周上的时候，

$$G(M;M_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{\rho_0 r(M,M_0')}{Rr(M,M_0)}\right)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\rho_0 R}{R\rho_0}=0.$$

以下定解问题

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0, 0\le r\le R\\ u|_{r=R}=\varphi(\theta).\end{cases}$$

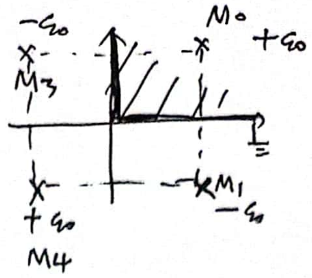
的解为

$$u(x,y)=-\int\varphi\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}dl=-\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)G_{\rho_0}Rd\theta.$$

设ψ 为OM 与OM_0 夹角。由余弦公式：

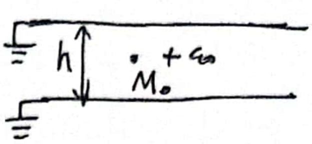
$$r(M,M_0)=\sqrt{r^2+\rho_0^2-2r\rho_0\cos\psi}$$

~~如果~~
例:



和

$$r(M,M_0')=\sqrt{r^2+\rho_1^2-2r\rho_1\cos\psi}=\sqrt{\frac{r^2\rho_0^2+R^4-2R^2r\rho_0\cos\psi}{\rho_0^2}}.$$

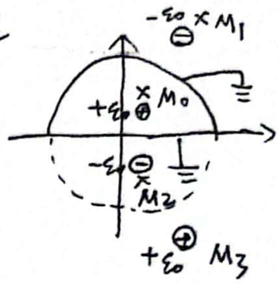


一层一层地面

所以

$$G(M;M_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\rho_0 r(M,M_0')}{Rr(M,M_0)}=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{r^2\rho_0^2+R^4-2R^2r\rho_0\cos\psi}}{R\sqrt{r^2+\rho_0^2-2r\rho_0\cos\psi}}.$$

二维



所以

$$G_{\rho_0}|_{\rho_0=R}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{2\rho_0r^2-2R^2r\cos\psi}{r^2\rho_0^2+R^4-2R^2r\rho_0\cos\psi}-\frac{2\rho_0-2r\cos\psi}{r^2+\rho_0^2-2r\rho_0\cos\psi}\right)|_{\rho_0=R}.$$

即

$$G_{\rho_0}|_{\rho_0=R}=\frac{1}{2\pi R}\frac{r^2-R^2}{r^2+R^2-2rR\cos\psi}.$$

所以

$$u(M)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(\theta)(R^2-r^2)}{r^2+R^2-2rR\cos(\theta-\phi)}d\theta,$$

如果三维平面
则 M_1-M_3处电荷量 $\times\frac{R}{\rho_0}$

其中ϕ 为M 的幅角。

我们的最后一个例子是书上的，用分离变量法求格林函数。

例子9. 区域为$\Omega: 0<x<a, 0<y<b$，求格林函数。

解. 只要解如下定解问题：

$$\begin{cases}\Delta_2 u=\delta(\xi,\eta), 0<x<a, 0<y<b\\ u|_{x=0}=u|_{x=a}=u|_{y=0}=u|_{y=b}=0.\end{cases}$$

2.3 热方程初始问题的基本解

我们说某些现象具有时间和空间的平移不变性，如果当初始状态做一个时间和空间的平移后，相应的物理过程也相应的做一个时间和空间的平移。特别地一个数学物理方程如果它的系数是与时间和空间无关的常数，那么它描述的物理过程就具有时间和空间的平移不变性，当初始状态发生平移后，我们仅需要对相应的解平移（把原来到时间空间换成相对时间和相对空间）即可。

设$\mathcal{L}$ 是x,y,z 的常系数（时间和空间的平移性质）线性微分算子。称

$$II_1:\begin{cases}u_t=\mathcal{L}u, t>0, -\infty<x,y,z<\infty\\ u(0,x,y,z)=\delta(x,y,z).\end{cases}$$

← 基本解方程

为柯西问题

$$II_2:\begin{cases}u_t=\mathcal{L}u+f(t,x,y,z), t>0, -\infty<x,y,z<\infty\\ u(0,x,y,z)=\varphi(x,y,z).\end{cases}$$

即 $u|_{t=0}=\varphi(M)$

的基本解。如果我们能解出II_1，那么II_2 的解也就知道了。设II_1 的解为

$$U(t,M), M=(x,y,z).$$

用分离变量法求Green函数

求D: $0<x<a$、$0<y<b$ 的Green函数

解: 即求 $\begin{cases} \Delta_2 u = -\delta(x-\xi, y-\eta) \\ u|_{x=0} = u|_{x=a} = u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0. \end{cases}$

求两个固有值问题:

$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(a)=0 \end{cases}$ $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$. $X_n = \sin\frac{n\pi x}{a}$

$\begin{cases} Y''+\mu Y=0 \\ Y(0)=Y(b)=0 \end{cases}$ $\mu_m = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$, $Y_m = \sin\left(\frac{m\pi}{b}\right)y$

记 $\varphi_{nm} = \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}$ $\Delta_2\varphi_{nm} = -\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]\varphi_{nm}$

D上所有函数可以用$\{\varphi_{nm}\}$表示.

$u = \sum_{n,m} C_{nm}\varphi_{nm}$

$\Delta_2 u = \sum_{n,m} C_{nm}\Delta_2\varphi_{nm} = \sum_{n,m}\left(-C_{nm}\left(\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right)\varphi_{n,m}\right) = \delta(x-\xi, y-\eta)$

$\delta(x-\xi, y-\eta) = \sum_{n,m}\frac{\langle\delta(x-\xi,y-\eta),\varphi_{nm}\rangle}{\langle\varphi_{nm},\varphi_{nm}\rangle}\varphi_{n,m}$

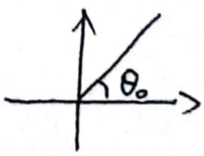
$\langle\delta(x-\xi,y-\eta),\varphi_{nm}\rangle = \int_0^a\int_0^b \delta(x-\xi,y-\eta)\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\,dy\,dx$

$= \sin\frac{n\pi\xi}{a}\sin\frac{m\pi\eta}{b}$.

对照得: $u = \frac{4ab}{\pi^2}\sum_{n,m}\frac{1}{m^2b^2+n^2a^2}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\varphi_{nm}$

其他例子: ① D: $-\infty<x<+\infty$, $0<y<H$

② D: $0<r<+\infty$, $\theta\in(0,\theta_0)$



则由时间和空间的平移性质，

$$(c):\begin{cases} u_t=\mathcal{L}u, t>\tau, -\infty<x,y,z<\infty \\ u(\tau,x,y,z)=\delta(M-M_0). \end{cases}$$

的解为

$$U(t-\tau, M-M_0).$$

则II_2 的解为

$$\boxed{U(t,M)*\varphi(M)+\int_0^t U(t-\tau,M)*f(\tau,M)d\tau}$$

只有时间平移

没有空间平移

为了理解这个式子，我们可以将II_2 用叠加原理分成两部分

$$(a)\begin{cases} u_t=\mathcal{L}u, t>0, -\infty<x,y,z<\infty \\ u(0,x,y,z)=\varphi(x,y,z). \end{cases}$$

和

$$(b)\begin{cases} u_t=\mathcal{L}u+f(t,x,y,z), t>0, -\infty<x,y,z<\infty \\ u(0,x,y,z)=0. \end{cases}$$

解的前半部分即是(a) 的解，其实

$$\varphi(M)=\varphi(M)*\delta(M)=\int_{\mathbb{R}^3}\varphi(M_0)\delta(M-M_0)dM_0.$$

从而(a) 的解为将上式中狄拉克函数替换为(c) 的解。即为

$$\int_{\mathbb{R}^3}\varphi(M_0)U(t,M-M_0)dM_0=U(t,M)*\varphi(M).$$

至于(b)，我们可以用冲量原理，只要求

$t-\tau>0$

$$(d)\begin{cases} u_t=\mathcal{L}u, t>\tau, -\infty<x,y,z<\infty \\ u(\tau,x,y,z)=f(\tau,x,y,z). \end{cases}$$

其解为

$$\boxed{f(\tau,M)*U(t-\tau,M).}$$

由冲量原理，(b) 的解为

$$\int_0^t f(\tau,M)*U(t-\tau,M)d\tau.$$

这样我们将(a) 和(b) 合起来就得到了II_2 的解。

上述是一般形式，我们回到热方程的基本解问题，

$$\boxed{\begin{cases} u_t=a^2\Delta_3 u, t>0, -\infty<x,y,z<\infty \\ u(0,x,y,z)=\delta(x,y,z). \end{cases}}$$

需要注意的是，一维二维三维的热方程基本解有相同的形式，因而此处我们仅说明三维的情形。做三维的傅里叶变换

$$\bar{U}(t,\lambda,\mu,\nu)=\int_{\mathbb{R}^3}u(t,x,y,z)e^{i(\lambda x+\mu y+\nu z)}dxdydz.$$

则

$$\begin{cases} \bar{U}_t = -a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\bar{U}, t>0, -\infty<\lambda,\mu,\nu<\infty \\ \bar{U}(0,\lambda,\mu,\nu)=1. \end{cases}$$

这是一个以t 为自变量的常微分方程。解之

$$\bar{U} = C(\lambda,\mu,\nu)e^{-a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)t}.$$

令$t=0$，得到

$$C(\lambda,\mu,\nu)=1.$$

所以

$$\bar{U} = e^{-a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)t}.$$

做傅里叶反变换。

$$\begin{aligned} u(t,x,y,z) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)t}e^{-i(\lambda x+\mu y+\nu z)}d\lambda d\mu d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-a^2\lambda^2 t}e^{-i\lambda x}d\lambda \times \cdots \end{aligned}$$

配平方

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-a^2\lambda^2 t}e^{-i\lambda x}d\lambda = \frac{1}{2\pi a\sqrt{t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(a\lambda\sqrt{t}+\frac{ix}{a\sqrt{t}})^2-\frac{x^2}{4a^2t}}d(a\sqrt{t}\lambda) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2\pi a\sqrt{t}}\underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda^2}d\lambda}_{\sqrt{\pi}} = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}.$$

所以基本解为

$$U(t,x,y,z) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3 e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2t}}.$$

二维热方程的基本解为

$$U(t,x,y) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^2 e^{-\frac{x^2+y^2}{4a^2t}}.$$

一维热方程的基本解为

$$U(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

可以看出热扩散时候始终保持正态分布，并且保持曲线或则曲面或者高维曲面下总体积不变，即能量守恒，后者可以通过傅里叶变换很容易得到，实际上

$$\int_{\mathbb{R}^3} U(t,x,y,z)dxdydz = \bar{U}(t,0,0,0).$$

而

$$\bar{U}_t(t,0,0,0)=0\text{即}\bar{U}(t,0,0,0)\text{恒等于常数}.$$

所以能量守恒。

2.4 波动方程初始问题的基本解

设$\mathcal{L}$ 是x, y, z 的常系数（时间和空间的平移性质）线性微分算子。称

$$II_1: \begin{cases} u_{tt} = \mathcal{L}u, t > 0, -\infty < x, y, z < \infty \\ u(0, x, y, z) = 0, u_t(0, x, y, z) = \delta(x, y, z). \end{cases}$$

基本解方程

为柯西问题

$$II_2: \begin{cases} u_{tt} = \mathcal{L}u + f(t, x, y, z), t > 0, -\infty < x, y, z < \infty \\ u(0, x, y, z) = \varphi(x, y, z), u_t(0, x, y, z) = \psi(x, y, z). \end{cases}$$

的基本解。如果我们能解出II_1，那么II_2 的解也就知道了。设II_1 的解为

$$U(t, M).$$

则II_2 的解为

☆
$$u(t, M) = \frac{\partial}{\partial t}[U(t, M) * \varphi(M)] + U(t, M) * \psi(M) + \int_0^t U(t-\tau, M) * f(\tau, M)d\tau.$$

这个方程的解有三部分，后面两部分都好理解，我们仅需要验证第一部分为定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = \mathcal{L}u, t > 0, -\infty < x, y, z < \infty \\ u(0, x, y, z) = \varphi(x, y, z), u_t(0, x, y, z) = 0. \end{cases}$$

的解即可。首先验证其满足泛定方程：即

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3}[U(t, M) * \varphi(M)] = \frac{\partial}{\partial t}[\frac{\partial^2}{\partial t^2}[U(t, M)] * \varphi(M)] = \frac{\partial}{\partial t}[\mathcal{L}[U(t, M)] * \varphi(M)] = \mathcal{L}\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}[U(t, M) * \varphi(M)]}_{u}.$$

其中

$$\mathcal{L}[U(t, M)] * \varphi(M) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{L}[U(t, M - M_0)]\varphi(M_0)dM_0 = \mathcal{L}[\int_{\mathbb{R}^3} U(t, M - M_0)\varphi(M_0)dM_0] = \mathcal{L}[U(t, M) * \varphi(M)].$$

然后验证初始条件：

$$\frac{\partial}{\partial t}[U(t, M) * \varphi(M)]|_{t=0} = U_t(t, M)|_{t=0} * \varphi(M) = \delta(M) * \varphi(M) = \varphi(M);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[U(t, M) * \varphi(M)]|_{t=0} = U_{tt}(t, M)|_{t=0} * \varphi(M) = \mathcal{L}[U(t, M)]|_{t=0} * \varphi(M) = \underbrace{\mathcal{L}[U(t, M)|_{t=0}]}_{0} * \varphi(M) = 0.$$

这样我们就完成了验证。

例子 10. 波动方程柯西问题的基本解：

$$II_1: \begin{cases} U_{tt} = a^2\Delta_3 U, t > 0, -\infty < x, y, z < \infty \\ U(0, x, y, z) = 0, U_t(0, x, y, z) = \delta(x, y, z). \end{cases}$$

解. 做三维的傅里叶变换

$$\bar{U}(t, \lambda, \mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}^3} u(t, x, y, z)e^{i(\lambda x + \mu y + \nu z)}dxdydz.$$

则

$$\begin{cases} \bar{U}_{tt} = -a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\bar{U}, t>0, -\infty<\lambda,\mu,\nu<\infty \\ \bar{U}(0,\lambda,\mu,\nu)=0, \bar{U}_t(0,\lambda,\mu,\nu)=1. \end{cases}$$

为了书写方便，我们设$\rho=\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}$，并记球极坐标

$$\lambda=\rho\sin\theta\cos\phi, \mu=\rho\sin\theta\sin\phi, \nu=\rho\cos\theta.$$

则

$$\begin{cases} \bar{U}_{tt} = -a^2\rho^2\bar{U}, t>0, -\infty<\lambda,\mu,\nu<\infty \\ \bar{U}(0,\lambda,\mu,\nu)=0, \bar{U}_t(0,\lambda,\mu,\nu)=1. \end{cases}$$

这是一个以t 为自变量的常微分方程。解之

$$\bar{U}=C(\lambda,\mu,\nu)\cos(a\rho t)+D(\lambda,\mu,\nu)\sin(a\rho t).$$

代入初始条件得到

$$C(\lambda,\mu,\nu)=0, D(\lambda,\mu,\nu)=\frac{1}{a\rho}.$$

所以

$$\bar{U}=\frac{\sin(a\rho t)}{a\rho}.$$

做傅里叶反变换，

$$U=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\sin(a\rho t)}{a\rho}e^{-i(\lambda x+\mu y+\nu z)}d\lambda d\mu d\nu.$$ (令$z=r$) ($\nu=\rho\cos\theta$)

通过观察，我们发现解应该是球对称的。也就是说U 的取值只是与时间和M 到零点的距离有关。即$U=U(t,r)$。所以

$d\lambda d\mu d\nu$

$$\begin{aligned} U(t,r) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(a\rho t)}{a\rho}e^{-i\rho r\cos\theta}\rho^2\sin\theta d\theta d\phi d\rho \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\int_0^\pi \frac{\rho\sin(a\rho t)}{a}e^{-i\rho r\cos\theta}\sin\theta d\theta d\rho \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{\sin(a\rho t)}{iar}e^{-i\rho r\cos\theta}\Big|_0^\pi d\rho \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{2\sin(\rho r)\sin(a\rho t)}{ar}d\rho \\ &= \frac{1}{8\pi^2 ar}\int_{-\infty}^\infty \cos(\rho r-a\rho t)-\cos(\rho r+a\rho t)d\rho. \end{aligned}$$

→ ~~对ρ来说是奇函数~~

$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

用公式

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\cos(\lambda x)d\lambda.$$

得到

$$U(t,r)=\frac{1}{4\pi ar}(\delta(r-at)-\delta(r+at)).$$

因为$r,a,t>0$，所以

$$U(t,r)=\frac{\delta(r-at)}{4\pi ar}.$$

这说明波以零点为中心，向四周以匀速a 扩散。这样我们就得到了三维波动方程的基本解。

有了三维波动方程的基本解，我们可以给出三维自由波的解。三维自由波定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta_3 u, t > 0, -\infty < x, y, z < \infty \\ u(0,x,y,z) = \varphi(x,y,z), u_t(0,x,y,z) = \psi(x,y,z). \end{cases}$$

其解为

$$u(t,M) = \frac{\partial}{\partial t}[U(t,M) * \varphi(M)] + U(t,M) * \psi(M).$$

其中后面项

$$\begin{aligned} U(t,M) * \psi(M) &= \int_{\mathbb{R}^3} U(t, M - M_0)\psi(M_0)dM_0 \\ &= \frac{1}{4\pi a}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\delta(r - at)}{r}\psi(M_0)dM_0. \end{aligned}$$

这里$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$. 由狄拉克函数的取值规则，我们可以立马得到状态函数$u(t,M)$ 只与与M 点距离at 的点的初始状态有关。把$M_0 = (\xi, \eta, \zeta)$ 写成以$M = (x,y,z)$ 为中心的球坐标形式，

$$\begin{cases} \xi = x + r\sin\theta\cos\varphi \\ \eta = y + r\sin\theta\sin\varphi \\ \zeta = z + r\cos\theta. \end{cases}$$

并取$\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi) = \psi(\xi,\eta,\zeta)$。得到

$$\begin{aligned} U(t,M) * \psi(M) &= \frac{1}{4\pi a}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{\delta(r-at)}{r}\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr \\ &= \frac{1}{4\pi a}\frac{1}{at}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\tilde{\psi}(at,\theta,\varphi)(at)^2\sin\theta d\varphi d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{S_{at}}\psi(M_0)dS \\ &= t[\frac{1}{4\pi(at)^2}\int_{S_{at}}\psi(M_0)dS]. \end{aligned}$$

中括号里相当于对球面求平均。记

$$M_{at}(\psi) = \frac{1}{4\pi(at)^2}\int_{S_{at}}\psi(M_0)dS.$$

则可以得到自由波的传播公式：

$$u(t,M) = \frac{\partial}{\partial t}[tM_{at}(\varphi)] + tM_{at}(\psi).$$

通常称之为泊松公式。

值得注意的是波动方程不同维数的基本解并不统一，下面我们给出一维波动方程的基本解，实际上，以前算过。

$$II_1: \begin{cases} U_{tt} = a^2U_{xx}, t > 0, -\infty < x, < \infty \\ U(0,x) = 0, U_t(0,x) = \delta(x). \end{cases}$$

由达朗贝尔公式：(不用Fourier变换)

$x-at \leq 0 \leq x+at$

$\Downarrow$

$-at \leq x \leq at$

$$u = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\delta(s)ds \xlongequal{0\text{在}[x-at,x+at]\text{吗?}} \begin{cases} \frac{1}{2a}, & x \in [-at, at] \\ 0, & x \notin \ldots \end{cases}$$

解. 做傅里叶变换

$$\bar{U}(t,\lambda)=\int_{\mathbb{R}^3}u(t,x)e^{i(\lambda x)}dxdydz.$$

则

$$\begin{cases}\bar{U}_{tt}=-a^2(\lambda^2)\bar{U}, t>0, -\infty<\lambda<\infty\\ \bar{U}(0,\lambda)=0, \bar{U}_t(0,\lambda)=1.\end{cases}$$

这是一个以t 为自变量的常微分方程。解之

$$\bar{U}=C(\lambda)\cos(a\lambda t)+D(\lambda)\sin(a\lambda t).$$

代入初始条件得到

$$C(\lambda)=0, D(\lambda)=\frac{1}{a\lambda}.$$

所以

$$\bar{U}=\frac{\sin(a\lambda t)}{a\lambda}.$$

做傅里叶反变换,

$$U=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\sin(a\lambda t)}{a\lambda}e^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{i\lambda at}-e^{-i\lambda at}}{2a\lambda i}e^{-i\lambda x}d\lambda.$$

所以

$$U(t,x)=\begin{cases}\frac{1}{2a}, & x\in[-at,at]\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以一维的基本解是简单的。

将一维波动方程的基本解代入一开始的公式，我们可以得到达朗贝尔公式。一维自由波

$$II_1:\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, t>0, -\infty<x,<\infty\\ u(0,x)=\varphi(x), u_t(0,x)=\psi(x).\end{cases}$$

的解为

$$u(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}[u(t,x)*\varphi(x)]+u(t,x)*\psi(x).$$

通过计算:

$$u(t,x)*\psi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}U(t,\xi)\psi(x-\xi)d\xi=\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\psi(x-\xi)d\xi=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi.$$

这是达朗贝尔公式的后半部分。

$$\frac{\partial}{\partial t}[u(t,x)*\varphi(x)]=\frac{\partial}{\partial t}[\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)d\xi]=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}.$$

这是达朗贝尔公式的前半部分。

二维: $\begin{cases}u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})\\ u|_{t=0}=0, \quad u_t|_{t=0}=\delta(x,y).\end{cases}$

降维法: $\begin{cases}V_{tt}=a^2(V_{xx}+V_{yy}+V_{zz})\\ V|_{t=0}, V_t|_{t=0}=\delta(x,y)\end{cases}$

由三维基本解: $V=U(t,M)*\delta(x,y)=\iiint U(t,x_0,y_0,z_0)\delta(x-x_0,y-y_0)dx_0dy_0dz_0=\begin{cases}\frac{1}{2\pi a}\frac{1}{\sqrt{a^2t^2-x^2-y^2}} & (x^2+y^2\le a^2t^2)\\ 0 & \ldots\end{cases}$

和差化积公式推导:

$$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\sin\alpha+\sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\ \sin\alpha-\sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\end{aligned}}$$

同理 $\cos\alpha \pm \cos\beta$

$$\tan\alpha\pm\tan\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\pm\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\ \cos\alpha-\cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\end{aligned}}$$

$\because$ $$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$\therefore$ ~~想~~ 只要记住 $$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\beta = \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

第一章 ①弦方程+定解条件，给出物理条件，可以写出相应的方程.

② 一些简单偏微分方程.

1.6.

解：(1) $u_y+a(x,y)u=0$

$\because (e^{\int a(x,y)dy}\cdot u)_y = e^{\int a(x,y)dy}(u_y+a(x,y)\cdot u)=0$

$\therefore e^{\int a(x,y)dy}\cdot u = f(x,z)$

$\therefore u = e^{-\int a(x,y)dy} f(x,z)$.

(2) $u_{xy}+u_y=0 \Rightarrow (u_x+u)_y=0 \Rightarrow u_x+u=f(x,z)$

对于 $e^{\int 1\cdot dx}$ 即 同乘 e^x. $\therefore (e^x\cdot u)_x = e^x f(x,z)$

$\therefore e^x u = \int e^x f(x,z)dx + g(y,z)$

$\therefore u = e^{-x}[\int e^{x} f(x,z)dx + g(y,z)]$

(3) $u_{tt}=a^2u_{xx}+3x^2$ (设 $u=u(x,t)$)

见习题.

(4) $u=u(x,y)$ $\begin{cases} u_{xy}=0 & -\infty<x,y<+\infty \\ u(0,y)=y, & u(x,0)=x^2. \end{cases}$

$\Rightarrow u = f(x)+g(y) \Rightarrow \begin{cases} f(0)+g(y)=y \\ f(x)+g(0)=x^2. \end{cases}$

$\therefore u = f(x)+g(y) = x^2+y-f(0)-g(0)$.

$\because u(0,0)=0=f(0)+g(0)$

$\Rightarrow u = x^2+y$

③ 达朗贝尔公式 $\longrightarrow \boxed{\begin{cases} \text{齐次} \\ -\infty<x<+\infty \end{cases}}$

$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & -\infty<x<+\infty, \ t>0. \\ u(0,x)=\varphi, & u_t(0,x)=\psi \end{cases}$

$\Rightarrow u(t,x) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds$.

如果非齐次

$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(t,x), & -\infty<x<+\infty, \ t>0 \\ u(0,x)=\varphi, & u_t(0,x)=\psi \end{cases}$

(1) 找特解.

(2) 冲量原理

例：$\begin{cases} u_{xx}-u_{yy}+\cos x=0, & -\infty<x,y<+\infty \\ u(x,0)=0,\ u_y(x,0)=4x \end{cases}$ → y相当于t的角色.

找特解 $\cos x$. $v=u-\cos x$.

$\therefore \begin{cases} v_{yy}=v_{xx} \\ v(x,0)=-\cos x,\ v_y(x,0)=4x. \end{cases}$ $\therefore v=\dfrac{-\cos(x+y)-\cos(x-y)}{2}+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}4x\,dx$

$=-\cos x\cos y+4xy$

$\therefore u=-\cos x\cos y+4xy+\cos x$

第二章 分离变量法.

$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<l,\ t>0 \\ u(t,0)=u(t,l)=0 \\ u(0,x)=\varphi,\ u_t(0,x)=\psi. \end{cases}$ 二个齐次 $\begin{cases}\text{方程齐次}\\ \text{边界条件齐次}\end{cases}$

例 $\begin{cases} \Delta_2 u=u_{rr}+\dfrac{u_r}{r}+\dfrac{u_{\theta\theta}}{r^2}=0, & 0<r<a,\ 0<\theta<\pi \\ u(a,\theta)=T\theta(\pi-\theta) \\ u(r,0)=u(r,\pi)=0 \end{cases}$

分离变量：$u=R\cdot\Theta$ $\quad R''\Theta+\dfrac{R'\Theta}{r}+\dfrac{R\Theta''}{r^2}=0 \Rightarrow -\dfrac{r^2R''+rR'}{R}=\dfrac{\Theta''}{\Theta}=-\lambda.$

$\therefore \begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta(0)=\Theta(\pi)=0 \end{cases} \Rightarrow$ 无零固有值. $\Theta=C_1\cos\sqrt{\lambda}\,\theta+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,\theta \Rightarrow \begin{cases} C_1=0 \\ \sqrt{\lambda}\,\pi=n\pi, & n=1,2,\cdots \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda_n=n^2,\ \Theta_n=\sin n\theta$

$r^2R''+rR'-n^2R=0$ (欧拉方程).

$r=e^t$. 得 $\dfrac{d^2R}{dt^2}-n^2R=0 \Rightarrow R_n=C_ne^{nt}+D_ne^{-nt}$

$\Rightarrow R_n=C_nr^n+D_nr^{-n}$

$\therefore u=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(C_nr^n+D_nr^{-n})\cdot\sin n\theta$

$D_n=0 \quad \therefore u=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}C_nr^n\sin n\theta$

$$\boxed{T\theta(\pi-\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\langle T\theta(\pi-\theta),\sin n\theta\rangle}{\langle\sin n\theta,\sin n\theta\rangle}\cdot\sin n\theta}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cdot a^n\cdot\sin n\theta$$

$\langle\sin n\theta,\sin n\theta\rangle=\displaystyle\int_0^\pi\sin^2 n\theta\,d\theta=\frac{\pi}{2}$

$\langle T\theta(\pi-\theta),\sin n\theta\rangle=\displaystyle\int_0^\pi T\theta(\pi-\theta)\sin n\theta\,d\theta$ → 由S-L 注意判断 $\rho(x)$ 的值

$=-\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^\pi T\theta(\pi-\theta)\,d\cos n\theta=-\frac{1}{n}\left(T\theta(\pi-\theta)\cos n\theta\Big|_0^\pi-\int_0^\pi\cos n\theta\,T(\pi-2\theta)d\theta\right)$

$=\dfrac{2T_0(1-(-1)^n)}{n^3}=\begin{cases} 0, & 2k. \\ \dfrac{4T_0}{(2k+1)^3}, & 2k+1,\ k=0,1,2,\cdots \end{cases}$

…

例 $\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+g & g\text{为常数} \quad 0<x<l,\ t>0 \\ u(t,0)=0 \quad u_x(t,l)=E, \\ u(0,x)=E\cdot x,\ u_t(0,x)=0 \end{cases}$

解：①边界条件齐次化. 特解 xE. $v=u-xE$ $\Rightarrow \begin{cases} v_{tt}=v_{xx}+g \\ v(t,0)=v_x(t,l)=0 \\ v(0,x)=0,\ v_t(0,x)=0. \end{cases}$

g的处理：① 特解 $\frac{g}{2}x(2l-x)$.

②冲量原理(适用：边界条件齐次或没有，+初始条件平凡)

固有值问题：$\begin{cases} y''-2ay'+\lambda y=0 & ,0<x<l \quad a\in R. \\ y(0)=y(l)=0 \end{cases}$

$y''-2ay'+\lambda y=0$

$[k(x)y']'-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0$

即 $k(x)y''+k'(x)y'-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0$

对照得：$\frac{k'(x)}{k(x)}=[\ln k(x)]'=-2a \Rightarrow k(x)=e^{-2ax}$.

$\frac{-q(x)}{k(x)}=0 \Rightarrow q(x)=0$

$\frac{\lambda\rho(x)}{k(x)}=\lambda \Rightarrow \boxed{\rho(x)=k(x)=e^{-2ax}.}$

$\therefore \begin{cases} [e^{-2ax}\cdot y']'+\lambda\cdot e^{-2ax}\cdot y=0. \ (\text{标准形式}). \\ y(0)=y(l)=0. \end{cases}$

满足I类边界条件. 由S-L. 固有值>0

特征方程：$\mu^2-2a\mu+\lambda=0 \Rightarrow \mu=a\pm\sqrt{a^2-\lambda}$

① $\lambda<a^2$. 设 $\lambda=a^2-k^2$, $k>0$. 略

② $\lambda=a^2$. ~~有两~~ 两个相同非零实根 $y=Ae^{ax}+Bxe^{ax}$. (略).

③ $\lambda>a^2$. 设 $\lambda=a^2+k^2$, $k>0$. $y=e^{ax}(A\cos kx+B\sin kx)$.

代入边界条件. $\begin{cases} A=0 \\ B\sin kl=0 \end{cases}$ 当 $\sin kl=0$时，有非零解. 即 $k=\frac{n\pi}{l}$. $n=1,2,\cdots$

固有值 $\lambda_n=a^2+(\frac{n\pi}{l})^2$. $y_n=e^{ax}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}$ $n=1,2,\cdots$

例：求 $u_{tt}=a^2\Delta_3 u$ 的形如 $T(t)R(t)$ 的解. $\lim_{t\to+\infty} u=0$. ☆

球：$\Delta_3 u = r^{-2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$

$$T''R=a^2\cdot T\cdot r^{-2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r^2\cdot R') = a^2T\left(R''+\frac{2}{r}R'\right).$$

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{r^2R''+2rR'}{r^2\cdot R}=-\lambda.\quad \therefore \begin{cases} T''+\lambda a^2T=0 \\ \lim_{t\to+\infty}T(t)=0.\end{cases}$$

$\Rightarrow$
① $\lambda=0$. $T''=0$. $T=a+bt$. $a=b=0$ 略.
② $\lambda>0$ 时，$T=A\cos akt+B\sin akt$ 略. $\lambda=k^2$. $k>0$.
③ $\lambda<0$ 时，$T=A\cdot e^{akt}+B\cdot e^{-akt}$. $\lambda=-k^2$, $k>0$.
由 $\lim_{t\to+\infty}u=0$　$A=0$.
$T=B\cdot e^{-akt}$.　$\lambda=-k^2$.

$rR''+2R'+\lambda\cdot r\cdot R=0.$ → 非区间定方程形式的求解！

$rR''+2R'-k^2\cdot r\cdot R=0.$ $\cancel{\Rightarrow r^2R''+2rR'-k^2r^2R=0}$

~~即 $[r^2R']'-k^2r^2R=0.$~~ 令 $y=rR$ $\cancel{\Rightarrow r^2\left(\frac{y}{r}\right)''+2r\cdot\left(\frac{y}{r}\right)'-k^2r^2\frac{y}{r}=0}$

$\therefore y''-k^2y=0$

$y=A\cdot e^{kr}+B\cdot e^{-kr}\quad\Rightarrow R=\frac{A}{r}e^{kr}+\frac{B}{r}e^{-kr}$

$\Rightarrow u=e^{-akt}\cdot\left(\frac{A}{r}\cdot e^{kr}+\frac{B}{r}e^{-kr}\right)$

第三章

①贝塞尔方程的固有值问题.

$$\begin{cases} x^2y''+xy'+(\mu x^2-\nu^2)y=0 & ,0<x<a \\ |y(0)|<\infty, \ \alpha y(a)+\beta y'(a)=0. \end{cases}$$

例：解 $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+u_{zz}=0 & ,0<r<a,0<z<l \\ u(a,z)=0 \\ u(r,0)=0, u(r,l)=T_0(\text{常数}) \end{cases}$

分离变量 $u=R\cdot Z$

$$R''\cdot Z+\frac{1}{r}R'\cdot Z+R\cdot Z''=0.$$

$$-\frac{Z''}{Z}=\frac{rR''+R'}{rR}=-\lambda.$$

$$rR''+R'+\lambda\cdot r\cdot R=0 \quad ,\rho=r$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2R''+rR'+\lambda\cdot r^2R=0 & ,0<r<a \\ |R(0)|<+\infty, \ R(a)=0. \end{cases}$$

$J_0(wa)=0$ 的所有正解设为 $0<w_1<w_2<\cdots$

固有值为 $\lambda_n=w_n^2$. 固有函数 $J_0(w_nr)$.

$$\Rightarrow Z''-w_n^2Z=0.$$

$$Z=A\cdot e^{w_nz}+B\cdot e^{-w_nz}.$$

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}(A_ne^{w_nz}+B_ne^{-w_nz})\cdot J_0(w_nr).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_n+B_n=0 \\ \sum_{n=1}^{\infty}(A_ne^{w_nl}+B_ne^{-w_nl})\cdot J_0(w_nr)=T_0. \end{cases}$$

$$\therefore A_n\cdot e^{w_nl}+B_n\cdot e^{-w_nl}=\frac{\langle T_0, J_0(w_nr)\rangle}{\langle J_0(w_nr), J_0(w_nr)\rangle}.$$

$$\langle J_0(w_nr), J_0(w_nr)\rangle=\frac{a^2J_1^2(w_na)}{2}$$

$$\langle T_0, J_0(w_nr)\rangle=\int_0^a T_0J_0(w_nr)\cdot r\,dr.$$

☆

$$\underline{\underline{w_nr=s}} \ \frac{T_0}{w_n^2}\int_0^{w_na}J_0(s)s\,ds=\frac{T_0}{w_n^2}\int_0^a(J_1(s)\cdot s)'\,ds$$

$$=\frac{T_0}{w_n^2}s\cdot J_1(s)\Big|_0^{w_na}=\frac{T_0a}{w_n}J_1(w_na)$$

对照 $\begin{cases} A_n+B_n=0 \\ A_n\cdot e^{w_nl}+B_n\cdot e^{-w_nl}=\frac{2T_0}{aw_nJ_1(w_na)} \end{cases}$

...

②勒让德 ...

仅对球坐标旋转对称($u=u(r,\theta)$)的泊松方程.

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}(A_nr^n+B_nr^{-n-1})P_n(\cos\theta)$$

(1) 球心有定义 $B_n=0$

(2) $a<r<b$, $A_n.B_n.\neq 0$.

(3) $r>a$ $\begin{cases} \lim_{r\to\infty}u=0. \ A_n=0. \\ \lim_{r\to\infty}u\text{有界}. \ A_n=0 \ (n\neq 0). \end{cases}$

例：求 $r>1$ 的调和函数 u, 使 $u|_{r=1}=\cos^2\theta$

$\lim_{r\to\infty}u=0.$

(必记)

解: $\boxed{u=\sum_{n=0}^{+\infty}(A_nr^n+B_n\cdot r^{-n-1})P_n(\cos\theta).}$ ☆

$\because \lim_{r\to\infty}u=0.$ $\therefore A_n=0.$ $n=0,1,2,\cdots$

$$\therefore u=\sum_{n=0}^{+\infty}B_n\cdot r^{-n-1}P_n(\cos\theta)$$

代入 $r=1$.

$$u(1,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}B_n\cdot P_n(\cos\theta)=\cos^2\theta.$$

设 $\cos^2\theta=x^2=C\cdot P_0(x)+D\cdot P_2(x)$

$$x^2=C\cdot 1+D\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$\cancel{\therefore C=x^2}=C+\frac{3}{2}D\cdot x^2-\frac{D}{2}.$$

$$\begin{cases} D=\frac{2}{3}=B_2 \\ C=\frac{1}{3}=B_0 \end{cases}$$

$$\therefore u(r,\theta)=B_0\cdot r^{-1}P_0(\cos\theta)+B_2\cdot r^{-3}P_2(\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{3r}+\frac{2}{3r^3}P_2(\cos\theta).$$

第四章.

例 $\begin{cases} \Delta_2 u = 0, \ \boxed{-\infty<x<+\infty}, y>0 \\ u(x,0)=f(x) \\ \text{当 } x^2+y^2\to+\infty \text{ 时}, u(x,y)\to 0. \end{cases}$ 概念

解: $\bar{u}(\lambda,y)=\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y)e^{i\lambda x}dx.$

$\begin{cases} -\lambda^2\bar{u}+\bar{u}_{yy}=0 \\ \bar{u}(\lambda,0)=F[f] \end{cases}$

$\bar{u}_{yy}=\lambda^2\bar{u}$

$\bar{u}(\lambda,y)=C_1(\lambda)e^{\lambda y}+C_2(\lambda)e^{-\lambda y}.$

代入 $y=0 \Rightarrow \bar{u}(\lambda,0)=C_1(\lambda)+C_2(\lambda)=F[f].$

$\lim\limits_{\lambda^2+y^2\to+\infty}\bar{u}(\lambda,y)=0$

$C_1(\lambda)=0$, 当 $\lambda>0$. $\Rightarrow C_2(\lambda)=F[f]$

$C_2(\lambda)=0$, 当 $\lambda<0$. $\Rightarrow C_1(\lambda)=F[f].$

$\therefore \bar{u}(\lambda,y)=\begin{cases} F[f]e^{-\lambda y}, & \lambda>0.\ y>0 \\ F[f]e^{\lambda y}, & \lambda<0.\ y>0. \end{cases}$

$h(\lambda)=\begin{cases} 1, & \lambda>0 \\ 0: & \lambda<0. \end{cases}$

$u(x,y)=f(x)*F^{-1}[e^{-\lambda y}\cdot h(\lambda)]+f(x)*F^{-1}[e^{\lambda y}(1-h(\lambda))]$

$F^{-1}[e^{-\lambda y}h(\lambda)]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-\lambda y}\cdot e^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{y+ix}$

$F^{-1}[e^{\lambda y}(1-h(\lambda))]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}e^{\lambda y}\cdot e^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{y-ix}$

$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\left(f*\frac{1}{y+ix}+f*\frac{1}{y-ix}\right)=\frac{y}{\pi}\left(f*\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

$=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(s)}{(x-s)^2+y^2}ds$

例 $\begin{cases} u_t=u_{xx}-2u_x+u & (-\infty<x<+\infty, t>0) \\ u|_{t=0}=\delta(x). \end{cases}$

$\bar{u}(t,\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(t,x)e^{i\lambda x}dx.$

$\bar{u}_t=(-\lambda^2+2\lambda i+1)\bar{u}$

$\therefore \bar{u}=C(\lambda)e^{(-\lambda^2+2\lambda i+1)t}$

$\because \bar{u}(0,\lambda)=1$

$\therefore C(\lambda)=1.$

$\therefore \bar{u}=e^{(-\lambda^2+2\lambda i+1)t}$

$\therefore u=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{(-\lambda^2+2\lambda i+1)t}\cdot e^{-i\lambda x}d\lambda.$

$\cancel{=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{(\lambda^2 t-2\lambda i+i\lambda x)}}\ {}^{+i\lambda(x-2)t}\ e^t d\lambda.$

$\cancel{=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\sqrt{t}\lambda)}}$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2 t+2i\lambda t-i\lambda x}\cdot e^t d\lambda.$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(t\cdot\lambda^2+\lambda i(x-2t))}\cdot e^t d\lambda$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdot e^{-(\sqrt{t}\lambda+\frac{i(x-2t)}{2\sqrt{t}})^2}\cdot e^{\frac{-(x-2t)^2}{4t}}\cdot e^t d\lambda$

$=\frac{1\cdot\sqrt{\pi}}{2\pi\sqrt{t}}\cdot e^{t-\frac{(x-2t)^2}{4t}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\cdot e^{t-\frac{(x-2t)^2}{4t}}$

可以解 $\begin{cases} u_t=u_{xx}-2u_x+u+f \\ u|_{t=0}=\varphi(x) \end{cases}$

第五章.

两个基本解 $\overset{\text{放}}{(-\varepsilon_0)}$

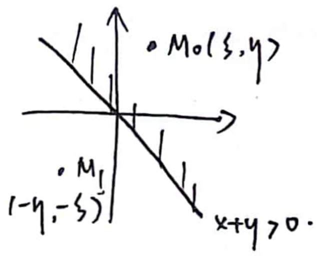
$\Delta_3 u=\delta(x,y,z) \qquad u=-\dfrac{1}{4\pi r}$

$\Delta_2 u=\delta(x,y) \qquad u=\dfrac{\ln r}{2\pi}$

格林函数　放正电荷

→ { 镜像法
　 固有函数法.

例: $\Omega=\{(x,y),\ x+y>0\}$. 求Green函数.



在M_0放"$+\varepsilon_0$"电荷.

在 M_1放"$-\varepsilon_0$"电荷.

$$G(M;M_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln r(M;M_1)-\ln r(M;M_0)\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{(x+\eta)^2+(y+\xi)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

求 $\begin{cases}\Delta_2 u=0, & x+y>0\\ u|_{x+y=0}=\varphi(x)\end{cases}$ 的解. (二维)

$$u=-\int\varphi(M_0)\frac{\partial_{M_0}G(M;M_0)}{\partial\vec n}\,dl$$

$$\vec n=\frac{1}{\sqrt2}(-1,-1).$$

$$\frac{\partial G(M;M_0)}{\partial\vec n}\Big|_{\xi+\eta=0}=-\frac{1}{\sqrt2}(G_\xi+G_\eta)\Big|_{\xi+\eta=0}.$$

$$=-\frac{x+y}{\pi\sqrt2}\frac{1}{(x-\xi)^2+(y+\xi)^2}$$

$\because dl=\sqrt2\,d\xi.$

$$\therefore u=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\frac{x+y}{\pi\sqrt2}\frac{1}{(x-\xi)^2+(y+\xi)^2}\cdot\sqrt2\,d\xi.$$

$$=\frac{x+y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{(x-\xi)^2+(y+\xi)^2}\,d\xi.$$

用基本解求

$\begin{cases}u_t+au_x=f(t,x)\\ u(0,x)=\varphi(x)\end{cases}$ $t>0$ ~~$-\infty<x<+\infty$~~　$-\infty<x<+\infty$

基本解方程.

$$\begin{cases}w_t+aw_x=0\\ w(0,x)=\delta(x).\end{cases}$$

Fourier…:

$$\bar w(t,\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}w(t,x)\cdot e^{i\lambda x}\,dx.$$

$$\therefore\begin{cases}\bar w_t-i\lambda a\bar w=0\\ \bar w|_{t=0}=1.\end{cases}$$

$\therefore\ \bar w=e^{i\lambda at}\cdot C(\lambda)$

$\because\ t=0\quad \bar w=1$

$\therefore\ C(\lambda)=1$

$\therefore\ \bar w=e^{i\lambda at}.$

$$\therefore w=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda at}\cdot e^{-i\lambda x}\,d\lambda.$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda(x-at)}\,d\lambda.$$

$$=\delta(x-at).$$

$\therefore\ U(t,x)=\delta(x-at).$ (基本解)

$$\therefore u(t,x)=U(t,x)*\varphi(x)+\int_0^t U(t-\tau,x)*f(\tau,x)\,d\tau$$

$=\cdots$

波动方程初始问题的基本解

$$\begin{cases} u_{tt}=\mathcal{L}u+f(t,M), & t>0,\ -\infty<x,y,z<+\infty \\ u(0,M)=\varphi(M), & u_t(0,M)=\psi(M) \end{cases} \quad \underline{\text{基本解方程}} \quad \begin{cases} U_{tt}=\mathcal{L}U, & t>0,\ -\infty<x,y,z<+\infty \\ U(0,M)=0, & U_t(0,M)=\delta(M) \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$U(t,M)$$

$$u(t,M)=U(t,M)*\psi(M)+\int_0^t U(t-\tau,M)*f(\tau,M)\,d\tau+\frac{\partial}{\partial t}\left[U(t,M)*\varphi(M)\right]$$

波动方程柯西问题的基本解

$$\begin{cases} U_{tt}=a^2\Delta_3 U, & t>0,\quad -\infty<x,y,z<+\infty \\ U(0,x,y,z)=0, & U_t(0,x,y,z)=\delta(x,y,z) \end{cases}$$

Fourier变换:

$$\bar{U}(t,\lambda,\mu,\nu)=\int_{R^3}U(t,x,y,z)e^{i(\lambda x+\mu y+\nu z)}\,dx\,dy\,dz$$

则
$$\begin{cases} \bar{U}_{tt}=-a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\bar{U}, & t>0,\ -\infty<x,y,z<+\infty \\ \bar{U}(0,\lambda,\mu,\nu)=0, & \bar{U}_t(0,\lambda,\mu,\nu)=1 \end{cases}$$

记 $\rho=\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}$ $\quad \lambda=\rho\sin\theta\cos\phi,\ \mu=\rho\sin\theta\sin\phi,\ \nu=\rho\cos\theta.$

$$\begin{cases} \bar{U}_{tt}=-a^2\rho^2\bar{U}, & t>0,\ -\infty<\lambda,\mu,\nu<+\infty \\ \bar{U}(0,\lambda,\mu,\nu)=0, & \bar{U}_t(0,\lambda,\mu,\nu)=1 \end{cases}$$

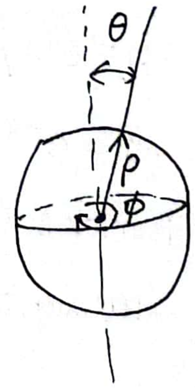
解之，$\bar{U}=C(\lambda,\mu,\nu)\cos(a\rho t)+D(\lambda,\mu,\nu)\sin(a\rho t)$

代入初始条件: $C(\lambda,\mu,\nu)=0$，$D(\lambda,\mu,\nu)=\dfrac{1}{a\rho}$

$$\therefore \bar{U}=\frac{\sin(a\rho t)}{a\rho}$$

Fourier反变换:

$$U=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{R^3}\frac{\sin(a\rho t)}{a\rho}e^{-i(\lambda x+\mu y+\nu z)}\,d\lambda\,d\mu\,d\nu.$$



观察知，$U=U(t,r)$ $\qquad$ (令 $z=r$，$\nu=\rho\cos\theta$).

$$\therefore U(t,r)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\sin(a\rho t)}{a\rho}e^{-i\rho r\cos\theta}\,\underline{\rho^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,d\rho}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\frac{2\sin(\rho r)\sin(a\rho t)}{ar}\,d\rho \qquad \text{即 } \rho\,d\rho\,d\theta\cdot\rho\sin\theta\,d\phi$$

$$=\frac{1}{8\pi^2 ar}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\cos(\rho r-a\rho t)-\cos(\rho r+a\rho t)\right]d\rho$$

$$=\frac{1}{4\pi ar}\left(\delta(r-at)-\delta(r+at)\right)=\frac{\delta(r-at)}{4\pi ar}.$$

P16 $\quad u=\frac{2}{3}\sin x\sin(3t)$

P17

$$\int_0^1 x^m P_n(x)\,dx = \begin{cases} n=0, & \frac{1}{m+1} \\ m=0,\ n\geq 1, & \int_0^1 P_n(x)dx=\frac{1}{2n+1}\int_0^1 P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)\,dx=\frac{-P_{n+1}(0)+P_{n-1}(0)}{2n+1}. \\ m.n\geq 1 & \int_0^1 x^m P_n(x)dx = \frac{m}{m+n+1}\int_0^1 x^{m-1}P_{n-1}(x)dx. \end{cases}$$

☆.

eg: $\int_{-1}^1 P_4(x)x^4\,dx=\frac{4}{9}\int_{-1}^1 P_3(x)x^3dx=\frac{4}{9}\times\frac{3}{7}\int_{-1}^1 P_2(x)x^2dx=\frac{4}{9}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{5}\int_{-1}^1 P_1(x)\cdot x\,dx$

$=\frac{4}{9}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{5}\int_{-1}^1\times\frac{1}{3}\int_{-1}^1 P_0(x)\cdot dx=\frac{4}{9}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}\times 2=\frac{16}{315}$

$\langle P_n,P_n\rangle=\int_{-1}^1 P_n^2(x)dx=\frac{2}{2n+1}$

正交性, if $n\neq m$. 则 $\langle X_n,X_m\rangle=\int_a^b X_n(x)X_m(x)\rho(x)dx=0$.

f 按勒让德多项式展开 $\quad f(x)=\sum_{n=0}\frac{\langle f,P_n\rangle}{\langle P_n,P_n\rangle}P_n$. $\quad \langle P_n,P_n\rangle=\frac{2}{2n+1}$

$$F[e^{-ax^2}]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}e^{i\lambda x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\sqrt{a}x-\frac{i\lambda}{2\sqrt{a}})^2}\cdot e^{\frac{(i\lambda)^2}{4a}}dx=e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}.$$

$$F^{-1}[e^{-a\lambda^2}]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a\lambda^2}e^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\sqrt{a}\lambda+\frac{ix}{2\sqrt{a}})^2}\cdot e^{\frac{(ix)^2}{4a}}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{x^2}{4a}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4a}}.$$

$$N_\nu^2=\langle J_\nu(\omega x),J_\nu(\omega x)\rangle=\int_0^a \underset{\substack{\uparrow\\ \rho=x.}}{x}\,J_\nu^2(\omega x)dx$$

对于一般形式定解问题: $\begin{cases}\Delta u=-f(x,y,z), & z>0\\ G|_{z=0}=\varphi(x,y).\end{cases}$

$$\boxed{u(M)=-\int_S\varphi(M_0)\frac{\partial_{M_0}G}{\partial\vec{n}}dS+\int_V G f(M_0)\,dM_0}$$

记住是 $\varphi(M_0)$ 即 φ 里面坐标要换成 ξ,η,ζ

概念.

球形域: $M_0(\xi,\eta,\zeta)$ $M_0' = \frac{R^2}{\rho_0^2}(\xi,\eta,\zeta)$

$$G(M;M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r(M,M_0)}-\frac{R}{\rho_0 r(M,M_0')}\right)$$

$-\varepsilon_0$.

三维: $-\frac{1}{4\pi r}$

二维: $\frac{1}{2\pi}\ln r$

圆域: $M_0(\xi,\eta)$ $M_0' = \frac{R^2}{\rho_0^2}(\xi,\eta)$

$$G(M;M_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln|MM_0'|-\ln|MM_0|-\ln\frac{R}{\rho_0}\right)$$

~~三~~ 热方程初始问题的基本解.

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(t,x,y,z), & t>0, \quad x,y,z\in R \\ u(0,x,y,z)=\varphi(x,y,z) \end{cases}$$

基本解方程 $\begin{cases} u_t=\Delta u, & t>0, \quad x,y,z\in R \\ u(0,x,y,z)=\delta(x,y,z). \end{cases}$

$\Downarrow$

$U(t,M)$, $M=(x,y,z)$.

$\Downarrow$

$$u = U(t,M)*\varphi(M)+\int_0^t U(t-\tau,M)*f(\tau,M)\,d\tau.$$

热方程的基本解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta_3 u, & t>0, \quad -\infty<x,y,z<\infty \\ u(0,x,y,z)=\delta(x,y,z) \end{cases}$$

作Fourier变换:

$$\bar{u}(t,\lambda,\mu,\nu)=\int_{R^3}u(t,x,y,z)e^{i(\lambda x+\mu y+\nu z)}dxdydz$$

则 $\begin{cases} \bar{u}_t = -a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\bar{u}, & t>0, \quad -\infty<\lambda,\mu,\nu<+\infty \\ \bar{u}(0,\lambda,\mu,\nu)=1 \end{cases}$

$\therefore \bar{u}=C(\lambda,\mu,\nu)e^{-a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)t}$ 令 $t=0$, $\bar{u}(0,\lambda,\mu,\nu)=1$

$\therefore \bar{u}=e^{-a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)t}$

作Fourier反变换

$$\therefore u(t,x,y,z)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_R\int_R\int_R e^{-a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)t}e^{-i(\lambda x+\mu y+\nu z)}d\lambda d\mu d\nu$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R e^{-a^2\lambda^2 t}e^{-i\lambda x}d\lambda \times \cdots$$

配平方: $\frac{1}{2\pi}\int_R e^{-a^2\lambda^2 t}e^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_R e^{-(a\sqrt{t}\lambda+\frac{ix}{2a\sqrt{t}})^2}\cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\cdot d\lambda=\frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2\pi a\sqrt{t}}\cdot\sqrt{\pi}$.

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

$\therefore$ 基本解, $U(t,M)=\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3\cdot e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2t}}$

一、二、三维解的热方程解有相同的形式.

习题解答.

1 第一章

问题(六). 设$u=u(x,y,z)$, 求下列方程的通解:

(1) $u_y+a(x,y)u=0$;

(2) $u_{xy}+u_y=0$;

(3) $u_{tt}=a^2u_{xx}+3x^2$.

解. (1) 注意到$0=e^{\int_0^y a(x,y)dy}(u_y+a(x,y)u)=(e^{\int_0^y a(x,y)dy}u)_y$。所以

$$e^{\int_0^y a(x,y)dy}u=f(x,z).$$

所以

$$u=e^{-\int_0^y a(x,y)dy}f(x,z).$$

(2) $(u_x+u)_y=0$。所以$u_x+u=f(x,z)$。即

$$(e^x u)_x=f(x,z).$$

所以

$$e^x u=\int f(x,z)dx+g(y,z).$$

所以$u=e^{-x}(\int f(x,z)dx+g(y,z))$。

(3) 如果$a\neq 0$, 特解$v=-\frac{x^4}{4a^2}$。设$w=u-v$, 则

$$w_{tt}=a^2w_{xx}$$

得到

$$w=f(x+at)+g(x-at).$$

所以通解$u=f(x+at)+g(x-at)-\frac{x^4}{4a^2}$。

如果$a=0$,

$$u=\frac{3x^2t^2}{2}+g(x)+th(x).$$

问题(十二). 求一端固定的半无界弦振动问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, x>0, t>0 \\ u(0,x)=\sin x, u_t(0,x)=kx \\ u(t,0)=0. \end{cases}$$

解. 端点固定($u(t,0)=0$)做奇延拓, 端点自由运动($u_x(t,0)=0$)做偶延拓, 这里0点固定, 因而奇延拓。新的定解问题为

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{xx}, -\infty<x<+\infty, t>0 \\ v(0,x)=\sin x, v_t(0,x)=kx \\ v(t,0)=0. \end{cases}$$

由达朗贝尔公式

$$u(t,x)=v(t,x)|_{t\geq 0}=\frac{\sin(x+at)+\sin(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}ksds=\sin(x)\cos(at)+2kxt.$$

问题. 求解一维弦得振动问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}-4t+2x, -\infty<x<+\infty, t>0 \\ u(0,x)=x^2, u_t(0,x)=\sin(3x) \end{cases}$$

解. 达朗贝尔公式要求方程齐次，取泛定方程得一个特解$v(t,x)=-\frac{2t^3}{3}+xt^2$。设$w=u-v$，得

$$\begin{cases} w_{tt}=w_{xx}, -\infty<x<+\infty, t>0 \\ w(0,x)=x^2, w_t(0,x)=\sin(3x). \end{cases}$$

由达朗贝尔公式

$$w=\frac{(x-t)^2+(x+t)^2}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\sin(3s)ds=x^2+t^2+\frac{1}{3}\sin(3x)\sin(3t).$$

所以

$$u(t,x)=w+v=x^2+t^2-\frac{2t^3}{3}+xt^2+\frac{1}{3}\sin(3x)\sin(3t)$$

2 第二章

3. 一条均匀的弦固定于$x=0$ 及$x=l$，在开始的一瞬间，它的形状是一条以$(\frac{l}{2},h)$ 为顶点的抛物线，初速度为零，且没有外力作用，求弦的位移函数。

解. 定解问题为：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, 0<x<l, t>0 \\ u(0,x)=\frac{4h}{l^2}x(l-x), u_t(0,x)=0 \\ u(t,0)=0, u(t,l)=0 \end{cases}$$

分离变量，假设

$$u(t,x)=T(t)X(x).$$

带入泛定方程可得

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}.$$

上式左边为t的函数，右边为x的函数，因而肯定为常值，设为$-\lambda$。从而我们得到以下固有值问题：

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0, 0<x<l \\ X(0)=0, X(l)=0. \end{cases}$$

以及

$$T''(t)+\lambda a^2T=0.$$

分情况讨论：

(1) $\lambda<0$时，$X=C_1e^{\sqrt{-\lambda x}}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda x}}$。带入边界条件得到$C_1=C_2=0$。舍去。

(2) $\lambda=0$时，$X=C_1x+C_2$。带入边界条件得到$C_1=C_2=0$。舍去。

(3) $\lambda>0$时，$X=C_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+C_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$。带入边界条件带入边界条件

$$\begin{cases} C_1=0, \\ C_1\cos(\sqrt{\lambda}l)+C_2\sin(\sqrt{\lambda}l)=0. \end{cases}$$

得到$C_1=0$ 以及

$$\sqrt{\lambda}l=n\pi, n=1,2,3\cdots.$$

固有值和固有函数为：

$$\text{固有值}:\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2\text{对应固有函数}:X_n=\sin(\frac{n\pi x}{l}), n=1,2,3\cdots.$$

固定λ_n，则可以得到对应T_n的常微分方程：

$$T_n''=-\lambda_n a^2T_n=-(\frac{n\pi a}{l})^2T_n.$$

解得

$$T_n(t)=A_n\cos(\frac{n\pi at}{l})+B_n\sin(\frac{n\pi at}{l}), n=1,2\cdots.$$

整理得原定解问题的解为

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(\frac{n\pi at}{l})+B_n\sin(\frac{n\pi at}{l})\right)\sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

由初始条件

$$u_t(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n n\pi a\sin(\frac{n\pi x}{l})=0.$$

所以$B_n=0$。展开$u(0,x)$

$$\frac{4h}{l^2}x(l-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\langle\varphi,X_n\rangle}{\langle X_n,X_n\rangle}X_n.$$

$$\frac{4h}{l^2}x(l-x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nX_n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

其中

$$c_n=\frac{\langle\varphi,X_n\rangle}{\langle X_n,X_n\rangle}=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{4h}{l^2}s(l-s)\sin(\frac{n\pi s}{l})ds=\frac{16h((-1)^n-1)}{(n\pi)^3}.$$

当n 为奇数得时候$c_n=\frac{32h}{(n\pi)^3}$，当n 为偶数时，$c_n=0$。所以

$$u(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{32h}{(2n+1)^3\pi^3}\cos(\frac{(2n+1)\pi at}{l})\sin(\frac{(2n+1)\pi x}{l})$$

5.(3)

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}-2hu_t, (0<x<l, t>0, 0<h<\frac{\pi a}{l}, h\text{ 为常数}), \\ u(t,0)=u(t,l)=0, \\ u(0,x)=\varphi(x), u_t(0,x)=\psi(x). \end{cases}$$

方程齐次、边界齐次.

解. 分离变量，假设$u(t,x)=T(t)X(x)$. 带入泛定方程可得

$$\frac{T''+2hT'}{a^2T}=\frac{X''}{X}.$$

上式左边为t的函数，右边为x的函数，因而肯定为常值，设为$-\lambda$。从而我们得到以下固有值问题：

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0, 0<x<l \\ X(0)=0, X(l)=0. \end{cases}$$

以及

$$T''(t)+2hT'+\lambda a^2T=0.$$

解固有值问题得到固有值和固有函数为：

$$固有值:\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2对应固有函数:X_n=\sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

固定λ_n，则可以得到对应T_n的常微分方程：

$$\underline{T_n''(t)+2hT_n'+(\frac{n\pi}{l})^2a^2T_n=0.}$$

解得

$$\underline{T_n(t)=e^{-ht}\left(A_n\cos(\sqrt{(\frac{n\pi a}{l})^2-h^2}t)+B_n\sin(\sqrt{(\frac{n\pi a}{l})^2-h^2}t)\right), n=1,2\cdots.}$$

整理得原定解问题的解为

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-ht}\left(A_n\cos(\sqrt{(\frac{n\pi a}{l})^2-h^2}t)+B_n\sin(\sqrt{(\frac{n\pi a}{l})^2-h^2}t)\right)\sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

其中

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(s)\sin(\frac{n\pi s}{l})ds,$$

$$B_n=\frac{1}{\sqrt{(\frac{n\pi a}{l})^2-h^2}}\left(ha_n+\frac{2}{l}\int_0^l\psi(s)\sin(\frac{n\pi s}{l})ds\right).$$

5.(6) 环域内的狄利克莱问题：

$$\begin{cases} \Delta_2u=0, (a<r<b), \\ u(a,\theta)=1, u(b,\theta)=0. \end{cases}$$

解. 容易看出u 与θ 无关，不妨设$u=u(r)$，所以

$$\Delta_2u=u_{rr}+\frac{u_r}{r}=u''+\frac{u'}{r}=0.$$

做变量替换$r=e^t$ 得到

$$\frac{d^2u}{dt^2}=0.$$

所以$u=A+Bt=A+B\ln r$。带入边界条件得

$$A+B\ln a=1, A+B\ln b=0.$$

解得：$A = -\frac{\ln b}{\ln a - \ln b}, B = \frac{1}{\ln a - \ln b}$。所以

$$u = \frac{\ln r - \ln b}{\ln a - \ln b}.$$

8. 一个半径为a 的半圆形平板，其圆周边界上的温度保持$u(a,\theta) = T\theta(\pi - \theta)$，而直径边界上的温度为零度，板的上下侧面绝热，试求板内的温度分布。

解. 写出定解问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} = 0, 0 < r < a, 0 < \theta < \pi \\ u(a,\theta) = T\theta(\pi - \theta) \\ u(r,0) = u(r,\pi) = 0 \end{cases}$$

分离变量，设$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$，则有

$$-\frac{r^2R'' + rR'}{R} = \frac{\Theta''}{\Theta}$$

为常数，设为$-\lambda$，得到固有值问题

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0, 0 < \theta < \pi \\ \Theta(0) = \Theta(\pi) = 0. \end{cases}$$

解得固有值及对应固有函数：$\lambda_n = n^2, \Theta_n = \sin(n\theta), n = 1, 2, 3 \cdots$. 将固有值带入R 得微分方程

$$r^2R_n'' + rR_n' - n^2R_n = 0,$$

做变量替换$r = e^t$，得

$$\frac{d^2R}{dt^2} - n^2R = 0.$$

解之，得

$$R_n = C_{n,1}e^{nt} + C_{n,2}e^{-nt} = C_{n,1}r^n + C_{n,2}r^{-n}, n = 1, 2, 3 \cdots .$$

注意到$|R(0)| < \infty$ 得

$$R_n = C_n r^n, n = 1, 2, 3 \cdots .$$

从而

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\theta) r^n.$$

求系数，将$T\theta(\pi - \theta)$ 按正弦函数分解：

$$T\theta(\pi - \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8T_0}{(2n+1)^3\pi} \sin((2n+1)\theta).$$

对照得$C_{2n} = 0, C_{2n+1} = \frac{8T_0}{(2n+1)^3\pi a^{2n+1}}$。所以

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8T_0}{(2n+1)^3\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} \sin((2n+1)\theta).$$

分部积分方法 $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\int u v' dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

1. 解下列固有值问题

(1).

$$\begin{cases} y'' - 2ay' + \lambda y = 0, 0 < x < l, a = constant, \\ y(0) = y(l) = 0. \end{cases}$$

解. 化为

$$\begin{cases} [e^{-2ax}y']' + e^{-2ax}\lambda y = 0, 0 < x < l, a = constant, \\ y(0) = y(l) = 0. \end{cases}$$

由SL 理论，零不是固有值，且固有值大于零。解方程$t^2 - 2at + \lambda = 0$，得$t = a \pm \sqrt{a^2 - \lambda}$。如果$\lambda < a^2$，解之，舍去。如果$\lambda = a^2$，解之，舍去。如果$\lambda > a^2$，$y = C_1 e^{ax}\cos(\sqrt{\lambda - a^2}x) + C_2 e^{-ax}\sin(\sqrt{\lambda - a^2}x)$。代入边界条件，得$C_1 = 0$，$\sin(\sqrt{\lambda - a^2}l) = 0$。得

$$\sqrt{\lambda - a^2}l = n\pi, n = 1, 2, \cdots.$$

固有值$\lambda_n = a^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$，固有函数$y_n = e^{ax}\sin(\frac{n\pi x}{l}), n = 1, 2, \cdots.$

问题. 求固有值问题：

$$\begin{cases} y'' + 2y' + \lambda y = 0, 0 < x < 9, \\ y(0) = y(9) = 0. \end{cases}$$

解. 化为

$$\begin{cases} [e^{2x}y']' + e^{2x}\lambda y = 0, 0 < x < 9, \\ y(0) = y(9) = 0. \end{cases}$$

由SL 理论，零不是固有值，且固有值大于零。解方程$t^2 + 2t + \lambda = 0$，$\lambda \le 1$ 讨论可以舍去，$\lambda > 1$ 时得$t = -1 \pm \sqrt{\lambda - 1}i$。所以$y = C_1 e^{-x}\cos(\sqrt{\lambda - 1}x) + C_2 e^{-x}\sin(\sqrt{\lambda - 1}x)$。代入边界条件，得$C_1 = 0$，$\sin(9\sqrt{\lambda - 1}) = 0$。得

$$9\sqrt{\lambda - 1} = n\pi, n = 1, 2, \cdots.$$

固有值$\lambda_n = 1 + \left(\frac{n\pi}{9}\right)^2$，固有函数$y_n = e^{-x}\sin(\frac{n\pi}{9}x), n = 1, 2, \cdots.$

(2).

$$\begin{cases} [r^2 R']' + \lambda r^2 R = 0, 0 < r < a, \\ |R(0)| < \infty, R(a) = 0; [\text{提示：} y = rR] \end{cases}$$

解. 由提示做因变量替换$y = rR$，则$R = y/r$。

$$[r^2 R']' + \lambda r^2 R = [r^2(y/r)']' + \lambda yr = ry'' + \lambda ry = 0.$$

即

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, 0 < r < a, \\ |y(0)| = 0, y(a) = 0. \end{cases}$$

固有值和对应固有函数为$\lambda_n = (\frac{n\pi}{a})^2$，$R_n = y_n/r = \frac{1}{r}\sin(\frac{n\pi r}{a}), n = 1, 2, \cdots.$

(3).

$$\begin{cases} y^{(4)}+\lambda y=0, 0<x<l, \\ y(0)=y(l)=y''(0)=y''(l)=0. \end{cases}$$

解. 解特征方程：$\mu^4+\lambda=0$。分情况讨论：

如果$\lambda=0$，有四重根0，解为$y=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3$，带入边界条件得$C_0=C_1=C_2=C_3=0$，舍去。

如果$\lambda<0$，有根$\mu_1=|\lambda|^{1/4}$，$\mu_2=-|\lambda|^{1/4}$，$\mu_3=|\lambda|^{1/4}i$，$\mu_4=-|\lambda|^{1/4}i$。微分方程得解为

$$y=C_0exp(|\lambda|^{1/4}x)+C_1exp(-|\lambda|^{1/4}x)+C_2\cos(|\lambda|^{1/4}x)+C_3\sin(|\lambda|^{1/4}x).$$

带入边界条件

$$\begin{cases} C_0+C_1+C_2=0 \\ C_0exp(|\lambda|^{1/4}l)+C_1exp(-|\lambda|^{1/4}l)+C_2\cos(|\lambda|^{1/4}l)+C_3\sin(|\lambda|^{1/4}l)=0 \\ C_0|\lambda|^{1/2}+C_1|\lambda|^{1/2}-C_2|\lambda|^{1/2}=0 \\ C_0|\lambda|^{1/2}exp(|\lambda|^{1/4}l)+C_1|\lambda|^{1/2}exp(-|\lambda|^{1/4}l)-C_2|\lambda|^{1/2}\cos(|\lambda|^{1/4}l)-C_3|\lambda|^{1/2}\sin(|\lambda|^{1/4}l)=0 \end{cases}$$

解之，$C_0=C_1=C_2=0$，$C_2\sin(|\lambda|^{1/4}l)=0$。当

$$|\lambda|^{1/4}l=n\pi, n=1,2,3,\cdots$$

有非零解。固有值$\lambda_n=-(\frac{n\pi}{l})^4$，固有函数$y_n=\sin(\frac{n\pi x}{l}), n\geq 1$.

如果$\lambda>0$，有根$\mu_1=|\lambda|^{1/4}exp(\frac{\pi i}{4})$，$\mu_2=|\lambda|^{1/4}exp(\frac{3\pi i}{4})$，$\mu_3=|\lambda|^{1/4}exp(\frac{5\pi i}{4})$，$\mu_4=|\lambda|^{1/4}exp(\frac{7\pi i}{4})$。微分方程得解为

$$y=C_1e^{|\lambda|^{1/4}exp(\frac{\pi i}{4})x}+C_2e^{|\lambda|^{1/4}exp(\frac{3\pi i}{4})x}+C_3e^{|\lambda|^{1/4}exp(\frac{5\pi i}{4})x}+C_4e^{|\lambda|^{1/4}exp(\frac{7\pi i}{4})x}.$$

带入边界条件

$$\begin{cases} C_1+C_2+C_3+C_4=0 \\ C_1e^{|\lambda|^{1/4}exp(\frac{\pi i}{4})l}+C_2e^{|\lambda|^{1/4}exp(\frac{3\pi i}{4})l}+C_3e^{|\lambda|^{1/4}exp(\frac{5\pi i}{4})l}+C_4e^{|\lambda|^{1/4}exp(\frac{7\pi i}{4})l} \\ C_1-C_2+C_3-C_4=0 \\ C_1e^{|\lambda|^{1/4}exp(\frac{\pi i}{4})l}-C_2e^{|\lambda|^{1/4}exp(\frac{3\pi i}{4})l}+C_3e^{|\lambda|^{1/4}exp(\frac{5\pi i}{4})l}-C_4e^{|\lambda|^{1/4}exp(\frac{7\pi i}{4})l} \end{cases}$$

解得$C_1=C_2=C_3=C_4=0$，舍去。

10. 解下列非齐次固有值问题：

(2)

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, 0<x<l, a=constant>0, \\ u(t,0)=0, u_x(t,l)=-\frac{q}{k} \\ u(0,x)=u_0. \end{cases}$$

并求$\lim_{t\to+\infty}u(t,x)$。

解. 定解问题非齐次，首先齐次化：取$v(t,x)=-\frac{q}{k}x$，设$w=u-v$得到

$$\begin{cases} w_t=a^2w_{xx}, 0<x<l, a=constant>0,\\ w(t,0)=0, w_x(t,l)=0\\ w(0,x)=u_0+\frac{q}{k}x. \end{cases}$$

分离变量，设$w=T(t)X(x)$，得

$$\frac{T'}{T}=\frac{X''}{X}.$$

设上式为$-\lambda$ 得固有值问题

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0\\ X(0)=0, X'(0)=0. \end{cases}$$

解之，固有值为$\lambda_n=(\frac{(2n-1)\pi}{2l})^2$，固有函数为$X_n=\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}), n\geq 1$。解常微分方程

$$T_n'+\lambda_n a^2T_n=0$$

得$T_n=exp(-(\frac{(2n-1)\pi a}{2l})^2t)$。所以

$$w(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n exp(-(\frac{(2n-1)\pi a}{2l})^2t)\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}).$$

将$w(0,x)=u_0+\frac{q}{k}x$ 分解得：

$$u_0+\frac{q}{k}x=\left(\frac{4u_0}{(2n-1)\pi}-\frac{(-1)^n 8ql}{k[(2n-1)\pi]^2}\right)\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}).$$

对照得

$$w(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4u_0}{(2n-1)\pi}-\frac{(-1)^n 8ql}{k[(2n-1)\pi]^2}\right)exp(-(\frac{(2n-1)\pi a}{2l})^2t)\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}).$$

最终

$$u=v+w=-\frac{q}{k}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4u_0}{(2n-1)\pi}-\frac{(-1)^n 8ql}{k[(2n-1)\pi]^2}\right)exp(-(\frac{(2n-1)\pi a}{2l})^2t)\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}).$$

$$\lim_{t\to+\infty}u(t,x)=-\frac{q}{k}x.$$

(5)

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+g, g \text{ 为常数},\\ u(t,0)=0, u_x(t,l)=E\\ u(0,x)=Ex, u_t(0,x)=0. \end{cases}$$

解. 取$\tilde{u}(t,x)=xE$ 及$w=u-\tilde{u}$。得到定解问题

$$\begin{cases} w_{tt}=w_{xx}+g,\\ w(t,0)=0, w_x(t,l)=0\\ w(0,x)=0, w_t(0,x)=0. \end{cases}$$

令$\tilde{w} = \frac{g}{2}x(2l-x)$ 及$v = w - \tilde{w}$ 得:

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx}, \\ v(t,0) = 0, v_x(t,l) = 0 \\ v(0,x) = -\frac{g}{2}x(2l-x), v_t(0,x) = 0. \end{cases}$$

分离变量，我们假设

$$v(t,x) = T(t)X(x).$$

带入泛定方程可得

$$\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}.$$

上式左边为t的函数，右边为x的函数，因而肯定为常值，设为$-\lambda$。从而我们得到以下固有值问题：

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, 0 < x < l \\ X(0) = 0, X'(l) = 0. \end{cases}$$

以及

$$T''(t) + \lambda a^2 T = 0.$$

解得固有值和固有函数为:

$$\text{固有值:}\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^2 \text{对应固有函数:}X_n = \sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}), n \geq 1.$$

固定λ_n，则可以得到对应T_n的常微分方程:

$$T_n'' = -\lambda_n T_n = -\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^2 T_n.$$

解得

$$T_n(t) = A_n \cos(\frac{(2n-1)\pi t}{2l}) + B_n \sin(\frac{(2n-1)\pi t}{2l}), n = 0, 1, 2 \cdots.$$

整理得

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(\frac{(2n-1)\pi t}{2l}) + B_n \sin(\frac{(2n-1)\pi t}{2l})\right) \sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}).$$

最后一步，确定A_n和B_n的取值。对$\varphi(x)$做展开

$$-\frac{g}{2}x(2l-x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}).$$

其中

$$c_n = \frac{\langle -\frac{g}{2}x(2l-x), X_n\rangle}{\langle X_n, X_n\rangle} = -\frac{g}{l}\int_0^l x(2l-x)\sin(\frac{(2n-1)\pi s}{2l})ds = -\frac{16gl^2}{(2n-1)^3\pi^3}.$$

令$t = 0$并对照，我们可以得到:

$$\begin{cases} A_n = -\frac{16gl^2}{(2n-1)^3\pi^3} \\ B_n = 0. \end{cases}$$

所以

$$v(t,x)=-\frac{16gl^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}cos(\frac{(2n-1)\pi t}{2l})\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}).$$

定解问题的解为

$$u=\bar{u}+\bar{w}+v=Ex+\frac{g}{2}x(2l-x)-\frac{16gl^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}cos(\frac{(2n-1)\pi t}{2l})\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}).$$

12. 设ω_n 是$J_0(2\omega)=0$ 的正实根，把函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\leq 1\\ 0.5, & x=1\\ 0, & 1<x<2\end{cases}$$

展开成$J_0(\omega_n x)$ 的级数。

解. ω_n^2 以及$J_0(\omega_n x)$ 为对应如下零阶贝塞尔固有值问题的固有值和固有函数

$$\begin{cases}x^2y''+xy'+\mu x^2y=0, 0<x<2\\ |y(0)|<\infty, y(2)=0.\end{cases}$$

边界条件为I 类边界条件，所以$\mathcal{N}_{0,n}^2=2J_1^2(2\omega_n)$。

首先求

$$\langle f(x),J_0(\omega_n x)\rangle=\int_0^1 J_0(\omega_n x)xdx=\frac{1}{\omega_n^2}\int_0^{\omega_n}J_0(x)xdx=\frac{1}{\omega_n^2}\int_0^{\omega_n}(xJ_1(x))'dx=\frac{J_1(\omega_n)}{\omega_n}.$$

从而

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\langle f(x),J_0(\omega_n x)\rangle}{\mathcal{N}_{0,n}^2}J_0(\omega_n x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\omega_n)}{2\omega_n J_1^2(2\omega_n)}J_0(\omega_n x).$$

13. 设ω_n 是$J_1(\omega)=0$ 的正实根，把函数$f(x)=x, 0<x<1$ 展开成$J_1(\omega_n x)$ 的级数。

解. ω_n^2 以及$J_1(\omega_n x)$ 为对应如下1阶贝塞尔固有值问题的固有值和固有函数

$$\begin{cases}x^2y''+xy'+(\mu x^2-1)y=0, 0<x<1\\ |y(0)|<\infty, y(1)=0.\end{cases}$$

边界条件为I 类边界条件，所以$\mathcal{N}_{1,n}^2=\frac{J_2^2(\omega_n)}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{2J_1(\omega_n)}{x}-J_0(\omega_n)\right)^2=\frac{J_0^2(\omega_n)}{2}$。

首先求

$$\langle x,J_1(\omega_n x)\rangle=\int_0^1 J_1(\omega_n x)x^2dx=\frac{1}{\omega_n^3}\int_0^{\omega_n}J_1(x)x^2dx=\frac{1}{\omega_n^3}\int_0^{\omega_n}(x^2J_2(x))'dx=\frac{J_2(\omega_n)}{\omega_n}=-\frac{J_0(\omega_n)}{\omega_n}.$$

从而

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\langle x,J_1(\omega_n x)\rangle}{\mathcal{N}_{1,n}^2}J_1(\omega_n x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\omega_n J_0(\omega_n)}J_1(\omega_n x).$$

16. 半径为R 的无限长圆柱的侧表面保持一定的温度u_0，柱子内的初始温度为0，内部无热源，求柱子内的温度分布变化？

解. 由对称性，容易知道温度分布与角度无关，与z 无关，不妨设温度$u = u(t, r)$。因而可以写出定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2\left(\frac{\partial u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right), 0 < r < R, t > 0. \\ u|_{r=R} = u_0, u(0, r) = 0. \end{cases}$$

首先边界条件齐次化，设$v = u - u_0$，得到

$$\begin{cases} v_t = a^2\left(\frac{\partial v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right), 0 < r < R, t > 0. \\ v|_{r=R} = 0, v(0, r) = -u_0. \end{cases}$$

分离变量，$v(r, z) = \mathcal{R}(r)T(t)$，有

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{r\mathcal{R}'' + \mathcal{R}'}{r\mathcal{R}}.$$

设上式为常值$-\mu$，得到固有值问题

$$\begin{cases} r^2\mathcal{R}'' + r\mathcal{R}' + \mu r^2\mathcal{R} = 0, 0 < r < R \\ |\mathcal{R}(0)| < \infty, \mathcal{R}(R) = 0. \end{cases}$$

这是零阶的贝塞尔固有值问题，因为有一个边界条件是I 类边界条件。因而零不是固有值，设

$$J_0(\omega R)$$

的所有正解为$0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots$。则对应固有值$\omega_n^2$，固有函数$J_0(\omega_n r)$，将固有值带入$T_n$ 的方程，得到：

$$T_n' + a^2\omega_n^2 T_n = 0.$$

$T_n = A_n e^{-a^2\omega_n^2 t}$。从而

$$v(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2\omega_n^2 t} J_0(\omega_n r).$$

求系数，令$t = 0$，得到

$$-u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\omega_n r).$$

边界为I类边界条件，所以

$$\mathcal{N}_{0,n}^2 = \frac{R^2 J_1^2(\omega_n R)}{2},$$

并且

$$\langle -u_0, J_0(\omega_n r)\rangle = -u_0\int_0^R J_0(\omega_n r) r dr = -\frac{u_0}{\omega_n^2}\int_0^{\omega_n R} J_0(r) r dr = -\frac{u_0}{\omega_n^2}\int_0^{\omega_n R} (rJ_1(r))' dr = -\frac{u_0 R J_1(\omega_n R)}{\omega_n}.$$

所以

$$-u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2u_0}{\omega_n R J_1(\omega_n R)} J_0(\omega_n r).$$

对照得：

$$v(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2u_0}{\omega_n RJ_1(\omega_n R)}e^{-a^2\omega_n^2 t}J_0(\omega_n r).$$

所以

$$u(t,r)=v(t,r)+u_0=u_0-2u_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n RJ_1(\omega_n R)}e^{-a^2\omega_n^2 t}J_0(\omega_n r).$$

其中ω_n 为$J_0(\omega R)=0$ 的所有正根。

18(1). 解下列定解问题：

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{u_r}{r}+u_{zz}=0, & 0<r<a,0<z<l\\ u(a,z)=0, & \\ u(r,0)=0,u(r,l)=T_0(\text{常数}). & \end{cases}$$

解. 分离变量，$u(r,z)=R(r)Z(z)$，有

$$-\frac{Z''}{Z}=\frac{rR''+R'}{rR}.$$

设上式为常值$-\mu$，得到固有值问题

$$\begin{cases} r^2R''+rR'+\mu r^2R=0,0\le r\le a\\ |R(0)|<\infty,R(a)=0.\end{cases}$$

这是零阶的贝塞尔固有值问题，因为有一个边界条件是I 类边界条件。因而零不是固有值，设

$$J_0(\omega a)$$

的所有正解为$0<\omega_1<\omega_2<\cdots$。则对应固有值$\omega_n^2$，固有函数$J_0(\omega_n r)$，将固有值带入$Z_n$ 的方程，得到：

$$Z_n''-\omega_n^2Z_n=0.$$

$Z_n=A_ne^{\omega_n z}+B_ne^{-\omega_n z}$。从而

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_ne^{\omega_n z}+B_ne^{-\omega_n z})J_0(\omega_n r).$$

求系数，

$$\mathcal{N}_{0,n}^2=\frac{a^2J_1^2(\omega_n a)}{2},$$

并且

$$\langle T_0,J_0(\omega_n r)\rangle=\frac{T_0aJ_1(\omega_n a)}{\omega_n}.$$

$$u(r,l)=T_0=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2T_0}{a\omega_n J_1(\omega_n a)}J_0(\omega_i x).$$

对照得

$$\begin{cases} A_n+B_n=0\\ A_ne^{\omega_n l}+B_ne^{-\omega_n l}=\frac{2T_0}{a\omega_n J_1(\omega_n a)}\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A_n = \frac{2T_0}{(e^{\omega_n l}-e^{-\omega_n l})a\omega_n J_1(\omega_n a)} \\ B_n = -\frac{2T_0}{(e^{\omega_n l}-e^{-\omega_n l})a\omega_n J_1(\omega_n a)}. \end{cases}$$

从而

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T_0}{sh(\omega_n l)a\omega_n J_1(\omega_n a)} sh(\omega_n z)J_0(\omega_n r).$$

26 在半径为1的球内求调和函数($\Delta u = 0$)，使得

$$u|_{r=1} = 3\cos(2\theta) + 1.$$

解. 仅需求解泊松方程的定解问题：

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0 \\ u|_{r=1} = 3\cos(2\theta) + 1. \end{cases}$$

注意到在边界上满足轴对称，因而u 本身也是轴对称。在球坐标系下用勒让德多项式，解可以表示为（P277，第一行）

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) p_n(\cos\theta).$$

既然在球心处有定义，所以$B_n = 0$. 令$r = 1$ 得到

$$3\cos(2\theta) + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n p_n(\cos\theta) = 6\cos^2\theta - 2.$$

是$\cos\theta$ 的偶函数，因而有待定系数

$$6\cos^2\theta - 2 = ap_2(\cos\theta) + bp_0(\cos\theta).$$

查表并解得$a = 4, b = 0$。所以

$$u = 4r^2 p_2(\cos\theta) = 2r^2(3\cos^2\theta - 1).$$

24 把下列函数按勒让德多项式展开：

(1) x^3

(2) x^4

(3) $|x|$

解. (1)和(2)用待定系数法，得：

$$x^3 = \frac{2}{5}p_3(x) + \frac{3}{5}p_1(x).$$

$$x^4 = \frac{8}{35}p_4(x) + \frac{4}{7}p_2(x) + \frac{1}{5}p_0(x).$$

(3)则要求系数，由于是偶函数，故不需要考虑奇数项。

$$\langle |x|, p_{2k}(x)\rangle = 2\int_0^1 x p_{2k}(x)dx.$$

当$k=0$ 的时候，上式等于1。当$k\neq 0$ 的时候，上式等于

$$2\int_0^1 x p_{2k}(x)dx = \frac{2}{2k+2}\int_0^1 p_{2k-1}(x)dx = \frac{p_{2k-2}(0)-p_{2k}(0)}{(k+1)(4k-1)}.$$

整理得

$$\langle |x|, p_{2k}(x)\rangle = \frac{2(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^{2k}(k-1)!(k+1)!}.$$

所以

$$|x| = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle |x|, p_{2k}(x)\rangle}{\|p_{2k}\|^2}p_{2k}(x) = \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(4k+1)(2k-2)!}{2^{2k}(k-1)!(k+1)!}p_{2k}(x).$$

28 半球的球面保持温度u_0，分别在下列条件下求稳定温度分布：

(1) 底面保持零度；

(2) 底面绝热。

解. (1) 把半球补成一个完整得球面，恒温=0，奇扩充，下半球面温度为$-u_0$，所以

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n r^n + B_n r^{-n-1})p_n(\cos\theta).$$

在球心处有定义，所以$B_n=0$。所以

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}A_n r^n p_n(\cos\theta).$$

取r 等于半球得半径a，则有

$$f(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}A_n a^n p_n(\cos\theta),$$

其中$f(\cos\theta)=u_0, \cos\theta\in[0,1], f(\cos\theta)=-u_0, \theta\in[-1,0]$. 将$f(\cos\theta)$ 做分解，因为是奇函数，不需要考虑奇数项

$$\langle f(\cos\theta), p_{2k+1}(x)\rangle = 2u_0\int_0^1 p_{2k+1}(x)dx = 2u_0\frac{p_{2k}(0)-p_{2k+2}(0)}{4k+3} = \frac{2u_0(-1)^k(2k-1)!!}{(2k+2)!!}.$$

上式仅对$k>0$ 成立，当$k=0$ 时，$\langle f(\cos\theta), p_1(x)\rangle = u_0$. 所以

$$f(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle f(\cos\theta), p_{2k+1}(x)\rangle}{\|p_{2k+1}\|^2}p_{2k+1}(x) = \frac{3u_0}{2}+u_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+3)(2k-1)!!}{(2k+2)!!}p_{2k+1}(x).$$

对照得，

$$A_{2k}=0, A_{2k+1} = \frac{(-1)^k(2k+3)(2k-1)!!}{(2k+2)!!}\frac{1}{a^{2k+1}}, A_1 = \frac{3u_0}{2}\times\frac{1}{a}.$$

所以

$$u(r,\theta)=\frac{3u_0}{2}\times\frac{r}{a}\cos\theta+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+3)(2k-1)!!}{(2k+2)!!}\left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1}p_{2k+1}(\cos\theta).$$

(2).显然$u=u_0$.

29 半径为R 厚度为$R/2$ 的空心半球，内外球面的温度保持为

$$A\sin^2(\frac{\theta}{2}),\theta\in[0,\frac{\pi}{2}],$$

底面温度为$A/2$，求半空心球温度分布？

解. 我们自然得想法是把半球壳变成一个完整得球壳。底面恒温，因而要用奇扩充，但是温度不是零，所以要先找个特解$A/2$，然后令$v=u-A/2$. 此时内外球壳温度分别为

$$f(\cos\theta)=-A/2\times\cos\theta.$$

按勒让德分解得（待定系数）

$$f(\cos\theta)=-A/2p_1(\cos\theta).$$

又

$$v(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_nr^n+B_nr^{-n-1})p_n(\cos\theta).$$

分别令$r=R,R/2$ 并对照得：

$$A_n=B_n=0,n\neq1;$$

$$A_1R+B_1R^{-2}=-A/2,A_1R/2+B_1(R/2)^{-2}=-A/2.$$

解得

$$A_1=-\frac{3A}{7R},B_1=-\frac{AR^2}{14}.$$

所以

$$v(r,\theta)=-(\frac{3}{7R}+\frac{R^2}{14r^2})A\cos\theta.$$

所以

$$u(r,\theta)=\frac{A}{2}-(\frac{3}{7R}+\frac{R^2}{14r^2})A\cos\theta.$$

3 第四章

1.用傅里叶变换解下列问题：

(1)

$$\begin{cases}\Delta_2u=0,-\infty<x<\infty,y>0\\ u(x,0)=f(x),\\ \lim_{x^2+y^2\to\infty}u(x,y)=0.\end{cases}$$

解. 做傅里叶变换，设

$$U(\lambda, y) = \int_{\mathbb{R}} u(x,y)e^{i\lambda x}dx.$$

则

$$\begin{cases} -\lambda^2 U + U_{yy} = 0, -\infty < \lambda < \infty, y > 0 \\ U(\lambda, 0) = F[f]. \end{cases}$$

这是常微分方程，解得

$$U(\lambda, y) = C_1(\lambda)e^{-\lambda y} + C_2(\lambda)e^{\lambda y}.$$

又因为当$y \to +\infty$时候，为0，所以当$\lambda > 0$的时候，$C_2(\lambda) = 0$；当$\lambda < 0$的时候，$C_1(\lambda) = 0$。即

$$U(\lambda, y) = \begin{cases} C_1(\lambda)e^{-\lambda y}, \lambda > 0, y > 0 \\ C_2(\lambda)e^{\lambda y}, \lambda < 0, y > 0. \end{cases}$$

取$y = 0$，得到

$$C_1(\lambda) = \begin{cases} F[f], \lambda > 0, y > 0 \\ 0, \lambda < 0, y > 0. \end{cases}$$

以及

$$C_2(\lambda) = \begin{cases} 0, \lambda > 0, y > 0 \\ F[f], \lambda < 0, y > 0. \end{cases}$$

所以

$$U(\lambda, y) = \begin{cases} F[f]e^{-\lambda y}, \lambda > 0, y > 0 \\ F[f]e^{\lambda y}, \lambda < 0, y > 0. \end{cases}$$

用傅里叶反变换

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\infty} F[f]e^{-\lambda y}e^{-i\lambda x} + \int_{-\infty}^{0} F[f]e^{\lambda y}e^{-i\lambda x}d\lambda\right).$$

如果令$h(\lambda) = 1, \lambda > 0, h(\lambda) = 0, \lambda < 0$，则上式为

$$F^{-1}[F[f] \times e^{-\lambda y}h(\lambda)] + F^{-1}[F[f] \times e^{\lambda y}(1 - h(\lambda))].$$

计算

$$F^{-1}[e^{-\lambda y}h(\lambda)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y}h(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\lambda y}e^{-i\lambda x}d\lambda = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-\lambda y - i\lambda x}}{-y - ix}|_0^{\infty} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{y + ix}.$$

计算

$$F^{-1}[e^{\lambda y}(1 - h(\lambda))] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda y}e^{-i\lambda x}d\lambda = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{\lambda y - i\lambda x}}{y - ix}|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{y - ix}.$$

所以

$$F^{-1}[F[f]\times e^{-\lambda y}h(\lambda)] + F^{-1}[F[f]\times e^{\lambda y}(1-h(\lambda))] = \frac{1}{2\pi}\left(f * \frac{1}{y + ix} + f * \frac{1}{y - ix}\right) = \frac{y}{\pi}\times f * \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

即

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2}d\xi.$$

(2)

$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx} + f(t,x), -\infty < x < \infty. t > 0 \\ u(0,x) = 0. \end{cases}$$

解. 先用冲量原理，只要求

$$\begin{cases} v_t = a^2v_{xx}, -\infty < x < \infty, t > \tau \\ v(\tau,x) = f(\tau,x) \end{cases}$$

做F-变换，$V = F[v]$。得到

$$\begin{cases} V_t = -a^2\lambda^2V \\ V(\tau,\lambda) = F[f]. \end{cases}$$

解得

$$V = C(\lambda)e^{-a^2\lambda^2t}.$$

带入$t = \tau$，得

$$V(t,\lambda;\tau) = F[f]e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}.$$

反变换，

$$v(t,x;\tau) = f * \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau,\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi.$$

由冲量原理，

$$u = \int_0^t v(t,x;\tau)d\tau = \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau,\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau.$$

(3)

$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx}, 0 < x < \infty, t > 0 \\ u(t,0) = \varphi(t), u(0,x) = 0, \\ u(t,+\infty) = u_x(t,+\infty) = 0 \end{cases}$$

解. 做正弦变换，设

$$U(t,\lambda) = \int_{\mathbb{R}} u(t,x)\sin(\lambda x)dx.$$

则

$$\begin{cases} U_t = -\lambda^2a^2U + a^2\lambda u(t,0) = -\lambda^2a^2U + a^2\lambda\varphi(t), -\infty < \lambda < \infty, t > 0 \\ U(0,\lambda) = 0. \end{cases}$$

从而

$$(e^{\lambda^2a^2t}U)_t = a^2\lambda\varphi(t)e^{\lambda^2a^2t}.$$

所以由牛顿莱布尼兹公式

$$e^{\lambda^2a^2t}U(t,\lambda) = e^{\lambda^2a^2\times 0}U(0,\lambda) + \int_0^t a^2\lambda\varphi(\tau)e^{\lambda^2a^2\tau}d\tau = \int_0^t a^2\lambda\varphi(\tau)e^{\lambda^2a^2\tau}d\tau.$$

所以

$$U(t,\lambda)=e^{-\lambda^2a^2t}\int_0^t a^2\lambda\varphi(\tau)e^{\lambda^2a^2\tau}d\tau=\int_0^t a^2\lambda\varphi(t-\tau)e^{-\lambda^2a^2\tau}d\tau.$$

做反正弦变换得到：

$$u(t,x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^t a^2\lambda\varphi(t-\tau)e^{-\lambda^2a^2\tau}d\tau\sin(\lambda x)d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_0^t a^2\varphi(t-\tau)d\tau\int_{-\infty}^\infty\lambda e^{-\lambda^2a^2\tau}\sin(\lambda x)d\lambda.$$

计算

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty\lambda e^{-\lambda^2a^2\tau}\sin(\lambda x)d\lambda&=\frac{1}{i}\int_{-\infty}^\infty\lambda e^{-\lambda^2a^2\tau}e^{i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{i}\int_{-\infty}^\infty\lambda e^{-(a\sqrt{\tau}\lambda-\frac{ix}{2a\sqrt{\tau}})^2-\frac{x^2}{4a^2\tau}}d\lambda\\&=\frac{1}{ia^2\tau}\int_{-\infty}^\infty\lambda e^{-(\lambda-\frac{ix}{2a\sqrt{\tau}})^2-\frac{x^2}{4a^2\tau}}d\lambda\\&=\frac{1}{ia^2\tau}\left(\int_{-\infty}^\infty(\lambda-\frac{ix}{2a\sqrt{\tau}})e^{-(\lambda-\frac{ix}{2a\sqrt{\tau}})^2-\frac{x^2}{4a^2\tau}}d\lambda+\int_{-\infty}^\infty\frac{ix}{2a\sqrt{\tau}}e^{-(\lambda-\frac{ix}{2a\sqrt{\tau}})^2-\frac{x^2}{4a^2\tau}}d\lambda\right)\\&=\frac{1}{ia^2\tau}\frac{ix}{2a\sqrt{\tau}}e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda^2}d\lambda\\&=\frac{xe^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}}{2a^3\tau^{3/2}}\times\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

所以

$$u(t,x)=\frac{1}{\pi}\int_0^t a^2\varphi(t-\tau)\frac{xe^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}}{2a^3\tau^{3/2}}\times\sqrt{\pi}d\tau=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\varphi(t-\tau)\frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}}{\tau^{3/2}}d\tau.$$

4 第五章

3 解下列定解问题：

(1)

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx},(0<x<l,t>0)\\u(t,0)=u(t,l)=0,\\u(0,x)=\delta(x-\xi),0<\xi<l.\end{cases}$$

解. 用分离变量法，定解问题是齐次的，因而不需要齐次化，设$u=T(t)X(x)$。则有

$$T'X=a^2TX''.$$

所以

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{X''}{X}.$$

左端为t 的函数又端为x 的函数，所以为常数，记为$-\lambda$。得到固有值问题

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0,(0<x<l,t>0)\\X(0)=X(l)=0.\end{cases}$$

以及

$$T'+\lambda a^2T=0.$$

边界条件均为I类边界条件，由sl理论，零不是固有值，且所有固有值都大于零。解之固有值及对应固有函数为：

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2, X_n = \sin(\frac{n\pi x}{l}), n = 1, 2, 3, \cdots.$$

将固有值代入T 的常微分方程，得到

$$T_n = A_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}.$$

所以

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} \sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

令$t = 0$，得到

$$\delta(x - \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

由傅里叶分解

$$A_n = \frac{\int_0^l sin(\frac{n\pi x}{l})\delta(x - \xi)dx}{\int_0^l sin^2(\frac{n\pi x}{l})dx} = \frac{2}{l} sin(\frac{n\pi\xi}{l}).$$

所以

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} sin(\frac{n\pi\xi}{l}) e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} \sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

(2)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, (0 < x < l, t > 0) \\ u_x(t, 0) = u_x(t, l) = 0, \\ u(0, x) = 0, u_t(0, x) = \delta(x - \xi), 0 < \xi < l. \end{cases}$$

解. 用分离变量法，定解问题是齐次的，因而不需要齐次化，设$u = T(t)X(x)$。则有

$$T''X = a^2 T X''.$$

所以

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}.$$

左端为t 的函数又端为x 的函数，所以为常数，记为$-\lambda$。得到固有值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, (0 < x < l, t > 0) \\ X'(0) = X'(l) = 0. \end{cases}$$

以及

$$T'' + \lambda a^2 T = 0.$$

边界条件均为II类边界条件$q = 0$，由sl理论，零是固有值，所以$\lambda_0 = 0, X_0 = 1$。其余所有固有值都大于零。解之其他固有值及对应固有函数为：

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2, X_n = \cos(\frac{n\pi x}{l}), n = 1, 2, 3, \cdots.$$

将固有值代入T的常微分方程，得到

$$T_0 = A_0 + B_0 t, T_n = A_n \cos(\frac{n\pi a t}{l}) + B_n \sin(\frac{n\pi a t}{l}).$$

所以

$$u(t,x) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(\frac{n\pi a t}{l}) + B_n \sin(\frac{n\pi a t}{l}) \right) \cos(\frac{n\pi x}{l}).$$

令$t=0$，得到$A_0 = A_n = 0$，以及

$$\delta(x-\xi) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{l} \cos(\frac{n\pi x}{l}).$$

由傅里叶分解

$$B_0 = \frac{\int_0^l 1\delta(x-\xi)dx}{\int_0^l 1^2 dx} = \frac{1}{l},$$

和当$n \geq 1$ 时

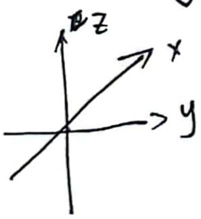
$$B_n \frac{n\pi a}{l} = \frac{\int_0^l cos(\frac{n\pi x}{l})\delta(x-\xi)dx}{\int_0^l \cos^2(\frac{n\pi x}{l})dx} = \frac{2}{l}\cos(\frac{n\pi\xi}{l}).$$

所以当$n \geq 1$ 时，

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\cos(\frac{n\pi\xi}{l}).$$

$$u(t,x) = \frac{t}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi a}\cos(\frac{n\pi\xi}{l})\sin(\frac{n\pi a t}{l})\cos(\frac{n\pi x}{l}).$$

6. 求下列区域内第一边值问题的格林函数：



(1) 四分之一空间：$x > 0, y > 0$;

解. 设$M_0 = (\xi, \eta, \zeta)$ 处有正电荷大小为ε_0 只要再对应点摆上电荷，让在边界上电势为零即可：在$M_1 = (-\xi, \eta, \zeta)$ 和$M_2 = (\xi, -\eta, \zeta)$ 处各摆上$-\varepsilon_0$ 得电荷，在$M_3 = (-\xi, -\eta, \zeta)$ 处摆上大小为ε_0 得电荷，这样由对称性，就知道边界上电势为0，所以格林函数

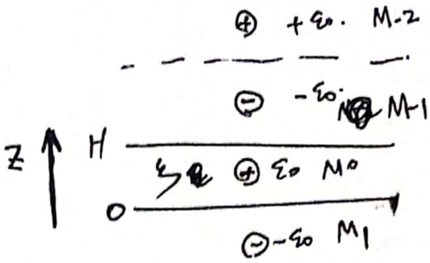
$$G(M; M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r(M, M_0)} - \frac{1}{r(M, M_1)} - \frac{1}{r(M, M_2)} + \frac{1}{r(M, M_3)} \right);$$

(2) 上半球$x^2 + y^2 + z^2 < a^2, z > 0$;

解. 设$M_0 = (\xi, \eta, \zeta)$ 处有正电荷大小为ε_0 只要再对应点摆上电荷，让在边界上电势为零即可：在$M_1 = (\xi, \eta, -\zeta)$ 处摆上大小为$-\varepsilon_0$ 电荷，在$M_2 = \frac{a^2}{|OM_0|^2}(\xi, \eta, \zeta)$ 处摆上$-\frac{a}{|0M_0|}\varepsilon_0$ 得电荷，在$M_3 = \frac{a^2}{|OM_0|^2}(\xi, \eta, -\zeta)$ 处摆上大小为$\frac{a}{|0M_0|}\varepsilon_0$得电荷，这样由对称性，就知道边界上电势为0，所以格林函数

$$G(M; M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r(M, M_0)} - \frac{1}{r(M, M_1)} - \frac{a}{|0M_0|}\frac{1}{r(M, M_2)} + \frac{a}{|0M_0|}\frac{1}{r(M, M_3)} \right);$$

(3) 层状空间：$0 < z < H$.



解. 设$M_0=(\xi,\eta,\zeta),0<\zeta<H$ 处有正电荷大小为ε_0 只要再对应点摆上电荷，让在边界上电势为零即可：在$M_1=(\xi,\eta,-\zeta)$ 处摆上大小为$-\varepsilon_0$ 电荷，在$M_{2k}=(\xi,\eta,\zeta+2kH)$ 处摆上ε_0电荷，在$M_{2k+1}=(\xi,\eta,-\zeta+2kH)$ 处摆上$-\varepsilon_0$电荷，这样由对称性，就知道边界上电势为0，所以格林函数

$$G(M;M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{r(M,M_{2k})}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{r(M,M_{2k+1})}\right);$$

7. 求下列平面区域内第一边值问题的格林函数：

(1) 四分之一平面：$x>0,y>0$；

解. 设$M_0=(\xi,\eta)$ 处有正电荷大小为ε_0 只要再对应点摆上电荷，让在边界上电势为零即可：在$M_1=(-\xi,\eta)$ 和$M_2=(\xi,-\eta)$ 处各摆上$-\varepsilon_0$ 得电荷，在$M_3=(-\xi,-\eta)$ 处摆上大小为ε_0 得电荷，这样由对称性，就知道边界上电势为0，所以格林函数

$$G(M;M_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r(M,M_0)}-\ln\frac{1}{r(M,M_1)}-\ln\frac{1}{r(M,M_2)}+\ln\frac{1}{r(M,M_3)}\right);$$

(2) 上半圆盘$x^2+y^2<1,y>0$；

解. 设$M_0=(\xi,\eta)$ 处有正电荷大小为ε_0，在$M_1=(\xi,-\eta,)$ 处摆上大小为$-\varepsilon_0$ 电荷，在$M_2=\frac{1}{|OM_0|^2}(\xi,\eta)$ 处摆上$-\varepsilon_0$ 得电荷，在$M_3=\frac{1}{|OM_0|^2}(\xi,-\eta)$ 处摆上大小为ε_0得电荷，这样圆周上和底边上电势为0. 所以

$$G(M;M_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r(M,M_0)}-\ln\frac{1}{r(M,M_1)}-\ln\frac{1}{r(M,M_2)}+\ln\frac{1}{r(M,M_3)}\right);$$

(3)

例子1. 设平面区域$\Omega=\{(x,y):x+y>0\}$，

求区域Ω 的格林函数；

(2) 求区域Ω 的定解问题：

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0,x+y>0\\ u|_{x+y=0}=\varphi(x).\end{cases}$$

解. *(1)*. 设$M_0=(\xi,\eta)$为Ω 内点，则M_0 关于$x+y=0$ 的对称点为$M_0'=(-\eta,-\xi)$ 所以格林函数为

$$G(M;M_0)=-\frac{1}{2\pi}\left(\ln r(M,M_0)-\ln r(M,M_0')\right)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x+\eta)^2+(y+\xi)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

(2).单位外法向为$\vec{n}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$，所以

$$\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}|_{\xi+\eta=0}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(G_\xi+G_\eta)|_{\xi+\eta=0}=-\frac{x+y}{\pi\sqrt{2}}\frac{1}{(x-\xi)^2+(y+\xi)^2}.$$

所以

$$u(x,y)=\frac{x+y}{\sqrt{2}\pi}\int\frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+(y+\xi)^2}dl=\frac{x+y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+(y+\xi)^2}d\xi.$$

定理. 泊松方程边值问题：

$$\begin{cases} \Delta u = -f(x,y,z), M \in V \\ u|_{\partial V} = \varphi(x,y,z). \end{cases}$$

的解为

$$u(M) = -\int_S \varphi(M_0)\frac{\partial_{M_0}G}{\partial \vec{n}}dS + \int_V G(M;M_0)f(M_0)dM_0.$$

其中$G = G(M;M_0)$。

定理. 泊松方程边值问题：

$$\begin{cases} \Delta u = -f(x,y), M \in V \\ u|_{\partial V} = \varphi(x,y). \end{cases}$$

的解为

$$u(M) = -\int_{\partial V} \varphi(M_0)\frac{\partial_{M_0}G}{\partial \vec{n}}dl + \int_V G(M;M_0)f(M_0)dM_0.$$

其中$G = G(M;M_0)$。

8. 求方程$u_t = a^2u_{xx} + bu$ 的柯西问题的基本解.

解. 即求解定解问题：

$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx} + bu, (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u(0,x) = \delta(x). \end{cases}$$

做傅里叶变换

$$U(t,\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)e^{i\lambda x}dx.$$

则有

$$\begin{cases} U_t = -\lambda^2a^2U + bU, (-\infty < \lambda < +\infty, t > 0) \\ U(0,\lambda) = 1. \end{cases}$$

这是一个t 常微分方程，虽然和λ 有关，解之

$$U(t,\lambda) = C(\lambda)e^{-(\lambda^2a^2-b)t}.$$

令$t = 0$，得

$$C(\lambda) = 1.$$

所以

$$U(t,\lambda) = e^{-(\lambda^2a^2-b)t}.$$

用傅里叶反变换

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda^2a^2-b)t}e^{-i\lambda x}d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda a\sqrt{t}+\frac{ix}{2a\sqrt{t}})^2+bt-\frac{x^2}{4a^2t}}d\lambda \\
&= \frac{e^{bt-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2\pi}\times\frac{1}{a\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda a\sqrt{t}+\frac{ix}{2a\sqrt{t}})^2}da\sqrt{t}\lambda \\
&= \frac{e^{bt-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2\pi}\times\frac{1}{a\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2}d\lambda \\
&= \frac{e^{bt-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}
\end{aligned}
$$

计算这种积分就是无脑配平方。

9. 用基本解法求解下列柯西问题：

(1)

$$
\begin{cases}
u_t + au_x = f(t,x), (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\
u(0,x) = \varphi(x).
\end{cases}
$$

解. 基本解即求定解问题

$$
\begin{cases}
v_t + av_x = 0, (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\
v(0,x) = \delta(x).
\end{cases}
$$

做傅里叶变换

$$V(t,\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t,x)e^{i\lambda x}dx.$$

则有

$$
\begin{cases}
V_t - \lambda iaV = 0, (-\infty < \lambda < +\infty, t > 0) \\
V(0,\lambda) = 1.
\end{cases}
$$

这是一个t 常微分方程，虽然和λ 有关，解之

$$V(t,\lambda) = C(\lambda)e^{i\lambda at}.$$

令$t=0$，得到$C(\lambda)=1$，所以

$$V(t,\lambda) = e^{i\lambda at}.$$

做傅里叶反变换，基本解

$$U(t,x) = v(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda at}e^{-i\lambda x}d\lambda = \delta(x-at).$$

代入书上的公式

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= U * \varphi + \int_0^t U(t-\tau,x) * f(\tau,x)\,d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - at)\varphi(x-\xi)\,d\xi + \int_0^t U(t-\tau,x) * f(\tau,x)\,d\tau \\
&= \varphi(x - at) + \int_0^t f(\tau, x - a(t-\tau))\,d\tau.
\end{aligned}
$$