《数学分析讲义 (第二册)》部分习题解答[1]

余启帆

中国科学技术大学

2021 年 3 月 18 日

[1]闻道有先后, 解答有疏漏. 恳请读者来信批评指正: qifan@mail.ustc.edu.cn

目录

第 8 章　空间解析几何

8.1　向量与坐标系

8.1.1　证明性质 2: 向量数乘的分配律和结合律.

说明　(本题略.)

8.1.2　证明性质 4: 向量叉乘的结合律, 反称性和分配律.

说明　(本题略.)

8.1.3　判断下列结论是否成立, 并举例说明:

(1) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

(2) 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, 则必有 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$.

(3) 两单位向量的数量积必等于 1, 向量积必等于一单位向量.

(4) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$.

(5) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2$.

(6) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}$.

解　(2) 不成立. 取共面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足: $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\theta_1=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|\sin\theta_2$ 且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ 同向, 其中 $\theta_1=\theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),\theta_2=\theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}),0<\theta_1<\theta_2\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. 从而 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, 但显然 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c}$. 例如, 在三维空间中, 取 $\boldsymbol{a}=(1,0,0),\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},1,0),\boldsymbol{c}=(0,1,0)$.

(6) 显然是错误的. 任取两个不共线 (则均不为 $\boldsymbol{0}$) 的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$, 则

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0},$$

故原式不成立. □

8.1.4　证明: $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

证明 (1)　由向量运算的行列式表示, 得:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix},\quad \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\\a_1&a_2&a_3\end{vmatrix},\quad \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}c_1&c_2&c_3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix},$$

其中

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

由行列式的性质知, 上述 3 个行列式的值相等, 故

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}.$$

□

证明 (2) 考虑混合向量积的几何意义.

注意到, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$ 表示向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 所张成的平行六面体的体积, 其体积不变, 故

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}.$$

□

8.1.5 设 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, 证明: 对任意一点 O,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

说明 (本题略.)

8.1.6 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是满足 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ 的单位向量, 试求 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a}$ 的值.

解 将 $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ 代入得:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot (-\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) + (-\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} \\ &= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}^2 - \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \\ &= -2 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}, \end{aligned}$$

又 $\boldsymbol{c}$ 是单位向量 $\implies (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = 1 \implies \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^2 = 2 + 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1 \implies \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -\frac{1}{2}$ 代入上式得:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = -\frac{3}{2}.$$

□

说明 事实上, 不难发现, 向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 必围成一个首尾相接的边长为 1 的正三角形.

8.1.7 若向量 $\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$ 垂直于向量 $7\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b}$, 向量 $\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b}$ 垂直于向量 $7\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$, 求两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角.

解 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 夹角为 $\theta(\in [0, \pi])$.

(I) 若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 中存在 $\boldsymbol{0}$ 向量, 则 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, 夹角为任意值.

(II) 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均不为 $\mathbf{0}$, 由题意得:

$$\begin{cases}(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0,\\(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}7\boldsymbol{a}^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15\boldsymbol{b}^2=0,\\7\boldsymbol{a}^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8\boldsymbol{b}^2=0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{15}{16}\boldsymbol{b}^2-\frac{7}{16}\boldsymbol{a}^2=\frac{7}{30}\boldsymbol{a}^2+\frac{8}{30}\boldsymbol{b}^2\ \Longrightarrow\begin{cases}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|,\\\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|^2\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ \cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|^2}{|\boldsymbol{a}|^2}=\frac{1}{2}\ \Longrightarrow\ \theta=\frac{\pi}{3}.$$

□

8.1.8 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直, 且 $|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=4$, 试计算:

(1) $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$;

(2) $|(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})|$.

解 (1) 由向量叉乘的分配律得:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$$
$$\Longrightarrow\ |(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=2|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|=24.$$

(2) 同理可得:

$$(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=-5\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$
$$\Longrightarrow\ |(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})|=5|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=5|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=60.$$

□

8.1.9 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$, 又 $|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=2$, 试计算:

(1) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2$; (2) $|(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\times(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|^2$.

8.1.10 已知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$, 试证: $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

证明 由 $\boldsymbol{c}=\mathbf{0}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 得:

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},$$
$$\Longrightarrow\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}.$$

□

8.1.11 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共线, 且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$, 求证: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$.

证明 用反证法. 假设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{t}\neq\boldsymbol{0}$. 由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共线, 不妨设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线. 将 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{t}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 代入得:

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{t}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a},\\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{t}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},\end{cases}$$

这说明向量 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{t}$ 共线, $\boldsymbol{t},\boldsymbol{a}$ 共线, 从而 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线, 这与题设矛盾! 故 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. □

8.1.12 求证: $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$.

证明 (1) 记 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\theta(\in[0,\pi])$. 由 $\begin{cases}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\theta,\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta\end{cases}$ 得:

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2(1-\cos^2\theta)=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2.$$

□

提示 (2) 运用**习题** 8.1.4中**向量的混合积**的性质及**二重向量积**的性质.

证明 (2) 由 $\begin{cases}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}\end{cases}$ 得:

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))\cdot\boldsymbol{a}\\&=((\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2.\end{aligned}$$

□

8.1.13 计算以向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{p}-3\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r},\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}-3\boldsymbol{r},\boldsymbol{c}=\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$ 为棱的平行六面体的体积, 这里 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}$ 是互相垂直的单位向量.

解 (1) 记 $\boldsymbol{a}=(1,-3,1),\boldsymbol{b}=(2,1,-3),\boldsymbol{c}=(1,2,1)$. 则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(8,5,7)$. 平行六面体体积

$$V=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|=|(8,5,7)\cdot(1,2,1)|=25.$$

□

提示 (2) 也可以直接利用行列式计算混合向量积的值.

解 (2) 记 $\boldsymbol{a}=(1,-3,1),\boldsymbol{b}=(2,1,-3),\boldsymbol{c}=(1,2,1)$. 则行六面体体积

$$V=\begin{vmatrix}1&-3&1\\2&1&-3\\1&2&1\end{vmatrix}=25.$$

□

8.1.14

8.1.15

8.1.16

8.1.17 已知 $\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\overrightarrow{OB}=3\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k},\overrightarrow{OC}=4\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}$, 问 A,B,C 三点是否共线?

解 (1) 注意到, 取 $t=-1$, 满足: $\overrightarrow{OC}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}$, 故 A,B,C 三点共线. □

解 (2) 注意到, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k},\overrightarrow{AC}=2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}\implies\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{0}$, 故 A,B,C 三点共线. □

8.1.18

8.1.19

8.1.20

8.1.21 试求向量 $\boldsymbol{a}=(5,2,5)$ 在向量 $\boldsymbol{b}=(2,-1,2)$ 上的投影长, 即求数值 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_b$.

解 计算得:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_b=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{18}{3}=6.$$

□

8.1.22 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,-1,-2)$ 和 $\boldsymbol{b}=(1,2,-1)$, 试求下列向量积的坐标:

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$; (2) $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

解 (1)

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(3,-1,-2)\times(1,2,-1)=(5,1,7).$$

(2)

$$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=4\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(20,4,28).$$

□

8.1.23

8.1.24 计算顶点为 $A(2,-1,1),B(5,5,4),C(3,2,-1),D(4,1,3)$ 的四面体的体积.

解 (1) 先计算 $\triangle BCD$ 的面积 S.

$$\begin{cases}\overrightarrow{BC}=(-2,-3,-5),\\ \overrightarrow{BD}=(-1,-4,-1)\end{cases}\implies\boldsymbol{n}=\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=(-17,3,5)\implies S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{n}|=\frac{1}{2}\sqrt{323}.$$

再计算点 A 到平面 BCD 的距离 d.

$$d=\left|\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{(3,6,3)\cdot(-17,3,5)}{\sqrt{323}}\right|=\frac{18}{\sqrt{323}}.$$

从而四面体的体积为

$$V=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot d=3.$$

□

说明 事实上, 若注意到 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 所张成的四面体体积为对应平行六面体体积的 $\frac{1}{6}$, 则可以迅速得到结果. 请看下面的**解 (2)**. (两种解法本质上是等价的.)

解 (2) 记四面体的体积为 V. 则有

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(3,6,3),\\ \overrightarrow{AC}=(1,3,-2),\\ \overrightarrow{AD}=(2,2,2)\end{cases}\Longrightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-21,9,3)\Longrightarrow \begin{aligned}V&=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\right|\\&=\frac{1}{6}\left|(-21,9,3)\cdot(2,2,2)\right|=3.\end{aligned}$$

□

8.1.25

8.1.26

8.1.27 给定点 $A(a,b,c)$, 求:

(1) 关于三个坐标平面对称点的坐标;

(2) 关于三个坐标轴对称点的坐标.

解 (1) 关于 Oyz 对称: $(-a,b,c)$, 关于 Ozx 对称: $(a,-b,c)$, 关于 Oxy 对称: $(a,b,-c)$; (2) 关于 x 轴对称: $(a,-b,-c)$, 关于 y 轴对称: $(-a,b,-c)$, 关于 z 轴对称: $(-a,-b,c)$. □

8.1.28

8.1.29 在 Oyz 平面上求一点 P, 使它与三已知点 $A(3,1,2),B(4,-2,-2),C(0,5,1)$ 等距离.

提示 考虑线段的中垂面.

解 过 AB 中点 $M_1\left(\frac{7}{2},-\frac{1}{2},0\right)$ 且法向量方向为 $\boldsymbol{n}_1=\overrightarrow{AB}=(1,-3,-4)$ 的平面方程为

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)-3\left(y+\frac{1}{2}\right)-4z=0, \tag{8.1}$$

过 AC 中点 $M_2\left(\frac{3}{2},3,\frac{3}{2}\right)$ 且法向量方向为 $\boldsymbol{n}_2=\overrightarrow{AC}=(-3,4,-1)$ 的平面方程为

$$-3\left(x-\frac{3}{2}\right)+4(y-3)-\left(z-\frac{3}{2}\right)=0, \tag{8.2}$$

Oyz 平面方程为

$$x=0, \tag{8.3}$$

联立式 (8.1)(8.2)(8.3) 得: $P(0,1,-2)$. □

8.2 平面与直线

8.2.1

8.2.2 试求通过点 $M_1(2,-1,3)$ 和 $M_2(3,1,2)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{v}=(3,-1,4)$ 的平面的方程.

解 记 $\boldsymbol{u}=\overrightarrow{M_1M_2}=(1,2,-1)$, 则平面的法向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=(7,-7,-7)$, 又平面过 $M_1(2,-1,3)$, 故方程为 $7(x-2)-7(y+1)-7(z-3)=0$, 即 $x-y-z=0$. □

8.2.3

8.2.4

8.2.5 求通过点 $M(3,-1,1)$ 且同时垂直于两个平面 $2x-z+1=0$ 和 $y=0$ 的平面方程.

解 两平面法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(2,0,-1),\boldsymbol{n}_2=(0,1,0)$, 从而要求的平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(1,0,2)$, 又其通过点 $M(3,-1,1)$, 故方程为 $(x-3)+2(z-1)=0$, 即 $x+2z-5=0$. □

8.2.6

8.2.7

8.2.8

8.2.9

8.2.10

8.2.11 求与两平面 $x+y-2z-1=0$ 和 $x+y-2z+3=0$ 等距离的平面.

解 注意到两平面的法向量均为 $\boldsymbol{n}=(1,1,-2)$, 取点 $A(1,0,0),B(-3,0,0)$ 分别位于两平面上, 则等距平面过 AB 中点 $M(-1,0,0)$, 法向量同为 $\boldsymbol{n}$, 故其平面方程为 $(x+1)+y-2z=0$, 即 $x+y-2z+1=0$. □

8.2.12 求两平面 $2x-y+z-7=0$ 和 $x+y+2z-11=0$ 所成的两个二面角的平分面.

提示 取两平面长度相等的法向量, 利用等腰三角形三线合一, 将求解角平分线的问题转

化为求中线即可.

解 注意到两平面的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(2,-1,1),\boldsymbol{n}_2=(1,1,2),|\boldsymbol{n}_1|=|\boldsymbol{n}_2|$, 故两平分面的法向量分别为 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_2=(3,0,3),\boldsymbol{n}'=\boldsymbol{n}_1-\boldsymbol{n}_2=(1,-2,-1)$.

联立 $\begin{cases}2x-y+z-7=0,\\x+y+2z-11=0,\end{cases}$ 令 $z=0$ 得: 平面过 $P(6,5,0)$, 故两平分面的方程分别为

$$\begin{aligned}&3(x-6)+3z=0,\quad -(x-6)+2(y-5)+z=0\\ \iff\ & x+z-6=0,\quad x-2y-z+4=0.\end{aligned}$$

□

8.2.13

8.2.14 分别按下列各组条件求平面方程.

(1) 平分两点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$ 间的线段且垂直于线段 AB;

(2) 与平面 $6x+3y+2z+12=0$ 平行, 而点 $(0,2,-1)$ 到这两个平面的距离相等;

(3) 通过 x 轴, 且点 $(5,4,13)$ 到这个平面的距离为 8 个单位;

(4) 经过点 $M(0,0,1)$ 及 $N(3,0,0)$ 并与 Oxy 平面成 $\dfrac{\pi}{3}$ 角.

解 (1) (本题略.)

(2) (本题略.)

(3) 平面过 x 轴, 显然 $z=0$ 不符合题意, 故设其方程为 $y+kz=0\ (k\in\mathbb{R})$. 点 $(5,4,13)$ 到平面的距离

$$\begin{aligned}&d=\frac{|4+13k|}{\sqrt{1+k^2}}=8\implies 105k^2+104k-48=0\\ \iff\ &(35k-12)(3k+4)=0\implies k_1=\frac{12}{35},k_2=-\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

对应平面方程为 $35y+12z=0$ 与 $3y-4z=0$. □

(4) 设平面法向量为 $\boldsymbol{n}$, 则其与 Oxy 平面 $z=0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_0=(0,0,1)$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$, 不妨设 $\boldsymbol{n}=(x,y,1):=\overrightarrow{OP}$, 从而点 P 必在 $z=1$ 平面上, 以 $M(0,0,1)$ 为圆心, $r=\sqrt{3}$ 为半径的圆上 ($\tan\angle MOP=\dfrac{PM}{MO}=\tan\dfrac{\pi}{3}\implies r=PM=\sqrt{3}$). 故重设 $\boldsymbol{n}=(r\cos\theta,r\sin\theta,1)\ (0\leqslant\theta<2\pi)$. 平面过 $M(0,0,1)$, 故其方程为 $\sqrt{3}\cos\theta x+\sqrt{3}\sin\theta y+(z-1)=0$, 将 $N(3,0,0)$ 代入得: $3\sqrt{3}\cos\theta-1=0\implies\cos\theta=\dfrac{1}{3\sqrt{3}},\sin\theta=\pm\dfrac{\sqrt{26}}{3\sqrt{3}}$. 故平面方程为 $\dfrac{1}{3}x\pm\dfrac{\sqrt{26}}{3}y+z-1=0$, 即 $x\pm\sqrt{26}y+3z-3=0$. □

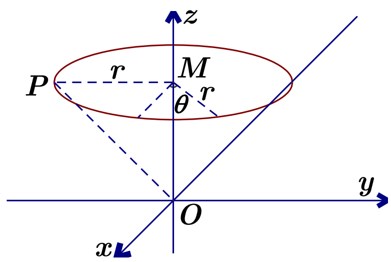

Figure 8.1 习题 8.2.14(4)

8.2.15 分别求出满足下列各组条件的直线方程.

(1) 过点 $(0,2,4)$ 而与两平面 $x+2z=1,y-3z=2$ 平行;

(2) 过点 $(-1,2,1)$ 且平行于直线

$$\begin{cases} x+y-2z-1=0, \\ x+2y-z+1=0; \end{cases}$$

(3) 过点 $(2,-3,4)$ 且和 z 轴垂直并相交;

(4) 过点 $(-1,-4,3)$ 并与下面两直线

$$\begin{cases} 2x-4y+z=1, \\ x+3y=-5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2+4t, \\ y=-1-t, \\ z=-3+2t \end{cases}$$

都垂直.

解 (1) (2) (3) (本题略.)

(4) 平面 $2x-4y+z=1, x+3y=-5$ 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(2,-4,1), \boldsymbol{n}_2=(1,3,0)$, 从而直线 $\begin{cases} 2x-4y+z=1, \\ x+3y=-5 \end{cases}$ 的方向向量为 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(-3,1,10)$.

直线 $\begin{cases} x=2+4t, \\ y=-1-t, \\ z=-3+2t \end{cases}$ 即为 $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+3}{2} \implies$ 方向向量为 $\boldsymbol{v}_2=(4,-1,2)$.

要求的直线与上述两直线均垂直, 从而其方向向量为 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2=(12,46,-1)$, 又过点 $(-1,-4,3)$, 故其方程为

$$\frac{x+1}{12}=\frac{y+4}{46}=\frac{z-3}{-1}.$$

□

8.2.16

8.2.17

8.2.18

8.2.19

8.2.20

8.2.21

8.2.22

8.2.23 证明下列各组直线是异面直线, 并求它们的距离 (即两直线公垂线之长).

(1) $\dfrac{x-9}{4}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{1}$ 和 $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+7}{9}=\dfrac{z-2}{2}$;

(2) $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x+2y-z-2=0, \\ x+2y+2z+4=0. \end{cases}$

证明 (1) 两直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{v}_1=(4,-3,1), \boldsymbol{v}_2=(-2,9,2), \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2=(-15,-10,30)$, 两直线分别过点 $A(9,-2,0), B(0,-7,2)$, 记 $\boldsymbol{u}=\overrightarrow{AB}=(-9,-5,2)$.

由向量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{u}$ 张成的平行六面体的体积为

$$V=|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{u}|=|(-15,-10,30)\cdot(-9,-5,2)|=245>0,$$

故两直线为异面直线. 下面计算其公垂线之长.

公垂线方向为 $\boldsymbol{v}=(-15,-10,30)$, 长度为

$$d=\frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{245}{35}=7.$$

(2) 两平面 $x+y-z-1=0, 2x+y-z-2=0$ 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,-1), \boldsymbol{n}_2=(2,1,-1)$ $\Longrightarrow$ 其交线的方向向量为 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(0,-1,-1)$, 且过点 $A(1,0,0)$;

同理可得, 平面 $x+2y-z-2=0, x+2y+2z+4=0$ 的法向量分别为 $\boldsymbol{m}_1=(1,2,-1), \boldsymbol{m}_2=(1,2,2)$ $\Longrightarrow$ 其交线的方向向量为 $\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{m}_1\times\boldsymbol{m}_2=(6,-3,0)$, 且过点 $B(0,0,-2)$.

记 $\boldsymbol{u}=\overrightarrow{AB}=(-1,0,-2), \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2=(-3,-6,6)$. 由向量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{u}$ 张成的平行六面体的体积为

$$V=|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{u}|=|(-3,-6,6)\cdot(-1,0,-2)|=9>0,$$

故两直线为异面直线. 下面计算其公垂线之长.

公垂线方向为 $\boldsymbol{v}=(-3,-6,6)$, 长度为

$$d=\frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{9}{9}=1.$$

□

8.2.24

8.2.25

8.2.26 过直线 $\begin{cases} 5x-11z+7=0, \\ 5y+7z-4=0 \end{cases}$ 作互相垂直的平面. 其中一平面过点 $(4,-3,1)$, 求此二平面方程.

解 直线的方向向量为 $\boldsymbol{v}_0=(5,0,-11)\times(0,5,7)=(55,-35,25)$, 取 $\boldsymbol{v}=(11,-7,5)$. 直线过点 $A\left(-\frac{7}{5},\frac{4}{5},0\right)$. 设其中过点 $(4,-3,1)$ 的一平面的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(a,b,1)$, 则其方程为

$a\left(x+\dfrac{7}{5}\right)+b\left(y-\dfrac{4}{5}\right)+z=0$, 则有

$$\begin{cases}\dfrac{27}{5}a-\dfrac{19}{5}b+1=0,\\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_1=0\end{cases}\implies\begin{cases}27a-19b+5=0,\\ 11a-7b+5=0\end{cases}\implies\begin{cases}a=-3,\\ b=-4\end{cases}\implies\boldsymbol{n}_1=(-3,-4,1).$$

另一平面法向量 $\boldsymbol{n}_2'=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}_1=(13,-26,-65),\boldsymbol{n}_2=\dfrac{1}{13}\boldsymbol{n}_2'=(1,-2,-5)$, 故两平面方程分别为

$$-3\left(x+\frac{7}{5}\right)-4\left(y-\frac{4}{5}\right)+z=0,\quad\left(x+\frac{7}{5}\right)-2\left(y-\frac{4}{5}\right)-5z=0,$$

即

$$3x+4y-z+1=0,\quad x-2y-5z+3=0.$$

□

8.2.27

8.2.28

8.2.29

8.2.30

8.2.31

8.2.32

8.2.33

8.2.34

8.2.35 求由原点到直线 $\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{-2}$ 的垂线方程.

解 直线的参数方程为 $\begin{cases}x=5+4t,\\ y=2+3t,\\ z=-1-2t,\end{cases}$ 其中 $t\in\mathbb{R}$. 故直线上一点可表示为 $M(5+4t,2+3t,-1-2t)$. 直线的方向向量为 $\boldsymbol{v}=(4,3,-2)$.

设 $\overrightarrow{OM}\perp\boldsymbol{v}\implies\overrightarrow{OM}\cdot\boldsymbol{v}=0\implies 28+29t=0\implies t=-\dfrac{28}{29}\implies\overrightarrow{OM}=$

$\left(\frac{33}{29},-\frac{26}{29},\frac{27}{29}\right)$, 故垂线方程为

$$\frac{x}{33}=\frac{y}{-26}=\frac{z}{27}.$$

□

8.3 二次曲面

8.3.1 指出下列方程中曲面的类型. 对于旋转曲面, 它们是怎样产生的.

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

(8)

答案 (1) 旋转椭球面;

(2) 球面;

(3) 椭球面;

(4) 旋转单叶双曲面;

(5) 双叶双曲面;

(6) 旋转双叶双曲面;

(7) 旋转抛物面;

(8) 双曲抛物面.

8.3.2

8.3.3 求下列旋转曲面的方程, 并指出它们的名称.

(1) 曲线 $\begin{cases} y^2-\dfrac{z^2}{4}=1, \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周;

(2) 曲线 $\begin{cases} y=\sin x\ (0\leqslant x\leqslant\pi), \\ z=0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周;

(3) 曲线 $\begin{cases} 4x^2+9y^2=36, \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周.

解 (1) (本题略.)

(2) $y^2=\sin^2 x \implies$ 曲面方程为

$$y^2+z^2=\sin^2 x \quad (0\leqslant x\leqslant\pi).$$

(它的名称嘛...叫 “灯笼” 如何???)

(3) (本题略.)

□

8.3.4

8.3.5

8.3.6

8.3.7

8.3.8 一动点 $P(x,y,z)$ 到原点的距离等于它到平面 $z=4$ 的距离, 试求此动点 P 的轨迹, 并判定它是什么曲面.

解 由题意得:

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=|z-4| \implies x^2+y^2+z^2=z^2-8z+16 \iff \frac{x^2+y^2}{8}=-(z-2),$$

这是一个旋转抛物面. □

8.3.9

8.3.10

8.3.11 建立单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{5}=1$ 与平面 $x-2z+3=0$ 的交线在 Oxy 平面上的投影的曲线方程.

解 联立

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{5}=1,\\ x-2z+3=0\end{cases} \implies 5\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-1\right)=z^2=\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 \implies (x-12)^2+20y^2=250,$$

这是一个 Oxy 平面上的椭圆, 故曲线方程为 $\begin{cases}(x-12)^2+20y^2=250,\\ z=0.\end{cases}$ □

8.3.12

8.4 坐标变换和其它常用坐标系

8.4.1

8.4.2

8.4.3 通过坐标旋转, 化简方程 $5x^2-3y^2+3z^2+8yz-5=0$, 并指出它是什么曲面.

提示 (1) 使用坐标变换.

解 (1) 运用坐标系的旋转变换, 消去 yz 项. 将坐标系 $Oxyz$ 绕 x 轴沿顺时针方向旋转 θ $\left(0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则新旧坐标系坐标轴之间的夹角如下表所示:

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}'$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$\boldsymbol{j}'$	$\frac{\pi}{2}$	θ	$\frac{\pi}{2}+\theta$
$\boldsymbol{k}'$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}-\theta$	θ

于是新旧坐标的变换关系为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0 & \cos\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \\ \cos\frac{\pi}{2} & \cos\theta & \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \\ \cos\frac{\pi}{2} & \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = x', \\ y = y'\cos\theta + z'\sin\theta, \\ z = -y'\sin\theta + z'\cos\theta. \end{cases}$$

代入原方程, 令 $y'z'$ 项的系数为 0, 得:

$$-12\sin\theta\cos\theta + 8(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0 \implies \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{4}{3} \implies \tan\theta = -2 \text{ or } \frac{1}{2}.$$

取 $\tan\theta = \dfrac{1}{2}$

$$\implies \begin{cases} \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \\ \cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \implies \begin{cases} x = x', \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{5}}y' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}z', \\ z = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}y' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}z'. \end{cases} \implies x'^2 - y'^2 + z'^2 = 1,$$

这是一个旋转单叶双曲面. □

提示 (2) 化简二次型.

解 (2) 考虑二次型 $Q(x,y,z) = 5x^2 - 3y^2 + 3z^2 + 8yz$.

$$Q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & & \\ & -3 & 4 \\ & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

易知 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵 $\mathrm{diag}(5,5,-5)$, 因此存在可逆正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_1$, 使得 $Q(x,y,z) = Q_1(x_1,y_1,z_1) = 5x_1^2 + 5y_1^2 - 5z_1^2$, 因此原方程化为

$$5x_1^2 + 5y_1^2 - 5z_1^2 - 5 = 0 \iff x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 - 1 = 0,$$

这是一个旋转单叶双曲面. □

8.4.4 将下列方程按要求做相对应的变换:

(1) $x^2 - y^2 = 25$ 转换成柱面坐标系方程和球面坐标系方程;

(2) $x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$ 转换成柱面坐标系方程和球面坐标系方程;

(3) $2x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 0$ 转换成球面坐标系方程;

(4) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ 转换成球面坐标系方程;

(5) $r^2+2z^2=4$ 转换成球面坐标系方程;
(6) $\rho=2\cos\phi$ 转换成柱面坐标系方程;
(7) $x+y=4$ 转换成柱面坐标系方程;
(8) $x+y+z=1$ 转换成球面坐标系方程;
(9) $r=2\sin\theta$ 转换成直角坐标系方程;
(10) $r^2\cos 2\theta=z$ 转换成直角坐标系方程;
(11) $\rho\sin\phi=1$ 转换成直角坐标系方程.

解 (1) 柱面坐标:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta \end{cases} \implies \rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta=25 \implies \rho^2\cos 2\theta=25.$$

球面坐标:

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\phi, \\ y=r\sin\theta\sin\phi, \\ z=r\cos\theta \end{cases} \implies r^2\sin^2\theta\cos^2\phi-r^2\sin^2\theta\sin^2\phi=25 \implies r^2\sin^2\theta\cos 2\phi=25.$$

(2)
(3)
(4)
(5)
(6) 原球坐标中,

$$x=\rho\sin\theta\cos\phi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\phi,\quad z=\rho\cos\theta,$$
$$\rho=2\cos\phi \implies \rho^2=4\cos^2\phi=2(\cos 2\phi+1)=2\left[\frac{1-\tan^2\phi}{1+\tan^2\phi}+1\right]=\frac{4}{1+\tan^2\phi},$$
$$\implies x^2+y^2+z^2=\frac{4x^2}{x^2+y^2},$$

在柱坐标中有

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \\ z=z \end{cases} \implies r^2+z^2=\frac{4r^2\cos^2\theta}{r^2}=4\cos^2\theta.$$

另解 原方程在直角坐标系中的表示为

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2\cos\left(\arctan\frac{y}{x}\right),$$

因此在柱坐标系中的表示为

$$\sqrt{r^2+z^2}=2\cos\theta.$$

□

(7)

(8)

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi, \\ y = r\sin\theta\sin\phi, \\ z = r\cos\theta \end{cases} \implies r\sin\theta\cos\phi + r\sin\theta\sin\phi + r\cos\theta = 1$$

$$\implies r(\sin\theta(\cos\phi + \sin\phi) + \cos\theta) = 1$$

(9)

(10) 柱面坐标:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = z \end{cases} \implies x^2 - y^2 = z,$$

这是一个双曲抛物面.

(11)

□

8.5 第 8 章综合习题

8.5.1 设 O 为一定点, A, B, C 为不共线的三点. 证明: 点 M 位于平面 ABC 上的充分必要条件是存在实数 k_1, k_2, k_3 使得

$$\overrightarrow{OM} = k_1\overrightarrow{OA} + k_2\overrightarrow{OB} + k_3\overrightarrow{OC}, \text{ 且 } k_1 + k_2 + k_3 = 1.$$

证明 (1) (1) 若点 O 在平面 ABC 上, 则 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 都在平面 ABC 上, $\overrightarrow{OM} = k_1\overrightarrow{OA} + k_2\overrightarrow{OB} + k_3\overrightarrow{OC}$ 固然也在平面 ABC 上, 充分性显然; 下证必要性.

以 O 为原点, 建立平面直角坐标系. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), M(x_0, y_0)$ 均在平面 ABC 上, 即证线性方程组

$$\begin{cases} x_1k_1 + x_2k_2 + x_3k_3 = x_0, \\ y_1k_1 + y_2k_2 + y_3k_3 = y_0, \\ k_1 + k_2 + k_3 = 1 \end{cases}$$

对任意的 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ 必有解 $\iff$ 系数矩阵线性无关

$$\iff \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \iff x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_2x_3 - y_3x_1 - y_1x_2 \neq 0$$

$$\iff (x_3 - x_1)(y_1 - y_2) + (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) \neq 0$$

$$\impliedby \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \neq \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

$\iff \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 线性无关 $\iff A, B, C$ 不共线.

(2) 若点 O 不在平面 ABC 上, 则 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 为空间中不共面的三个向量, 构成一组基, 即存在实数 k_1,k_2,k_3 使得 $\overrightarrow{OM}=k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}$.

下证: 点 M 在平面 ABC 上 $\iff k_1+k_2+k_3=1$.

点 M 在平面 ABC 上

$$\begin{aligned}&\iff (\overrightarrow{MA}\times\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MC}=0 \iff (\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM})\times(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM})=0\\&\iff \overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OM}=0, \qquad (8.4)\end{aligned}$$

其中已用到

$$\begin{cases}\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0,\\ \overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM}=0,\\ \overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OM}=0.\end{cases}$$

由向量混合积的性质易知, 式 (8.4)

$$\begin{aligned}&\iff (\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OM}=0\\&\iff (\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\cdot(k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC})=0\\&\iff k_1\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0\\&\iff (k_1+k_2+k_3)(\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})=0\\&\iff k_1+k_2+k_3=0.\end{aligned}$$

□

证明 (2) 先证明必要性. 假设点 M 位于平面 ABC 上, 由 A,B,C 不共线知, $\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, 使得

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}\\ \implies&\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\mu(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\\ \implies&\overrightarrow{OM}=(1-\lambda-\mu)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC},\end{aligned}$$

取 $\begin{cases}k_1=1-\lambda-\mu,\\ k_2=\lambda,\\ k_3=\mu\end{cases}$ 满足 $k_1+k_2+k_3=1$, 必要性得证.

再证明充分性.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}=k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC} &\implies \overrightarrow{OM}=(1-k_2-k_3)\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}\\&\implies \overrightarrow{AM}=k_2\overrightarrow{AB}+k_3\overrightarrow{AC},\end{aligned}$$

故点 M 在平面 ABC 上. 充分性得证. □

8.5.2

8.5.3

8.5.4

8.5.5

8.5.6 证明等式: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

证明 (1) 在空间直角坐标系中, 设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2),\boldsymbol{c}=(x_3,y_3,z_3)$. 则向量 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$ 的第一个分量为

$$\begin{aligned}&(z_2x_3-z_3x_2)z_1-(x_2y_3-x_3y_2)y_1\\&+(z_3x_1-z_1x_3)z_2-(x_3y_1-x_1y_3)y_2\\&+(z_1x_2-z_2x_1)z_3-(x_1y_2-x_2y_1)y_3=0.\end{aligned}$$

同理可得第二、三个分量也为 0, 故

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

□

证明 (2) 直接运用二重向量积的性质, 可得:

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}\\=&(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}\\=&\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

□

8.5.7 求准线为 $\begin{cases}y^2+z^2=1,\\x=1,\end{cases}$ 母线方向为 $(2,1,1)$ 的柱面的一般方程.

解 准线上任意一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 过 M_0 作方向为 $(2,1,1)$ 的直线, 其方程为

$$\frac{x-x_0}{2}=y-y_0=z-z_0\iff\begin{cases}x=2t+x_0,\\y=t+y_0,\qquad t\in\mathbb{R},\\z=t+z_0,\end{cases}$$

故 $(x_0,y_0,z_0)=(x-2t,y-t,z-t)$ 在准线上, 即

$$\begin{aligned}&\begin{cases}(y-t)^2+(z-t)^2=1,\\x-2t=1\end{cases}\implies\left(y-\frac{1}{2}(x-1)\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}(x-1)\right)^2=1\\&\iff x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2x+2y+2z-1=0.\end{aligned}$$

□

8.5.8 求准线为 $\begin{cases} y^2+z^2=1, \\ x=1, \end{cases}$ 顶点坐标为 $(2,1,1)$ 的锥面的一般方程.

解 准线上任意一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 过 M_0 与点 $(2,1,1)$ 的直线方程为

$$\frac{x-2}{x_0-2}=\frac{y-1}{y_0-1}=\frac{z-1}{z_0-1} \iff \begin{cases} x=(x_0-2)t+2, \\ y=(y_0-1)t+1, \qquad t\in\mathbb{R}, \\ z=(z_0-1)t+1, \end{cases}$$

故 $(x_0,y_0,z_0)=((x-1)s+2,(y-1)s+1,(z-1)s+1)$ 在准线上, 其中 $s=\dfrac{1}{t}\in\mathbb{R}$. 即

$$\begin{cases} ((y-1)s+1)^2+((z-1)s+1)^2=1, \\ (x-2)s+2=1 \end{cases}$$
$$\implies (y-1+2-x)^2+(z-1+2-x)^2-(2-x)^2=0$$
$$\iff x^2+y^2+z^2-2xy-2zx+2y+2z-2=0.$$

□

8.5.9 求直线 $x-1=y=z$ 绕 $x=y=1$ 旋转所得旋转面的参数方程和一般方程.

解 直线 $x-1=y=z$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+t, \\ y=z=t, \end{cases}$ 故旋转面上的点 (x,y,z) 满足

$$\begin{cases} t^2+(t-1)^2=(x-1)^2+(y-1)^2, \\ z=t \end{cases} \implies x^2+y^2-2z^2-2x-2y+2z+1=0,$$

对应的参数方程表示为

$$\begin{cases} x=\sqrt{t^2+(t-1)^2}\cos\theta+1, \\ y=\sqrt{t^2+(t-1)^2}\sin\theta+1, \qquad (t\in\mathbb{R},\theta\in[0,2\pi)). \\ z=t \end{cases}$$

□

8.5.10

8.5.11

8.5.12 已知椭球面的三个半轴长分别为 a,b,c, 三条对称轴方程分别为

$$3-x=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}, \quad \frac{x}{2}=3-y=\frac{z}{2}, \quad \frac{x}{2}=\frac{y}{2}=3-z,$$

求椭球面的一般方程.

解 注意到三条对称轴的公共点为 $O'(2,2,2)$, 方向向量分别为

$$\boldsymbol{n}_1=(-1,2,2),\quad \boldsymbol{n}_2=(2,-1,2),\quad \boldsymbol{n}_3=(2,2,-1),$$

取一组新的基

$$\boldsymbol{i}'=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right),\quad \boldsymbol{j}'=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\quad \boldsymbol{k}'=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right),$$

在坐标系 $[O';\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}']$ 下, 椭球面的方程为

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1, \tag{8.5}$$

(1) 作坐标系的旋转变换 $[O';\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}']\leftrightarrow[O';\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}] \iff (x',y',z')\leftrightarrow(x'',y'',z'')$, 由

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}'\\ \boldsymbol{j}'\\ \boldsymbol{k}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{k}\end{pmatrix}\implies\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x''\\ y''\\ z''\end{pmatrix}.$$

(2) 作坐标系的平移变换 $[O';\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]\leftrightarrow[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}] \iff (x'',y'',z'')\leftrightarrow(x,y,z)$, 则有

$$\begin{pmatrix}x''\\ y''\\ z''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2\\ y-2\\ z-2\end{pmatrix}\implies\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-2\\ y-2\\ z-2\end{pmatrix},$$

代入式 (8.5) 化简得:

$$\frac{(-x+2y+2z-6)^2}{9a^2}+\frac{(2x-y+2z-6)^2}{9b^2}+\frac{(2x+2y-z-6)^2}{9c^2}=1.$$

其中 a,b,c 可以轮换. □

说明 事实上, 若不用坐标变换, 也可以快速得到结果. 注意到, 椭球的标准方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 中的 x,y,z 分别表示椭球中心到三个半长轴所构成的平面的距离, 故只需将其中的 x,y,z 替换为椭球上一点 (x,y,z) 到椭球的三个对称平面的距离即可.

8.5.13 设在球面坐标系中有两点 (ρ_1,θ_1,ϕ_1) 和 (ρ_2,θ_2,ϕ_2), d 是这两点之间的直线距离. 证明:

$$d=\sqrt{(\rho_1-\rho_2)^2+2\rho_1\rho_2[1-\cos(\phi_1-\phi_2)\sin\theta_1\sin\theta_2-\cos\theta_1\cos\theta_2]}.$$

证明 (1) 两点对应的直角坐标为

$$\boldsymbol{r}_1=(\rho_1\sin\theta_1\cos\phi_1,\rho_1\sin\theta_1\sin\phi_1,\rho_1\cos\theta_1),\quad \boldsymbol{r}_2=(\rho_2\sin\theta_2\cos\phi_2,\rho_2\sin\theta_2\sin\phi_2,\rho_2\cos\theta_2),$$

故两点之间的距离为

$$\begin{aligned}d&=\sqrt{(\rho_1\sin\theta_1\cos\phi_1-\rho_2\sin\theta_2\cos\phi_2)^2+(\rho_1\sin\theta_1\sin\phi_1-\rho_2\sin\theta_2\sin\phi_2)^2+(\rho_1\cos\theta_1-\rho_2\cos\theta_2)^2}\\&=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2(\sin\theta_1\sin\theta_2(\cos\phi_1\cos\phi_2+\sin\phi_1\sin\phi_2)+\cos\theta_1\cos\theta_2)}\\&=\sqrt{(\rho_1-\rho_2)^2+2\rho_1\rho_2[1-\cos(\phi_1-\phi_2)\sin\theta_1\sin\theta_2-\cos\theta_1\cos\theta_2]}.\end{aligned}$$

□

提示 (2) 考虑余弦定理.

证明 (2) 两点对应的直角坐标为

$$\boldsymbol{r}_1 = (\rho_1 \sin\theta_1 \cos\phi_1, \rho_1 \sin\theta_1 \sin\phi_1, \rho_1 \cos\theta_1), \quad \boldsymbol{r}_2 = (\rho_2 \sin\theta_2 \cos\phi_2, \rho_2 \sin\theta_2 \sin\phi_2, \rho_2 \cos\theta_2),$$

故由余弦定理知, 两点之间的距离为

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\boldsymbol{r}_1^2 + \boldsymbol{r}_2^2 - 2\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2} \\ &= \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2(\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos\theta_1 \cos\theta_2)} \\ &= \sqrt{(\rho_1 - \rho_2)^2 + 2\rho_1\rho_2[1 - \cos(\phi_1 - \phi_2)\sin\theta_1 \sin\theta_2 - \cos\theta_1 \cos\theta_2]}. \end{aligned}$$

□

8.5.14

8.5.15

8.5.16

8.5.17

8.5.18

第 9 章　多变量函数的微分学

9.1　多变量函数及其连续性

9.1.1　证明: (1) $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$; (2) $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$.

证明　(1) 对 $\forall a\in(A\cap B)^c, a\notin A\cap B \implies a\notin A$ or $a\notin B \implies a\in A^c$ or $a\in B^c \implies a\in A^c\cup B^c \implies (A\cap B)^c\subseteq A^c\cup B^c$;

对 $\forall a\in A^c\cup B^c, a\in A^c$ or $B^c \implies a\notin A$ or $a\notin B \implies a\notin A\cap B \implies a\in(A\cap B)^c \implies A^c\cup B^c\subseteq(A\cap B)^c$.

$$\begin{cases}(A\cap B)^c\subseteq A^c\cup B^c,\\ A^c\cup B^c\subseteq(A\cap B)^c\end{cases} \implies (A\cap B)^c = A^c\cup B^c.$$

(2) $a\in(A\cup B)^c \iff a\notin A\cup B \iff a\notin A$ and $a\notin B \iff a\in A^c$ and $a\in B^c \iff a\in A^c\cap B^c \implies (A\cup B)^c = A^c\cap B^c$. □

9.1.2

9.1.3

9.1.4　设 $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} M_n' = M_0'$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(M_n, M_n') = \rho(M_0, M_0')$.

证明　注意到,

$$\rho(M_0,M_0')-\rho(M_n,M_0)-\rho(M_n',M_0')\leqslant\rho(M_n,M_n')\leqslant\rho(M_n,M_0)+\rho(M_0,M_0')+\rho(M_n',M_0'),$$

由

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(\rho(M_0,M_0')-\rho(M_n,M_0)-\rho(M_n',M_0'))\\=&\lim_{n\to\infty}(\rho(M_n,M_0)+\rho(M_0,M_0')+\rho(M_n',M_0'))=\rho(M_0,M_0')\end{aligned}$$

及两边夹法则知, $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(M_n,M_n')=\rho(M_0,M_0')$. □

9.1.5　证明: 平面上收敛的点列必然是有界的.

证明 记 $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M$, 则对 $\varepsilon = 1, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$\rho(O, M_n) - \rho(O, M) \leqslant \rho(M_n, M) \leqslant 1 \implies \rho(O, M_n) \leqslant \rho(O, M) + 1,$$

取 $\rho_M = \max\{\rho(O, M_1), \rho(O, M_2), \cdots, \rho(O, M_N), \rho(O, M) + 1\}$, 则对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 有 $\rho(O, M_n) \leqslant \rho_M$, 故点列 $\{M_n\}$ 有界. □

9.1.6 证明集合 $E = \left\{(x, y) : y = \sin\dfrac{1}{x}, 0 < x \leqslant \dfrac{2}{\pi}\right\} \cup \{(0, y) : 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 是连通的但不是道路连通的.

证明 集合 $\{(0, y) : 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 均为集合 $\left\{(x, y) : y = \sin\dfrac{1}{x}, 0 < x \leqslant \dfrac{2}{\pi}\right\}$ 的凝聚点, 故集合 E 是连通的.

另一方面, 两集合只能通过曲线

$$y = f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

连通, 但显然, 上述曲线不是连续曲线, 故两集合不是道路连通的. □

9.1.7 确定以下函数的定义域, 并指出它们是否是区域, 是否是闭区域.

(1) $z = \sqrt{x + y}$;

(2) $z = \sqrt{x - 2y^2}$;

(3) $z = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 + 2x}}{2x - x^2 - y^2}$;

(4) $z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$;

(5) $z = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right)$;

(6) $z = \sqrt{\cos x \sin y}$;

(7) $u = \arcsin\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$;

(8) $u = \sqrt{2az - x^2 - y^2 - z^2}$ $(a > 0)$.

解 记函数的定义域为 D.

(5)

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 0 \implies D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\right\},$$

这是一个不含边界的椭圆, 是一个区域, 但不是一个闭区域.

(8)

$$2az - x^2 - y^2 - z^2 \geqslant 0 \implies D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leqslant a^2, a > 0\},$$

这是一个以 $M(0, 0, a)$ 为球心, $r = a$ 为半径, 包含球面的球体, 是一个闭区域. □

讨论 以下是关于**区域**的两种定义, 以哪一种为准?

(1) 数学分析教程 (上册):

连通的开集称为**区域**, 区域的闭包称为**闭区域**;

(2) 数学分析讲义 (第二册):

连通的开集称为**开区域**, 开区域的闭包称为**闭区域**, 开区域和闭区域统称为**区域**.

那么, 本题所说的**区域**指 “连通的开集” 还是泛指 “连通的集合”?

† 上述问法本身有一定的问题. 区域不可能指 "连通的集合", 因为闭区域并不代表连通的闭集, 因此区域只可能指 "连通的开集" 或 "开区域和闭区域的统称".

† 你可以试着证明: 连通的闭集不一定是闭区域. 通常在不是十分关心定义域时 (例如: 做二元积分时, 边界的地方通常不做考虑), 区域作为开区域和闭区域的统称使用; 而在类似本题的叙述中, 区域作为开区域的简写出现.

† 下面证明: 连通的闭集不一定是闭区域.
事实上, 取 $\mathbb{R}^2$ 的子集 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 1 \text{ or } (x,y)=(t,0), t\in[1,2]\}$, 显然, D 是一个连通的闭集, 但 D 不是一个闭区域. 因为作为一个闭区域, 必须是某一个连通开集的闭包. (闭区域是通过区域 "导出" 的) □

9.1.8

9.1.9

9.1.10 设 $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, 求 $f(1,1), f(y,x), f\left(1,\dfrac{y}{x}\right), f(u,v), f(\cos t, \sin t)$.

解 计算得:

$$f(1,1)=1, \quad f(y,x) = \frac{2xy}{x^2+y^2}, \quad f\left(1,\frac{y}{x}\right) = \frac{2xy}{x^2+y^2},$$
$$f(u,v) = \frac{2uv}{u^2+v^2}, \quad f(\cos t,\sin t) = \frac{2\cos t\sin t}{\cos^2 t+\sin^2 t} = \sin 2t.$$

□

9.1.11

9.1.12

9.1.13 设 $f(x,y)=x^y, \varphi(x,y)=x+y, \psi(x,y)=x-y$, 求

$$f[\varphi(x,y),\psi(x,y)], \quad \varphi[f(x,y),\psi(x,y)], \quad \psi[\varphi(x,y),f(x,y)].$$

解 计算得:

$$f[\varphi(x,y),\psi(x,y)] = (x+y)^{x-y},$$
$$\varphi[f(x,y),\psi(x,y)] = x^y+x-y,$$
$$\psi[\varphi(x,y),f(x,y)] = x+y-x^y.$$

□

9.1.14 判断下列各题极限是否存在, 若有极限, 求出其极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\y\to +\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$;

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$;

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$;

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\y\to \infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$;

(7) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\y\to +\infty}}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$;

(8) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\y\to 0}}\dfrac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(9) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$;

(10) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$;

(11) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$;

(12) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$.

解 (1) 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 则当 $|x|<\delta, |y|<\delta$ 且 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, 有

$$\begin{cases} x^2\leqslant \delta\,|x|\,, \\ y^2\leqslant\delta\,|y| \end{cases}\implies \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}\leqslant\frac{\delta(|x|+|y|)}{|x|+|y|}=\delta=\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}=0$.

另解 设 $\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta\end{cases}$ $(0\leqslant\theta<2\pi)$, 则有 $|\cos\theta|+|\sin\theta|\geqslant 1$.

对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 则当 $r=\rho(O,(x,y))<\delta$ 时, 有

$$\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}=\frac{r}{|\cos\theta|+|\sin\theta|}\leqslant r<\delta=\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}=0$. □

(2) 由等价无穷小替换: 当 $x\to 0, y\to a$ 时, $xy\to 0\implies \sin xy\sim xy\ (x\to 0, y\to a)$, 故

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to a}}\frac{\sin xy}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to a}}\frac{xy}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to a}}y=a.$$

(3) 由均值不等式得:

$$0\leqslant\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leqslant\left(\frac{xy}{2xy}\right)^{x^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2},$$

由 $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\y\to +\infty}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}=0$ 及两边夹法则得: $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\y\to +\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0$.

(4) (5) (6)

(7) 注意到,

$$0\leqslant(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}\leqslant(x+y)^2\mathrm{e}^{-(x+y)},$$

由 $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\y\to +\infty}}(x+y)^2\mathrm{e}^{-(x+y)}=\lim\limits_{t\to+\infty}t^2\mathrm{e}^{-t}=0$ 及两边夹法则得: $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\y\to +\infty}}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}=0$.

(8) (9) (10) (11)

(12) 令 $y=x$, 则 $y\to 0\ (x\to 0)$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}=\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x}{2}}=1, \tag{9.1}$$

又令 $y=x^2-x$, 同样满足 $y\to 0\ (x\to 0)$, 此时

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}=\lim_{x\to 0}[1+x(x^2-x)]^{\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{\mathrm{e}}, \tag{9.2}$$

由式 (9.1)(9.2) 知, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$ 不存在. □

9.1.15

9.1.16 证明: 当极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$ 存在时,

(1) 若 $y\neq y_0$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 存在, 则 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=A$;

(2) 若 $x\neq x_0$ 时, $\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=A$.

提示 对 $y\neq y_0$, 记 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=l(y)$.

证明 (1) 记 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=l(y)\ (y\neq y_0)$. 则对 $\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$ 知,

$\exists\delta_1>0$, 使得当 $\begin{cases}|x-x_0|<\delta_1,\\ |y-y_0|<\delta_1,\\ (x,y)\neq(x_0,y_0)\end{cases}$ 时, 有

$$|f(x,y)-A|<\frac{\varepsilon}{2},$$

由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=l(y)\ (y\neq y_0)$ 知, $\exists\delta_2>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时, 有

$$|f(x,y)-l(y)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 取 $x'=x_0+\dfrac{\delta}{2}$, 则有

$$\begin{cases}|f(x',y)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2},\\ |f(x',y)-l(y)|<\dfrac{\varepsilon}{2}\end{cases}$$

对 $\forall 0<|y-y_0|<\delta_1$ 成立, 此时

$$|l(y)-A|\leqslant|f(x',y)-A|+|f(x',y)-l(y)|<\varepsilon,$$

这正是

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)=A.$$

(2) 同理可证. □

9.1.17 研究下列函数的连续性:

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x-y}, & x\neq y\\ 0, & x=y;\end{cases}$ (3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0);\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0;\end{cases}$ (4) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{x+y}, & x+y\neq 0,\\ 0, & x+y=0.\end{cases}$

解 (2) 显然, 函数在 $y\neq 0$ 处连续, 当 $y=0$ 时,

1° $x_0\neq 0$, 则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0}} x\sin\dfrac{1}{y}$ 不存在, 函数 $f(x,y)$ 在 $(x_0,0)$ $(x_0\neq 0)$ 处不连续;

2° $x_0=0$, 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\dfrac{1}{y}=0=f(0,0)$, 故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

综上, 函数 $f(x,y)$ 在 $(x,y)=(x_0,0)$ $(x_0\neq 0)$ 处间断, 在其余点处连续.

(4) 显然, 函数在 $(x_0,y_0)\in\{(x,y):x+y\neq 0\}$ 处连续;

当 $x_0+y_0=0$ 时, 取 $(x_n,y_n)=\left(x_0+\dfrac{2}{n},y_0+\dfrac{1}{n}\right)$, 则有 $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$ $(n\to\infty)$,

1° $x_0\neq y_0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_0-y_0+\frac{1}{n}}{\frac{3}{n}}$ 不存在;

2° $x_0=y_0=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{3}{n}}=\dfrac{1}{3}\neq f(0,0)=0$,

故 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) $(x_0+y_0=0)$ 处不连续.

综上, 函数 $f(x,y)$ 在点 $(x,y)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x+y\neq 0\}$ 处连续, 在其余点处间断. □

9.1.18

9.1.19 * 设 $f(x,y)$ 在 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上分别对 x 和 y 连续, 且对于变量 y 是单调的, 证明: $f(x,y)$ 在 D 上连续.

伪证 由函数分别对 x,y 连续知, 对 $\forall(x_0,y_0)\in D$, 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_1>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta_1$ 且 $(x,y)\in D$ 时, 有

$$|f(x,y)-f(x_0,y)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

又 $\exists\delta_2>0$, 使得当 $|y-y_0|<\delta_2$ 且 $(x,y)\in D$ 时, 有

$$|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 从而当 $\begin{cases}|x-x_0|<\delta,\\ |y-y_0|<\delta,\\ (x,y)\in D\end{cases}$ 时, 有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant|f(x,y)-f(x_0,y)|+|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon,$$

这正是 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$, 故函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续.

分析 由于此处 $\delta_1 = \delta_1(x_0, y)$, 与 y 的取值有关, 故可能出现 $\delta_1 \to 0$ $(y \to y_0)$ 的情况, 从而不存在一个统一的 δ 满足题意.

例如下面这个例子: $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, 满足在 $(0,0)$ 处关于 x, y 分别连续, 但是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

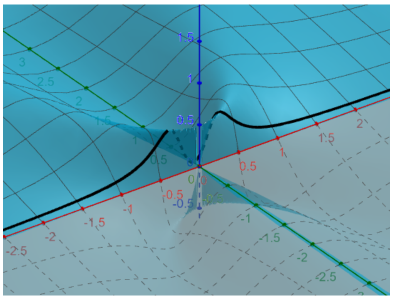

Figure 9.1 $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ 在 $(0,0)$ 处

因此, 我们希望在确定 δ 时, 减少变量的个数, 从而可以得到一些只与 (x_0, y_0) 的值有关的 δ 值. 这便有了下面的证明.

证明 对 $\forall (x_0, y_0) \in D$, 往证 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $f(x_0, y)$ 在 y_0 处连续, 从而 $\exists \delta_1 > 0$, 使得

$$|f(x_0, y_0 + \delta_1) - f(x_0, y_0 - \delta_1)| < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{9.3}$$

又函数 $f(x, y_0 + \delta_1)$ 在 x_0 处连续, 故 $\exists \delta_2 > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta_2$ 时, 有

$$|f(x, y_0 + \delta_1) - f(x_0, y_0 + \delta_1)| < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{9.4}$$

同理, $\exists \delta_3 > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta_3$ 时, 有

$$|f(x, y_0 - \delta_1) - f(x_0, y_0 - \delta_1)| < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{9.5}$$

又由于 $f(x,y)$ 关于 y 单调, 从而当 $|y - y_0| < \delta_1$ 时, 有

$$|f(x,y) - f(x, y_0)| \leqslant |f(x, y_0 + \delta_1) - f(x, y_0 - \delta_1)|, \tag{9.6}$$

最后, 函数 $f(x, y_0)$ 在 x_0 处连续, 从而 $\exists \delta_4 > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta_4$ 时, 有

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{9.7}$$

由式 (9.3)~(9.7) 知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\} > 0$, 则当 $\begin{cases} |x - x_0| < \delta, \\ |y - y_0| < \delta, \\ (x,y) \in D \end{cases}$ 时, 有

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(x_0, y_0)| &\leqslant |f(x,y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \\ &\leqslant |f(x, y_0 + \delta_1) - f(x, y_0 - \delta_1)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \\ &\leqslant |f(x, y_0 + \delta_1) - f(x_0, y_0 + \delta_1)| + |f(x_0, y_0 + \delta_1) - f(x_0, y_0 - \delta_1)| \\ &\quad + |f(x_0, y_0 - \delta_1) - f(x, y_0 - \delta_1)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

这正是 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续. □

说明 也可以利用

$$
\begin{gathered}
|f(x,y)-f(x_0,y_0)| \leqslant \max\{|f(x,y_0+\delta)-f(x_0,y_0)|\,,|f(x,y_0-\delta)-f(x_0,y_0)|\}, \\
|f(x_0,y_0\pm\delta_1)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon, \\
|f(x,y_0\pm\delta_1)-f(x_0,y_0+\delta_1)|<\varepsilon, \\
\Longrightarrow\ |f(x,y_0\pm\delta_1)-f(x_0,y_0)|<2\varepsilon.
\end{gathered}
$$

参考 数学分析习题课讲义 18.2.**例 18.2.2**.

9.1.20 设 $D\subset\mathbb{R}^2$. 对任意 $(x,y)\subset D$, 令 $f(x,y)=x$, 称其为 D 在 x 轴的投影函数. 证明: 投影函数是连续函数, 但是它不一定将闭集映成闭集.

证明 记 $M=(x,y)\in D$, 对 $M_0=(x_0,y_0)\in D$, 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 则当 $M\in B_\delta(M_0)$ 时, 有

$$
|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=|x-x_0|\leqslant\rho(M,M_0)<\delta=\varepsilon,
$$

故 $f(x,y)=x$ 是连续函数.

取 $D=\left\{(x,y)\middle|y\geqslant\dfrac{1}{x},x\in\mathbb{R}_+\right\}$, 则 D 是一个闭集, 而 $f(D)=(0,+\infty)$ 不是一个闭集. □

9.1.21

9.1.22 已知

$$
\lim_{\substack{u\to u_0\\v\to v_0}}f(u,v)=A,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}\varphi(x,y)=u_0,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}\psi(x,y)=v_0,
$$

且 $\exists\delta_0>0$, 使得当 $(x,y)\in B_-((x_0,y_0),\delta_0)$ 时, 有 $\begin{cases}\varphi(x,y)\neq u_0,\\ \psi(x,y)\neq v_0.\end{cases}$ 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明:

$$
\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(\varphi(x,y),\psi(x,y))=A.
$$

证明 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_1>0$, 使得当 $\begin{cases}|u-u_0|<\delta_1,\\ |v-v_0|<\delta_1,\\ (u,v)\neq(u_0,v_0)\end{cases}$ 时, 有 $f(u,v)\in B(A,\varepsilon)$, 对这样取定的 $\delta_1>0$, $\exists\delta>0$, 使得当 $(x,y)\in B_-((x_0,y_0),\delta)$ 时, 有 $\begin{cases}0<|\varphi(x,y)-u_0|<\delta_1,\\ 0<|\psi(x,y)-v_0|<\delta_1,\end{cases}$ 从而

$$
f(\varphi(x,y),\psi(x,y))\in B(A,\varepsilon),
$$

这正是

$$
\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(\varphi(x,y),\psi(x,y))=A.
$$

□

9.1.23 设 $f(x,y)=\dfrac{1}{1-xy},(x,y)\in[0,1]\times[0,1],(x,y)\neq(1,1)$, 证明函数连续但不一致连续.

证明 先证 $f(x,y)$ 在 $D=[0,1]\times[0,1]\setminus\{(1,1)\}$ 上连续.

对 $\forall(x_0,y_0)\in D,\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{4},1\right\}$, 记 $\Delta x=x-x_0,\Delta y=y-y_0$, 则当 $\begin{cases}|\Delta x|<\delta,\\|\Delta y|<\delta\end{cases}$ 且 $(x,y)\in D$ 时, 有

$$\begin{aligned}|(1-xy)-(1-x_0y_0)|&=|x_0\Delta x+y_0\Delta y+\Delta x\Delta y|\leqslant|x_0\Delta x|+|y_0\Delta y|+|\Delta x\Delta y|\\&\leqslant 2(\Delta x+\Delta y)<4\delta\leqslant\varepsilon,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}&\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(1-xy)=1-x_0y_0\\ \Longrightarrow\ &\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=\frac{1}{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(1-xy)}=\frac{1}{1-x_0y_0}=f(x_0,y_0),\end{aligned}$$

从而 $f(x,y)$ 在 D 上连续.

下证其不一致连续.

取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}>0$, 对 $\forall\delta_n=\dfrac{1}{n}>0\ (n\in\mathbb{N}^*)$, 取点 $S_n(1-\delta_n,1),T_n\left(1-\dfrac{\delta_n}{2},1\right)$ 满足 $\rho(S_n,T_n)=\dfrac{\delta_n}{2}<\delta_n$, 但

$$\left|f(1-\delta_n,1)-f\left(1-\frac{\delta_n}{2},1\right)\right|=\frac{1}{\delta_n}=n\geqslant1>\varepsilon_0,$$

故 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]\setminus\{(1,1)\}$ 上不一致连续. □

9.2 多变量函数的微分

9.2.1

9.2.2 求下列各函数对于每个自变量的偏微商:

(1) $z=\dfrac{xe^y}{y^2}$;

(2) $z=3^{-\frac{y}{x}}$;

(3) $z=\sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$;

(4) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$;

(5) $u=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$;

(6) $u=e^{x(x^2+y^2+z^2)}$;

(7) $u=x^{y^z}$;

(8) $u=xe^{-z}+\ln(x+\ln y)+z$.

解 (1)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^y}{y^2},\quad\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\frac{e^yy^2-e^y\cdot2y}{y^4}=\frac{xe^y(y-2)}{y^3}.$$

(2)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3^{-\frac{y}{x}}\cdot\frac{y}{x^2},\quad\frac{\partial z}{\partial y}=3^{-\frac{y}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right).$$

(3)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}\cos\frac{y}{x}+\sin\frac{x}{y}\cdot\left(-\sin\frac{y}{x}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right)=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\cos\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\cos\frac{y}{x}+\sin\frac{x}{y}\left(-\sin\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}.$$

(4)

(5)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{2y}{(x-y)^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\left(\frac{2x}{(x-y)^2}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

(6)

(7)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^z x^{y^z-1},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x^{y^z}\ln x\cdot zy^{z-1},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=x^{y^z}\ln x\cdot y^z\ln y=x^{y^z}y^z\ln x\ln y.$$

(8) □

9.2.3 设 $f(x,y)=\int_1^{x^2y}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, 求 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$.

解

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial(x^2y)}\cdot\frac{\partial(x^2y)}{\partial x}=\frac{\sin x^2y}{x^2y}\cdot 2xy=\frac{2\sin x^2y}{x},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial(x^2y)}\cdot\frac{\partial(x^2y)}{\partial y}=\frac{\sin x^2y}{x^2y}\cdot x^2=\frac{\sin x^2y}{y}.$$

□

9.2.4

9.2.5 证明函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 连续但偏导数不存在.

证明 显然, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}z(x,y)=0=z(0,0)$, 故 z 在 $(0,0)$ 处连续. 而

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x},$$

上述极限不存在, 故 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 不存在, 同理可得 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 不存在. □

9.2.6 求曲面 $z=\dfrac{x^2+y^2}{4}$ 与平面 $y=4$ 的交线在点 $(2,4,5)$ 处的切线与 Ox 轴的正向所成的角度.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2,4)=\frac{1}{2}x\,|_{x=2}=1,$$

故切线与 Ox 轴的正向所成的角度为 $\theta=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$. □

9.2.7

9.2.8

9.2.9

9.2.10

9.2.11

9.2.12

9.2.13 求下列函数的微分, 或在给定点的微分:

(1) $z=\ln(x^2+y^2)$;

(2) $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

(3) $u=\dfrac{s+t}{s-t}$;

(4) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$;

(5) $z=\sin(xy)$ 在点 $(0,0)$;

(6) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$ 在点 $(0,0),(1,1)$.

解 (1)

(2)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\Longrightarrow \mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x+\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y.$$

(3) (4) (5)

(6)

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)=0,\quad \frac{\partial z}{\partial x}(1,1)=\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)=-4$$
$$\Longrightarrow \mathrm{d}z(0,0)=0,\quad \mathrm{d}z(1,1)=-4(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y).$$

□

9.2.14

9.2.15 根据可微的定义证明, 函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在原点处不可微.

证明 用反证法. 假设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在原点处可微, 根据定义, $\exists A,B\in\mathbb{R}$, 使得

$$\sqrt{|hk|}=Ah+Bk+o(\sqrt{h^2+k^2}),\quad \rho=\sqrt{h^2+k^2}\to 0,$$

上式中令 $k=0 \implies 0=Ah+o(|h|)\ (h\to 0) \implies A=0$, 同理可得: $B=0$, 故

$$\sqrt{|hk|}=o(\sqrt{h^2+k^2}),\quad \rho=\sqrt{h^2+k^2}\to 0,$$

令 $h=k$, 得:

$$|h|=o(\sqrt{2}\,|h|),\quad \rho=\sqrt{2}\,|h|\to 0,$$

这显然是不成立的, 故矛盾, 从而假设不成立, 函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在原点处不可微. □

说明 事实上, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ 均存在, 故上述推出 $A=B=0$ 是自然的.

9.2.16 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 连续且偏导数存在, 但在此点不可微.

证明 记 $O(0,0), M(x,y)$.

对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 则当 $\rho(M,O)<\delta$ 时, 有

$$|f(x,y)|\leqslant\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant|x|\cdot\frac{|xy|}{2\,|xy|}=\frac{1}{2}\,|x|\leqslant\rho(M,O)<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$, 函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x-0}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

假设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在 $(0,0)$ 处可微, 则有

$$\frac{h^2k}{h^2+k^2}=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k+o(\sqrt{h^2+k^2})=o(\sqrt{h^2+k^2}),\quad \rho=\sqrt{h^2+k^2}\to 0,$$

令 $h=k$ 得:

$$\frac{1}{2}h=o(\sqrt{2}\,|h|),\quad h\to 0,$$

这显然是不成立的, 故矛盾, 从而假设不成立, 函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微. □

9.2.17 * 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 连续且偏导数存在, 但偏导数在点 $(0,0)$ 处不连续, 而 f 在原点 $(0,0)$ 可微.

证明 注意到,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0),$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

(1) 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{cases}$$

(2) 当 $(x,y)=(0,0)$ 时, 注意到,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{|x|}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{|x|}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{y^2\sin\frac{1}{|y|}}{y}=\lim_{y\to 0}y\sin\frac{1}{|y|}=0,$$

而 $\lim\limits_{(x,y)\to 0}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\lim\limits_{(x,y)\to 0}\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 均不存在, 故偏导数在点 $(0,0)$ 处不连续.

下证函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

往证: $\Delta f=(h^2+k^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}=o(\sqrt{h^2+k^2})$ $(\rho=\sqrt{h^2+k^2}\to 0)$.

事实上,

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{(h^2+k^2)\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{\rho\to 0}\rho\sin\frac{1}{\rho}=0,$$

故函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微. □

9.2.18

9.2.19

9.2.20

9.2.21

9.2.22 试求函数 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$ 在圆 $x^2+y^2-2x=0$ 上一点 $P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 处沿该圆周逆时针方向上的方向微商.

解 (1) 记 $\boldsymbol{e}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}-\frac{1}{2}\boldsymbol{j}$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{e}}\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\lim_{t\to0^+}\frac{\arctan\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}t}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}t}-\arctan\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{\arctan\left(\frac{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}t}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}t}-\sqrt{3}}{1+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}t}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}t}\cdot\sqrt{3}}\right)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\arctan\frac{t}{2-\sqrt{3}t}}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{t}{2-\sqrt{3}t}}{t}=\frac{1}{2}.$$

□

提示 (2) 运用梯度.

解 (2) 记 $\boldsymbol{e}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}-\frac{1}{2}\boldsymbol{j}$, 注意到,

$$\nabla z=\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)\implies\nabla z\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),$$

从而

$$\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{e}}\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\nabla z\cdot\boldsymbol{e}}{|\boldsymbol{e}|}=\frac{1}{2}.$$

□

9.2.23 求函数 $u=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$ 在点 $(1,1,-1)$ 的梯度和最大方向微商.

解 注意到,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y+3,\quad\frac{\partial u}{\partial y}=4y+x-2,\quad\frac{\partial u}{\partial z}=6z-6,$$

$$\implies\nabla u=(2x+y+3,4y+x-2,6z-6)\implies\nabla u(1,1,-1)=(6,3,-12),$$

记 $\boldsymbol{e}=\frac{(6,3,-12)}{|(6,3,-12)|}$, 则最大方向微商

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}}=|\nabla u(1,1,-1)|=|(6,3,-12)|=3\sqrt{21}.$$

□

9.2.24 设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},r=|\boldsymbol{r}|$, 试求:

(1) $\operatorname{grad}\frac{1}{r^2}$; (2) $\operatorname{grad}\ln r$.

解 (1) (1)

$$\nabla\frac{1}{r^2}=\nabla\frac{1}{x^2+y^2+z^2}=\left(-\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^2},-\frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^2},-\frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)$$
$$=\left(-\frac{2x}{r^4},-\frac{2y}{r^4},-\frac{2z}{r^4}\right)=-\frac{2}{r^4}\boldsymbol{r}$$

(2)

$$\begin{aligned}\nabla \ln r = \nabla \ln \sqrt{x^2+y^2+z^2} &= \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)\\ &= \left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right) = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}.\end{aligned}$$

□

提示 (2) 本题也可以在球坐标中考虑.

解 (2) 在球坐标中, 有

$$\nabla\frac{1}{r^2} = -2\frac{1}{r^3}\hat{r} = -\frac{2}{r^4}\boldsymbol{r}, \quad \nabla \ln r = \frac{1}{r}\hat{r} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}.$$

□

9.2.25

9.2.26

9.2.27

9.2.28

9.2.29 若 $u = F(x, y)$, F 任意二阶偏导存在, 而 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. 证明:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

证明 由链式法则得:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\phi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\phi,\\ \frac{\partial u}{\partial \phi} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \phi} = \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\phi) + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\phi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\phi\right)^2 + \left(-\frac{\partial u}{\partial x}\sin\phi + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\phi\right)^2\\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.\end{aligned}$$

□

9.2.30

9.2.31 试证: 方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos x-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2 x-\dfrac{\partial u}{\partial y}\sin x=0$ 经变换 $\xi=x-\sin x+y,\eta=x+\sin x-y$ 后变成 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$. (其中二阶偏导数均连续)

证明 由题意得:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}(1-\cos x)+\frac{\partial u}{\partial \eta}(1+\cos x),\\
\frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)(1-\cos x)+\frac{\partial u}{\partial \xi}\sin x\\
&\quad+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)(1+\cos x)+\frac{\partial u}{\partial \eta}(-\sin x)\\
&=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(1-\cos x)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}\sin^2 x+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(1+\cos x)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\sin x-\frac{\partial u}{\partial \eta}\sin x,\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial\xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}&=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}\right)(1-\cos x)+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial\xi}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)(1+\cos x)\\
&=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(1-\cos x)+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}\cos x-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(1+\cos x),
\end{aligned}
$$

将上述各式代入方程得:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(1-\cos x)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}\sin^2 x+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(1+\cos x)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\sin x-\frac{\partial u}{\partial \eta}\sin x\\
&+2\cos x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(1-\cos x)+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}\cos x-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(1+\cos x)\right)\\
&-\sin^2 x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)-\sin x\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}=0\\
&\Longrightarrow\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}=0.
\end{aligned}
$$

□

9.2.32 设变换 $\begin{cases}u=x-2y,\\ v=x+ay\end{cases}$ 可把方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 简化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$. 求常数 a. (其中二阶偏导数均连续)

解 由题意得:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}, \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -2\frac{\partial z}{\partial u} + a\frac{\partial z}{\partial v}, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= -2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\right) + a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) = -2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -2\left(-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + a\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\right) + a\left(-2\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) = 4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4a\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},
\end{aligned}$$

将上述各式代入方程得:

$$\begin{aligned}
&6\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \left(4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4a\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(6-2-4) + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}(12+a-2+4a) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}(6+a-a^2) \iff \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 10+5a \neq 0, \\ -a^2+a+6=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a \neq -2, \\ a = -2 \text{ or } 3 \end{cases} \Longrightarrow a = 3.$$

□

9.2.33 * 求方程 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$ 满足条件 $z(x, x^2) = 1$ 的解 $z = z(x, y)$.

解 由 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$ 积分得:

$$z(x,y) = x^2 y + y^2 + c(x),$$

代入 $z(x, x^2) = 1$ 得:

$$z(x,x^2) = x^4 + x^4 + c(x) = 1 \implies c(x) = -2x^4 + 1 \implies z(x,y) = -2x^4 + x^2 y + y^2 + 1.$$

□

参考 数学分析习题课讲义 19.3.**例题 19.3.3**.

9.2.34 设 $u = u(x, y)$, 当 $y = x^2$ 时有 $u = 1, \dfrac{\partial u}{\partial x} = x$, 求当 $y = x^2$ 时的 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

解 由题意得:

$$\begin{aligned}
u(t,t^2) = 1 &\implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial x}(t,t^2) + \frac{\partial u}{\partial y}(t,t^2) \cdot 2t = 0 \\
&\implies \frac{\partial u}{\partial x}(t,t^2) = t, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(t,t^2) = -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

故 $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x, x^2) = -\dfrac{1}{2}$. □

参考 数学分析习题课讲义 19.3.**例题 19.3.3**.

9.2.35 设 $u=u(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 以及条件 $u(x,2x)=x, u'_x(x,2x)=x^2$, 求 $u''_{xx}(x,2x), u''_{xy}(x,2x), u''_{yy}(x,2x)$. (其中二阶偏导数均连续)

解 由题意得:

$$\begin{cases} u(t,2t)=t, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,2t)=t^2 \end{cases} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial x}(t,2t)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial y}(t,2t)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial x}(t,2t)+2\frac{\partial u}{\partial y}(t,2t)=1$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(t,2t)=t^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}(t,2t)=\frac{1-t^2}{2}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)(t,2t)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,2t)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(t,2t)\cdot 2=2t, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)(t,2t)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}(t,2t)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,2t)\cdot 2=-t \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,2t)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,2t)=-\dfrac{4}{3}t, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(t,2t)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}(t,2t)=\dfrac{5}{3}t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,2x)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,2x)=-\dfrac{4}{3}x, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,2x)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}(x,2x)=\dfrac{5}{3}x. \end{cases}$$

□

9.2.36 求下列复合函数的微分 $\mathrm{d}u$:

(1) $u=f(t), t=x+y$;

(2) $u=f(\xi,\eta), \xi=xy, \eta=\dfrac{x}{y}$;

(3) $u=f(x,y,z), x=t, y=t^2, z=t^3$;

(4) $u=f(x,\xi,\eta), \xi=x^2+y^2, \eta=x^2+y^2+z^2$;

(5) $u=f(\xi,\eta,\zeta), \xi=x^2+y^2, \eta=x^2-y^2, \zeta=2xy$.

(1) (2) (3) (4)

(5)

解

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot 2x+\frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot 2x+\frac{\partial f}{\partial \zeta}\cdot 2y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot 2y+\frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot(-2y)+\frac{\partial f}{\partial \zeta}\cdot 2x,$$

$$\Longrightarrow \mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y=2\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}x+\frac{\partial f}{\partial \eta}x+\frac{\partial f}{\partial \zeta}y\right)\mathrm{d}x+2\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}y-\frac{\partial f}{\partial \eta}y+\frac{\partial f}{\partial \zeta}x\right)\mathrm{d}y.$$

□

9.2.37

9.2.38 求直角坐标和极坐标的坐标变换 $x=x(r,\theta)=r\cos\theta, y=y(r,\theta)=r\sin\theta$ 的 Jacobi 行列式.

解

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\cos\theta\cdot r\cos\theta-\sin\theta\cdot r(-\sin\theta)=r.$$

□

9.3 隐函数定理和逆映射定理

9.3.1 证明下列方程在指定点的附近对 y 有唯一解, 并求出 y 对 x 在该点处的一阶和二阶导数.

(1) $x^2+xy+y^2=7$, 在 $(2,1)$ 处; (2) $x\cos xy=0$, 在 $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ 处.

证明 (1) 记 $F(x,y)=x^2+xy+y^2-7$, 显然 $F(2,1)=0$, 且

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x+y,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2y+x,$$

在 $(2,1)$ 附近连续, 且满足 $\frac{\partial F}{\partial y}(2,1)=4\neq 0$, 由隐函数定理知, 在 $(2,1)$ 附近, 对 $\forall x$, 存在唯一的解 $y=f(x)$, 使得 $F(x,y)=0$, 且有

$$\begin{aligned} y'=-\frac{2x+y}{2y+x}&\implies y'(2,1)=-\frac{5}{4},\\ \implies y''=-\frac{(2+y')(2y+x)-(2x+y)(2y'+1)}{(2y+x)^2}&\implies y''(2,1)=-\frac{21}{32}.\end{aligned}$$

其中在求 y'' 时已再次用到 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 附近可导. □

说明 对于 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 附近的二阶导数, 也可以再次利用隐函数定理:

另证 记 $G(x,y,y')=2x+y+xy'+2yy'$ (此式由 $F(x,y)=0$ 两边对 x 求导而得), 由上易知 $G\left(2,1,-\frac{5}{4}\right)=0$, 且

$$\frac{\partial G}{\partial x}=2+y',\quad \frac{\partial G}{\partial y}=1+2y',\quad \frac{\partial G}{\partial y'}=x+2y,$$

在 $\left(2,1,-\frac{5}{4}\right)$ 附近连续, 且 $\frac{\partial G}{\partial y'}(2,1)=4\neq 0$, 由隐函数定理知, 在 $\left(2,1,-\frac{5}{4}\right)$ 附近, 对 $\forall(x,y)$, 存在唯一的解 $y'=y'(x,y)$, 使得 $G(x,y,y')=0$, 且有

$$\begin{aligned} &\frac{\partial y'}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y'}}=-\frac{2+y'}{x+2y},\quad \frac{\partial y'}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial y'}}=-\frac{1+2y'}{x+2y},\\ \implies y''=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=-\frac{2+y'}{x+2y}+\frac{1+2y'}{x+2y}\frac{2x+y}{2y+x}\implies y''(2,1)=-\frac{21}{32}.\end{aligned}$$

□

(2)

9.3.2 求由下列方程所确定的隐函数的导数.

(1) $\sin xy - \mathrm{e}^{xy} - x^2y = 0$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$;

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7) $F(xz, yz) = 0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 (1) 等式两边对 x 求导得:

$$\cos xy \cdot (y + xy') - \mathrm{e}^{xy} \cdot (y + xy') - (2xy + x^2y') = 0 \implies y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y(-\cos xy + \mathrm{e}^{xy} + 2x)}{x(\cos xy - \mathrm{e}^{xy} - x)}.$$

(2) (3) (4) (5) (6)

(7) 记 $\xi = xz, \eta = yz$, 则有

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \xi}z, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \eta}z, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial \xi}x + \frac{\partial F}{\partial \eta}y$$

$$\implies \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial \xi}z}{\dfrac{\partial F}{\partial \xi}x + \dfrac{\partial F}{\partial \eta}y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial \eta}z}{\dfrac{\partial F}{\partial \xi}x + \dfrac{\partial F}{\partial \eta}y}.$$

□

9.3.3 * 找出满足方程 $x^2 + xy + y^2 = 27$ 的函数 $y = y(x)$ 的极大值与极小值.

解 记 $F(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 27$, 对 $\forall (x_0, y_0)$ 满足 $F(x_0, y_0) = 0$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x + 2y$$

在 (x_0, y_0) 附近连续, 若 $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = x_0 + 2y_0 = 0 \implies (x_0, y_0) = (-6, 3)$ or $(6, -3)$, 当 $(x_0, y_0) \neq (-6, 3)$ 且 $(x_0, y_0) \neq (6, -3)$ 时, 由隐函数定理知, 在 (x_0, y_0) 附近, 对 $\forall x$, 存在唯一的解 $y = f(x)$, 使得 $F(x,y) = 0$, 且有

$$y' = f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{2x + y}{x + 2y}, \quad y'' = -\frac{(2 + y')(x + 2y) - (2x + y)(1 + 2y')}{(x + 2y)^2},$$

令 $y' = 0$, 得:

$$\begin{cases} 2x + y = 0, \\ x^2 + xy + y^2 = 27 \end{cases} \implies (x, y) = (3, -6) \text{ or } (-3, 6) \implies y''(3) = \frac{2}{9} > 0, y''(-3) = -\frac{2}{9} < 0,$$

故 $y(3) = -6$ 对应 $y = y(x)$ 的极小值, $y(-3) = 6$ 对应 $y = y(x)$ 的极大值. □

9.3.4

9.3.5

9.3.6

9.3.7 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\varphi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的隐函数, 试证: 不论 φ 为怎样的可微函数, 都有 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$.

证明 记 $\xi=cx-az,\eta=cy-bz$, 对 $\varphi(cx-az,cy-bz)=0$ 两边求微分, 得:

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z=\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\cdot c\,\mathrm{d}x+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\cdot c\,\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(-a)+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(-b)\right)\mathrm{d}z=0$$

$$\Longrightarrow \mathrm{d}z=\frac{c\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}}{a\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+b\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}}\mathrm{d}x+\frac{c\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}}{a\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+b\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}}\mathrm{d}y=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{c\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}}{a\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+b\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}}{a\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+b\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}}$$

$$\Longrightarrow a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c.$$

□

9.3.8 设 $z=x^2+y^2$, 其中 $y=y(x)$ 为由方程 $x^2-xy+y^2=1$ 所定义的函数, 求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 及 $\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}$.

解 记 $F(x,y)=x^2-xy+y^2-1$, 对 $\forall(x_0,y_0)$ 满足 $F(x_0,y_0)=0$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x-y,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=-x+2y$$

在 (x_0,y_0) 附近连续, 当 $(x_0,y_0)\neq\left(\pm\frac{2\sqrt{3}}{3},\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 时, 在 (x_0,y_0) 附近有 $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$, 由隐函数定理知, 在 (x_0,y_0) 附近, 对 $\forall x$, 存在唯一的解 $y=y(x)$, 使得 $F(x,y)=0$, 且有

$$y'(x)=-\frac{2x-y}{-x+2y},\quad y''(x)=\frac{(2-y')(x-2y)-(2x-y)(1-2y')}{(x-2y)^2}=\frac{-3y+3xy'}{(x-2y)^2}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}&=2x+2yy'=2x+2y\frac{2x-y}{x-2y}=\frac{2(x^2-y^2)}{x-2y},\\ \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}&=2+2(y'^2+yy'')=2\left(1+\left(\frac{2x-y}{x-2y}\right)^2+\frac{6y(x^2-xy+y^2)}{(x-2y)^3}\right)\\ &=2\left(1+\left(\frac{2x-y}{x-2y}\right)^2+\frac{6y}{(x-2y)^3}\right),\end{aligned}$$

其中 $y=y(x)$ 为由方程 $x^2-xy+y^2=1$ 所定义的函数. □

9.3.9

9.3.10

9.3.11 设 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 是由下列方程组所确定的隐函数组, 求 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

(1) $\begin{cases} u^2+v^2+x^2+y^2=1, \\ u+v+x+y=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} xu-yv=0, \\ yu+xv=1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} u=f(ux,v+y), \\ v=g(u-x,v^2y). \end{cases}$

解 (1)

(2) 两式分别对 x,y 求偏导, 得:

$$\begin{cases} u+x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial v}{\partial x}=0, & x\dfrac{\partial u}{\partial y}-v-y\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \\ y\dfrac{\partial u}{\partial x}+v+x\dfrac{\partial v}{\partial x}=0, & u+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+x\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{ux+vy}{x^2+y^2}, & \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{vx-uy}{x^2+y^2}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{uy-vx}{x^2+y^2}, & \dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{ux+vy}{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}=\left(\frac{ux+vy}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{vx-uy}{x^2+y^2}\right)^2=\frac{(ux+vy)^2+(vx-uy)^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

(3) 记 $\xi=ux,\eta=v+y,\varphi=u-x,\psi=v^2y$, 两式分别对 x,y 求偏导, 得:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial \xi}\cdot\left(u+x\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial f}{\partial \eta}\dfrac{\partial v}{\partial x}, & \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial \xi}\cdot x\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial \eta}\cdot\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}+1\right), \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial g}{\partial \varphi}\cdot\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-1\right)+\dfrac{\partial g}{\partial \psi}\cdot 2yv\dfrac{\partial v}{\partial x}, & \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial \varphi}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial \psi}\cdot\left(2vy\dfrac{\partial v}{\partial y}+v^2\right) \end{cases}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1' & c_1' \\ a_2' & c_2' \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} c_1' & b_1' \\ c_2' & b_2' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2' & b_2' \end{vmatrix}},$$

其中,

$$\begin{cases} a_1=x\dfrac{\partial f}{\partial \xi}-1, & b_1=\dfrac{\partial f}{\partial \eta}, & c_1=-u\dfrac{\partial f}{\partial \xi}, \\ a_2=\dfrac{\partial g}{\partial \varphi}, & b_2=2yv\dfrac{\partial g}{\partial \psi}-1, & c_2=\dfrac{\partial g}{\partial \varphi}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1'=x\dfrac{\partial f}{\partial \xi}-1, & b_1'=\dfrac{\partial f}{\partial \eta}, & c_1'=-\dfrac{\partial f}{\partial \eta}, \\ a_2'=\dfrac{\partial g}{\partial \varphi}, & b_2'=2vy\dfrac{\partial g}{\partial \psi}-1, & c_2'=-v^2\dfrac{\partial g}{\partial \psi}. \end{cases}$$

□

9.3.12

9.3.13 设 $u=f(x,y,z),\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0,y=\sin x$, 其中 f,φ 都具有一阶连续偏导数, 且 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\neq 0$. 求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解 记 $\xi = x^2, \eta = \mathrm{e}^y, \zeta = z$, 在 $\varphi(x^2, \mathrm{e}^y, z) = 0$ 两边对 x 求偏导, 得:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \cdot 2x + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \cdot \mathrm{e}^{\sin x} \cos x + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi} \cdot 2x + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta} \cdot \mathrm{e}^{\sin x} \cos x}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \zeta}} \\ \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos x + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \left(-\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi} \cdot 2x + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta} \cdot \mathrm{e}^{\sin x} \cos x}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \zeta}} \right).\end{aligned}$$

□

9.3.14

9.3.15

9.3.16 函数 $u = u(x, y)$ 由方程组 $u = f(x, y, z, t), g(y, z, t) = 0, h(z, t) = 0$ 定义, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

解 注意到,

$$\begin{aligned}h(z, t) = 0 \implies t = t(z), \\ g(y, z, t) = 0 \implies y = y_1(z, t) = y_1(z, t(z)) = y(z) \implies z = z(y)\end{aligned}$$

$h(z, t) = 0$ 两边对 z 求偏导得:

$$\frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z} = 0 \implies \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z} = -\frac{\dfrac{\partial h}{\partial z}}{\dfrac{\partial h}{\partial t}},$$

$g(y, z, t) = 0$ 两边对 y 求偏导得:

$$\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} + \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = 0 \implies \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial y}}{\dfrac{\partial g}{\partial z} + \dfrac{\partial g}{\partial t} \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z}},$$

$u=f(x,y,z,t)$ 两边对 x 求偏导得:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial x},\\
\frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\\
&=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\left(-\frac{\dfrac{\partial g}{\partial y}}{\dfrac{\partial g}{\partial z}+\dfrac{\partial g}{\partial t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z}}\right)+\frac{\partial f}{\partial t}\left(-\frac{\dfrac{\partial h}{\partial z}}{\dfrac{\partial h}{\partial t}}\right)\left(-\frac{\dfrac{\partial g}{\partial y}}{\dfrac{\partial g}{\partial z}+\dfrac{\partial g}{\partial t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z}}\right)\\
&=\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\dfrac{\partial g}{\partial y}}{\dfrac{\partial g}{\partial z}+\dfrac{\partial g}{\partial t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z}}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\dfrac{\partial h}{\partial z}}{\dfrac{\partial h}{\partial t}}\frac{\dfrac{\partial g}{\partial y}}{\dfrac{\partial g}{\partial z}+\dfrac{\partial g}{\partial t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z}}\\
&=\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

□

参考 数学分析习题课讲义 20.2.**例 20.2.2**.

9.4 空间曲线与曲面

9.4.1

9.4.2

9.4.3

9.4.4

9.4.5 求下列曲线的切线与法平面方程.

(1) $x=a\sin^2 t, y=b\sin t\cos t, z=c\cos^2 t$, 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$;

(2) $x=t-\cos t, y=3+\sin^2 t, z=1+\cos 3t$, 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$.

解 (1) 记 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, 则

$$\boldsymbol{r}'(t)=(a\sin 2t, b\cos 2t, -c\sin 2t),$$

则有

$$\boldsymbol{r}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}b,\frac{1}{2}c\right),\quad \boldsymbol{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right)=(a,0,-c),$$

故切线的方程为 (显然 a,c 不可能同时为 0)

$$\begin{cases}-c\left(x-\dfrac{1}{2}a\right)=a\left(z-\dfrac{1}{2}c\right),\\ y=\dfrac{1}{2}b,\end{cases}$$

法平面的方程为

$$a\left(x-\frac{1}{2}a\right)-c\left(z-\frac{1}{2}c\right)=0 \implies ax-cz-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}c^2=0.$$

(2) □

9.4.6 求下列曲面在所示点处的切平面与法线方程.

(1) $x=u\cos v, y=u\sin v, z=av$, 在 (u_0,v_0);

(2) $x=a\sin\theta\cos\varphi, y=b\sin\theta\sin\varphi, z=c\cos\theta$, 在 (θ_0,φ_0).

解 (1) 记 $\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$, 则有

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}=(\cos v,\sin v,0),\quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}=(-u\sin v,u\cos v,a),$$

从而平面的法向量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}&=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u_0,v_0)\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u_0,v_0)\\&=(\cos v_0,\sin v_0,0)\times(-u_0\sin v_0,u_0\cos v_0,a)\\&=(a\sin v_0,-a\cos v_0,u_0),\end{aligned}$$

而 $\boldsymbol{r}(u_0,v_0)=(u_0\cos v_0,u_0\sin v_0,av_0)$, 故切平面方程为

$$a\sin v_0(x-u_0\cos v_0)-a\cos v_0(y-u_0\sin v_0)+u_0(z-av_0)=0,$$

法线方程为

$$\frac{x-u_0\cos v_0}{a\sin v_0}=\frac{y-u_0\sin v_0}{-a\cos v_0}=\frac{z-av_0}{u_0}.$$

下面对一些特殊情况进行讨论. 不妨假定 $a\neq 0$, 否则对应的曲面为 $z=0$, 结论平凡.

1° 若 $u_0=0$, 则 $\boldsymbol{r}(u,v)=(0,0,av)$, 法线方程为

$$x=y=0;$$

2° 若 $u_0\neq 0$ 且 $\sin v_0=0$, 则法线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{y}{-a\cos v_0}=\dfrac{z-av_0}{u_0},\\ x=u_0\cos v_0;\end{cases}$$

3° 若 $u_0\neq 0$ 且 $\cos v_0=0$, 则法线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a\sin v_0}=\dfrac{z-av_0}{u_0},\\ y=u_0\sin v_0.\end{cases}$$

(2) □

9.4.7 设两条隐式曲线 $F(x,y)=0$ 与 $G(x,y)=0$ 在一点 (x_0,y_0) 相交, 求在交点处两条隐式曲线切线的夹角. 这里 $F(x,y),G(x,y)$ 具有连续的偏导函数.

解 设 $F(x,y)=0,G(x,y)=0$ 在 (x_0,y_0) 处的切向量分别为 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$, 夹角为 $\theta\in[0,\pi]$.

由于 $F,G\in C^1(D)$, 从而

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2>0,\quad \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2>0,$$

不妨设 $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0),\dfrac{\partial G}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$, 由隐函数定理得:

$$\boldsymbol{u}=\left(1,-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}\right),\quad \boldsymbol{v}=\left(1,-\frac{\dfrac{\partial G}{\partial x}(x_0,y_0)}{\dfrac{\partial G}{\partial y}(x_0,y_0)}\right),$$

$$\Longrightarrow \cos\theta=\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|}=\frac{1+\left(\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}\right)\left(\dfrac{\dfrac{\partial G}{\partial x}(x_0,y_0)}{\dfrac{\partial G}{\partial y}(x_0,y_0)}\right)}{\sqrt{\left(1+\left(\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}\right)^2\right)\left(1+\left(\dfrac{\dfrac{\partial G}{\partial x}(x_0,y_0)}{\dfrac{\partial G}{\partial y}(x_0,y_0)}\right)^2\right)}}.$$

若 $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=0$, 则有

$$\boldsymbol{u}=\left(-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial x}},1\right),$$

同理可得相应的结果. □

9.4.8 求下列曲面在指定点的切平面和法线方程.

(1) $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$, 在点 $(3,4,-7)$;

(2) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$, 在点 $\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(3) $\mathrm{e}^z-z+xy=3$, 在点 $(2,1,0)$;

(4) $4+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x+y+z$, 在点 $(2,3,6)$.

解 (1) 记 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, 则有

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}(3,4,-7)=\left(1,0,\frac{\partial z}{\partial x}(3,4)\right)=\left(1,0,-\frac{17}{5}\right),$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}(3,4,-7)=\left(0,1,\frac{\partial z}{\partial y}(3,4)\right)=\left(0,1,-\frac{11}{5}\right),$$

故切平面的法向量

$$\boldsymbol{n}_0=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}(3,4,-7)\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}(3,4,-7)=\left(\frac{17}{5},\frac{11}{5},1\right),$$

取 $\boldsymbol{n} = 5\boldsymbol{n}_0 = (17, 11, 5)$, 故切平面方程为

$$17(x-3) + 11(y-4) + 5(z+7) = 0 \iff 17x + 11y + 5z - 60 = 0,$$

法线方程为

$$\frac{x-3}{17} = \frac{y-4}{11} = \frac{z+7}{5}.$$

(2)

(3) 记 $F(x,y,z) = \mathrm{e}^z - z + xy - 3$, 则曲面在 $(2,1,0)$ 处的法向量

$$\boldsymbol{n} = \nabla F = (y, x, \mathrm{e}^z - 1) = (1, 2, 0),$$

故切平面方程为

$$(x-2) + 2(y-1) = 0 \iff x + 2y - 4 = 0,$$

法线方程为

$$\begin{cases} x - 2 = \dfrac{y-1}{2}, \\ z = 0. \end{cases}$$

(4) □

9.4.9 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上平行于平面 $x - y + 2z = 0$ 的切平面方程.

解 记 $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1$, 则椭球面在任一点处的法向量

$$\boldsymbol{n} = \nabla F = (2x, 4y, 2z),$$

平面 $x - y + 2z = 0$ 的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1 = (1, -1, 2),$$

令 $\boldsymbol{n} = \lambda \boldsymbol{n}_1$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, 得:

$$(x,y,z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}, -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{11}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\right), \quad \boldsymbol{n} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}, \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\right),$$

或

$$(x,y,z) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{11}}, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\right), \quad \boldsymbol{n} = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}, -\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\right),$$

故切平面方程为

$$\left(x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\right) - \left(y + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{11}}\right) + 2\left(z - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\right) = 0 \iff x - y + 2z - \frac{\sqrt{22}}{2} = 0.$$

或

$$-\left(x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\right) + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{11}}\right) - 2\left(z + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\right) = 0 \iff x - y + 2z + \frac{\sqrt{22}}{2} = 0.$$

□

9.4.10

9.4.11

9.4.12 设直线 $l:\begin{cases}x+y+b=0,\\x+ay-z-3=0\end{cases}$ 在平面 π 上, 而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$, 求 a,b 之值.

解 记 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z$, 则曲面在 $(1,-2,5)$ 的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\nabla F=(2x,2y,-1)=(2,-4,-1),$$

对应切平面方程为

$$2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0 \iff 2x-4y-z-5=0,$$

直线 $\begin{cases}x+y+b=0,\\x+ay-z-3=0\end{cases}$ 上任一点 $(-t-b,t,(a-1)t-b-3)$ $(t\in\mathbb{R})$ 在平面 $2x-4y-z-5=0$ 上

$$\Longrightarrow\ 2(-t-b)-4t-((a-1)t-b-3)-5=0,\quad \forall t\in\mathbb{R},$$
$$(-a-5)t-b-2=0 \Longrightarrow a=-5,\quad b=-2.$$

□

9.4.13 试证曲面 $x^2+y^2+z^2=ax$ 与曲面 $x^2+y^2+z^2=by$ 互相正交.

证明 记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-ax, G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-by$, 则两曲面的法向量分别为

$$\boldsymbol{n}_1=\nabla F=(2x-a,2y,2z),\quad \boldsymbol{n}_2=\nabla G=(2x,2y-b,2z)$$
$$\Longrightarrow\ \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=2x(2x-a)+2y(2y-b)+4z^2=4(x^2+y^2+z^2)-2ax-2by=0,$$

其中已用到 (x,y,z) 同时在曲面 $F(x,y,z)=0, G(x,y,z)=0$ 上.

故两曲面互相正交. □

9.4.14

9.4.15 证明曲面 $z=x\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$ 的每一切平面都通过原点.

证明 记 $F(x,y,z)=x\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}-z$, 则曲面在 (x,y,z) 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\nabla F=\left(\left(1+\frac{x}{y}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{y}},-\frac{x^2}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}},-1\right),$$

切平面方程为

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}(X-x)-\frac{x^2}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}(Y-y)-(Z-z)=0,$$

注意到 $(X,Y,Z)=(0,0,0)$ 始终在上述平面上, 故曲面的每一个切平面都通过原点. □

9.4.16

9.4.17

9.4.18　设方程组 $\begin{cases} pu+qv-t^2=0, \\ qu+pv-s^2=0 \end{cases}$ $(p^2-q^2\neq 0)$ 确定了隐函数 $\begin{cases} u=u(s,t), \\ v=v(s,t) \end{cases}$ 以及反函数 $\begin{cases} s=s(u,v), \\ t=t(u,v). \end{cases}$ 求证:

$$\frac{\partial t}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial s}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{p^2}{p^2-q^2}.$$

证明　方程分别对 u,v 求偏导, 得:

$$\begin{cases} p-2t\dfrac{\partial t}{\partial u}=0, & q-2t\dfrac{\partial t}{\partial v}=0, \\ q-2s\dfrac{\partial s}{\partial u}=0, & p-2s\dfrac{\partial s}{\partial v}=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial t}{\partial u}=\dfrac{p}{2t}, & \dfrac{\partial t}{\partial v}=\dfrac{q}{2t}, \\ \dfrac{\partial s}{\partial u}=\dfrac{q}{2s}, & \dfrac{\partial s}{\partial v}=\dfrac{p}{2s}, \end{cases}$$

方程分别对 s,t 求偏导, 得:

$$\begin{cases} p\dfrac{\partial u}{\partial s}+q\dfrac{\partial v}{\partial s}=0, & p\dfrac{\partial u}{\partial t}+q\dfrac{\partial v}{\partial t}-2t=0, \\ q\dfrac{\partial u}{\partial s}+p\dfrac{\partial v}{\partial s}-2s=0, & q\dfrac{\partial u}{\partial t}+p\dfrac{\partial v}{\partial t}=0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial s}=-\dfrac{2qs}{p^2-q^2}, & \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{2pt}{p^2-q^2}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial s}=\dfrac{2ps}{p^2-q^2}, & \dfrac{\partial v}{\partial t}=-\dfrac{2qt}{p^2-q^2}. \end{cases}$$

从而立即得到:

$$\frac{\partial t}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial s}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{p^2}{p^2-q^2}.$$

□

9.5　多变量函数的 Taylor 公式与极值

9.5.1　求曲线 $F(t)=f(x+th,y+tk)$ 在 $t=1$ 处的斜率, 其中

(1) $f(x,y)=\sin(x^2+y)$;　　(2) $f(x,y)=x^2+2xy^2-y^4$.

解　(1)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial f}{\partial x}(x+th,y+tk)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x+th,y+tk)k \\ &=2(x+th)h\cos((x+th)^2+y+tk)+k\cos((x+th)^2+y+tk)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=2(x+h)h\cos((x+h)^2+y+k)+k\cos((x+h)^2+y+k).$$

(2)

□

9.5.2

9.5.3 对于函数 $f(x,y)=\sin\pi x+\cos\pi y$, 用中值定理证明, 存在一个数 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$\frac{4}{\pi}=\cos\frac{\pi\theta}{2}+\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-\theta)\right].$$

分析 由中值定理知, 对 $\forall(x,y),(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, $\exists\theta\in(0,1)$, 使得

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(x_0,y_0)&=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y\\&=\pi\Delta x\cos\pi(x_0+\theta\Delta x)-\pi\Delta y\sin\pi(y_0+\theta\Delta y),\end{aligned}$$

其中 $\Delta x=x-x_0,\Delta y=y-y_0$.

往求适当的 $x_0,y_0,\Delta x,\Delta y$, 使得

$$\cos\pi(x_0+\theta\Delta x)=\cos\frac{\pi\theta}{2},\quad \sin\left[\frac{\pi}{2}(1-\theta)\right]=-\sin\left[\frac{\pi}{2}(\theta-1)\right]=-\sin\pi(y_0+\theta\Delta y),$$

不难发现, 取 $x_0=0,\Delta x=\dfrac{1}{2},y_0=-\dfrac{1}{2},\Delta y=\dfrac{1}{2}$ 满足上述条件.

证明 取 $(x_0,y_0)=\left(0,-\dfrac{1}{2}\right),(x,y)=\left(\dfrac{1}{2},0\right)$, 由中值定理知, $\exists\theta\in(0,1)$, 使得

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{2},0\right)-f\left(0,-\frac{1}{2}\right)&=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\theta}{2},\frac{1}{2}(\theta-1)\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\theta}{2},\frac{1}{2}(\theta-1)\right)\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\sin\left[\frac{\pi}{2}(\theta-1)\right]=\frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{\pi\theta}{2}+\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-\theta)\right)\right)\\&\Longrightarrow\frac{4}{\pi}=\cos\frac{\pi\theta}{2}+\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-\theta)\right).\end{aligned}$$

□

9.5.4 求下列函数的 Taylor 公式, 并指出展开式成立的区域.

(1) $f(x,y)=\mathrm{e}^x\ln(1+y)$ 在点 $(0,0)$, 直到三阶为止;

(2) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 在点 $(0,0)$, 直到四阶为止;

(3) $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x-y+xy}$ 在点 $(0,0)$, 直到 n 阶为止;

(4) $f(x,y)=\arctan\dfrac{1+x+y}{1-x+y}$ 在点 $(0,0)$, 直到二阶为止;

(5) $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$ 在点 $(0,0)$, 直到 n 阶为止;

(6) $f(x,y)=\dfrac{\cos x}{\cos y}$ 在点 $(0,0)$, 直到二阶为止;

(7) $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ 在点 $(1,-2)$, 直到 n 阶为止.

解 (1) 注意到,

$$\frac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i\partial y^j}=\mathrm{e}^x(-1)^{j-1}(j-1)!(1+y)^{-j}\Longrightarrow\frac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i\partial y^j}(0,0)=(-1)^{j-1}(j-1)!,\quad i\in\mathbb{N},j\in\mathbb{N}^*,$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}=\mathrm{e}^x\ln(1+y)\Longrightarrow\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(0,0)=0,\quad k\in\mathbb{N}^*,$$

故

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(0,0) + y + \frac{1}{2}(2xy - y^2) \\
&\quad + \frac{1}{3!}\left(\binom{3}{2,1}x^2y + \binom{3}{1,2}(-1)xy^2 + \binom{3}{0,3}2y^3\right) + o((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}), \quad (x,y)\to(0,0) \\
&= y + \frac{1}{2}(2xy - y^2) + \frac{1}{6}(3x^2y - 3xy^2 + 2y^3) + o((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}), \quad (x,y)\to(0,0)
\end{aligned}$$

上式成立的区域是 $1 + y > 0 \implies D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \big| y > -1\}$.

(2)

(3) 注意到,

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{1}{(1-x)(1-y)} \\
\implies \frac{\partial^k f}{\partial x^k} = (1-y)^{-1}\cdot k!(1-x)^{-(k+1)}, &\quad \frac{\partial^k f}{\partial y^k} = (1-x)^{-1}\cdot k!(1-y)^{-(k+1)}, \quad k\in\mathbb{N}^*, \\
\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} &= i!j!(1-x)^{-(i+1)}(1-y)^{-(j+1)}, \quad i,j\in\mathbb{N}^*, \\
\implies \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(0,0) = \frac{\partial^k f}{\partial y^k}(0,0) = k!, &\quad \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(0,0) = i!j!, \quad i,j,k\in\mathbb{N}^*,
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\sum_{i+j=k}\frac{k!}{i!j!}\frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^j}(0,0)x^iy^j\right) + o((x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} x^iy^{k-i} + o((x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}), \quad (x,y)\to(0,0)
\end{aligned}$$

上式成立的区域是 $(1-x)(1-y)\neq 0 \implies D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \big| x\neq 1 \text{ and } y\neq 1\}$.

(4)

(5) 注意到,

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} + o(x^n), \quad x\to 0,$$

将 (x^2+y^2) 代入 x 得:

$$\begin{aligned}
\sin(x^2+y^2) &= \sum_{k=1}^{\left[\frac{n+2}{4}\right]}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}(x^2+y^2)^{2k-1} + o((x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}), \quad (x,y)\to(0,0), \\
&= \sum_{k=1}^{\left[\frac{n+2}{4}\right]}(-1)^{k-1}\left(\sum_{\substack{i+j=2k-1\\ i,j\in\mathbb{N}}}\frac{1}{i!j!}x^{2i}y^{2j}\right) + o((x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}), \quad (x,y)\to(0,0).
\end{aligned}$$

(6) 注意到,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\sin x}{\cos y},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\cos x\sin y}{\cos^2 y}\implies \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{\cos x}{\cos y}\implies \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=-1,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-\frac{\sin x\sin y}{\cos^2 y}\implies \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\cos x\cdot\frac{\cos^3 y-\sin y\cdot 2\cos y(-\sin y)}{\cos^4 y}\implies \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=1,$$

故

$$f(x,y)=1+\frac{1}{2}(-x^2+y^2)+o(x^2+y^2),\quad (x,y)\to(0,0)$$

上式成立的区域是

$$\cos y\neq 0\implies y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\implies D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\right\}.$$

(7) 注意到,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x-y-6,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-x-2y-3\implies \frac{\partial f}{\partial x}(1,-2)=\frac{\partial f}{\partial y}(1,-2)=0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-1,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2,$$
$$\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i\partial y^j}=0,\quad i,j\in\mathbb{N}^*,i+j\geqslant 3,$$

故

$$f(x,y)=5+\frac{1}{2}(4(x-1)^2-2(x-1)(y+2)-2(y+2)^2)+o((x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}).$$

□

9.5.5 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z^3-2xz+y=0$ 所确定的隐函数, 当 $x=1,y=1$ 时, $z=1$, 试按 $(x-1)$ 和 $(y-1)$ 的乘幂展开函数 z 至二次项为止.

解 记 $F(x,y,z)=z^3-2xz+y$, 显然, $F(1,1,1)=0$, 又

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-2z,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=3z^2-2x$$

在 $(1,1,1)$ 附近连续, 且 $\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)=1\neq 0$, 由隐函数定理知, $F(x,y,z)=0$ 在 $(1,1,1)$ 附近

确定了隐函数 $z=z(x,y)$, 且有

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{2z}{3z^2-2x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{1}{3z^2-2x},\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2\frac{\partial z}{\partial x}(3z^2-2x)-2z(6z\frac{\partial z}{\partial x}-2)}{(3z^2-2x)^2}=\frac{(-6z^2-4x)\frac{\partial z}{\partial x}+4z}{(3z^2-2x)^2},\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{6z\frac{\partial z}{\partial x}-2}{(3z^2-2x)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{6z\frac{\partial z}{\partial y}}{3z^2-2x},\\
\Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1,1,1)=2,\quad \frac{\partial z}{\partial y}(1,1,1)=-1,\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,1,1)=-16,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1,1)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(1,1,1)=10,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-6,
\end{gathered}
$$

故

$$
z(x,y)=1+2(x-1)-(y-1)-8(x-1)^2+10(x-1)(y-1)-3(y-1)^2+o(x^2+y^2),\quad (x,y)\to(1,1).
$$

□

9.5.6

9.5.7 求下列函数的极值.

(1) $f(x,y)=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}\ (x>0,y>0)$;

(2) $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$;

(3) $f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(x+2y+y^2)$;

(4) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, 求隐函数 $y=y(x)$ 的极值;

(5) $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$, 求隐函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

解 (1)

(2) 令

$$
\frac{\partial f}{\partial x}=4-2x=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-4-2y=0 \Longrightarrow (x,y)=(2,-2).
$$

此时

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,-2)=-2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(2,-2)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(2,-2)=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2,\\
\Longrightarrow \boldsymbol{A}=Hf(2,-2)=\begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\end{pmatrix} \Longrightarrow |\boldsymbol{A}|=4>0,\quad a_{11}=-2<0,
\end{gathered}
$$

故 $\boldsymbol{A}$ 是负定方阵, $f(x,y)$ 在 $(x,y)=(2,-2)$ 处有极大值 $f(2,-2)=8$.

(3) 令

$$
\frac{\partial f}{\partial x}=\mathrm{e}^{2x}(2(x+2y+y^2)+1)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\mathrm{e}^{2x}(2+2y)=0 \Longrightarrow (x,y)=\left(\frac{1}{2},-1\right).
$$

此时

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\mathrm{e}^{2x}(2(2(x+2y+y^2)+1)+2),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=4(1+y)\mathrm{e}^{2x},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\mathrm{e}^{2x}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2},-1\right)=2\mathrm{e},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{1}{2},-1\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(\frac{1}{2},-1\right)=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{2},-1\right)=2\mathrm{e},$$
$$\Longrightarrow \boldsymbol{A}=Hf\left(\frac{1}{2},-1\right)=\begin{pmatrix}2\mathrm{e} & 0\\ 0 & 2\mathrm{e}\end{pmatrix}\Longrightarrow |\boldsymbol{A}|=4\mathrm{e}^2>0,\quad a_{11}=2\mathrm{e}>0,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 是正定方阵, $f(x,y)$ 在 $(x,y)=\left(\frac{1}{2},-1\right)$ 处有极小值 $f\left(\frac{1}{2},-1\right)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}$.

(4) 记 $F(x,y)=(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)$, 显然, 当隐函数 $y=y(x)$ 存在时, $a\neq 0$, 且有

$$\frac{\partial F}{\partial x}=4x(x^2+y^2)-2a^2x,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=4y(x^2+y^2)+2a^2y$$
$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{4x(x^2+y^2)-2a^2x}{4y(x^2+y^2)+2a^2y},$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{(12x^2+4y^2-2a^2)(4y(x^2+y^2)+2a^2y)-(4x(x^2+y^2)-2a^2x)(8yx)}{(4y(x^2+y^2)+2a^2y)^2},$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0\\ F(x,y)=0\end{cases}\Longrightarrow (x,y)=(0,0)\text{ or }\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a,\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}a\right),$$

注意到,

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=0,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a,\frac{1}{2\sqrt{2}}a\right)\begin{cases}<0, & a>0,\\ >0, & a<0,\end{cases}\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a,-\frac{1}{2\sqrt{2}}a\right)\begin{cases}>0, & a>0,\\ <0, & a<0,\end{cases}$$

故在 $(0,0)$ 处不存在隐函数 $y=y(x)$;

(i) $a>0$ 时, $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$
在 $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a,\frac{1}{2\sqrt{2}}a\right)$ 处有极大值 $y=\frac{\sqrt{2}}{4}a$, 在 $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a,-\frac{1}{2\sqrt{2}}a\right)$ 处有极小值 $y=-\frac{\sqrt{2}}{4}a$;

(ii) $a<0$ 时, $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$
在 $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a,\frac{1}{2\sqrt{2}}a\right)$ 处有极小值 $y=\frac{\sqrt{2}}{4}a$, 在 $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a,-\frac{1}{2\sqrt{2}}a\right)$ 处有极大值 $y=-\frac{\sqrt{2}}{4}a$.

(5)

□

9.5.8 求一个三角形, 使得它的三个角的正弦乘积最大.

解 记 $f(x,y)=\sin x\sin y\sin(x+y)$ $(x,y,x+y\in(0,\pi))$. 令

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\sin y(\cos x\sin(x+y)+\sin x\cos(x+y))=\sin y\sin(2x+y)=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\sin x(\cos y\sin(x+y)+\sin y\cos(x+y))=\sin x\sin(x+2y)=0\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \sin(2x+y)=\sin(x+2y)=0 \Longrightarrow x=y=\frac{\pi}{3}.$$

此时

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\sin y\cos(2x+y),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\sin 2(x+y),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\sin x\cos(x+2y)$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{A}=Hf\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3}\end{pmatrix}\Longrightarrow |\boldsymbol{A}|=\frac{9}{4}>0,\quad a_{11}=-\sqrt{3}<0,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 是负定方阵, $f(x,y)$ 在 $(x,y)=\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ 处取得极大值, 又 $f(x,y)$ 在定义域内只有一个极值, 故 $f(x,y)$ 有最大值 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. □

说明 本题也有许多初等解法, 如运用 Jensen 不等式或直接进行三角变换等.

9.5.9

9.5.10 求下列函数在指定条件下的极值.

(1) $u=x^2+y^2$, 若 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$;

(2) $u=x+y+z$, 若 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1, x>0, y>0, z>0$;

(3) $u=\sin x\sin y\sin z$, 若 $x+y+z=\frac{\pi}{2}, x>0, y>0, z>0$;

(4) $u=xyz$, 若 $x+y+z=0$ 且 $x^2+y^2+z^2=1$.

解 (1) 记 $f(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)$ $(\lambda\in\mathbb{R})$, 令

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=2x+\frac{\lambda}{a}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y+\frac{\lambda}{b}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial \lambda}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{\left(\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}\right)\cdot 2a}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)a},\\ y=\frac{1}{\left(\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}\right)\cdot 2b}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)b},\\ \lambda=-\frac{1}{\left(\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}\right)},\end{cases}$$

此时

$$\boldsymbol{A}=Hf(x,y)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\Longrightarrow |\boldsymbol{A}|=4>0,\quad a_{11}=2>0,$$

即 $\boldsymbol{A}$ 是一个正定方阵, 故 $u=x^2+y^2$ 有条件极小值

$$u\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)a},\frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)b}\right)=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^{-1}.$$

(2)

(3) 记 $f(x,y,z,\lambda)=\sin x\sin y\sin z+\lambda\left(x+y+z-\dfrac{\pi}{2}\right)$ $(\lambda\in\mathbb{R})$, 令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\cos x\sin y\sin z+\lambda=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\sin x\cos y\sin z+\lambda=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=\sin x\sin y\cos z+\lambda=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial \lambda}=x+y+z-\dfrac{\pi}{2}=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=y=z=\dfrac{\pi}{6},\\ \lambda=-\dfrac{\sqrt{3}}{8},\end{cases}$$

故 $u=\sin x\sin y\sin z$ 有条件极大值

$$u\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{8}.$$

(4) 记 $f(x,y,z,\lambda,\mu)=xyz+\lambda(x+y+z)+\mu(x^2+y^2+z^2-1)$ $(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$, 令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=yz+\lambda+2\mu x=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=zx+\lambda+2\mu y=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=xy+\lambda+2\mu z=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial \lambda}=x+y+z=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial \mu}=x^2+y^2+z^2-1=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}(x,y,z)=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6},\dfrac{\sqrt{6}}{6},-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)\text{ or }\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6},-\dfrac{\sqrt{6}}{6},\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right),\\ \lambda=\dfrac{1}{6},\\ \mu=\dfrac{\sqrt{6}}{12}\text{ or }-\dfrac{\sqrt{6}}{12},\end{cases}$$

故 $u=xyz$ 有条件极小值

$$u\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{18},$$

和条件极大值

$$u\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=\frac{\sqrt{6}}{18}.$$

□

9.5.11 求下列函数在指定范围内的最大值与最小值.

(1) $z=x^2-y^2,\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4\}$;

(2) $z=x^2-xy+y^2,\{(x,y)||x|+|y|\leqslant 1\}$;

(3) $z=\sin x+\sin y-\sin(x+y),\{(x,y)|x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 2\pi\}$;

(4) $z=x^2y(4-x-y),\{(x,y)|x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 6\}$.

解 (1) 令

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2y=0\implies (x,y)=(0,0).$$

此时

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{A}=Hf(0,0)=\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix}\Longrightarrow |\boldsymbol{A}|=-4<0,$$

即 $\boldsymbol{A}$ 是不定矩阵, 故 $(0,0)$ 不是极值点, $z=z(x,y)$ 的最值在边界取得.

令 $x^2+y^2=4 \Longrightarrow z(x,y)=x^2-(4-x^2)=2x^2-4\in[-4,4]$.

故 $z=z(x,y)$ 在 $(0,\pm 2)$ 处取得最小值 $z=-4$, 在 $(\pm 2,0)$ 处取得最大值 $z=4$.

(2)

(3) 令

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos x-\cos(x+y)=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\cos y-\cos(x+y)=0$$

$$\Longrightarrow \cos x=\cos y=\cos(x+y)\Longrightarrow (x,y)=\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)\text{ or }(0,2\pi)\text{ or }(2\pi,0),$$

此时

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\sin(x+y)-\sin x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\sin(x+y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\sin(x+y)-\sin y$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{A}=Hz\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=\begin{pmatrix}-\sqrt{3}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\sqrt{3}\end{pmatrix}\Longrightarrow |\boldsymbol{A}|=\frac{9}{4}>0,\quad a_{11}=-\sqrt{3}<0,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 是负定方阵, $z=z(x,y)$ 在 $(x,y)=\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ 处有极大值 $z\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

下面考虑 $z=z(x,y)$ 在边界处取得的最值.

(i) 令 $x=0$ or $y=0 \Longrightarrow z=0$;

(ii) 令 $x+y=2\pi \Longrightarrow z=0$.

综上, $z=z(x,y)$ 在 $(x,y)=\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ 处有最大值 $z\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 在边界处取得最小值 0.

(4) □

9.5.12

9.5.13

9.5.14 设 $f(x,y)=3x^2y-x^4-2y^2$. 证明: $(0,0)$ 不是它的极值点, 但沿过 $(0,0)$ 点的每条直线, $(0,0)$ 都是它的极大值点.

证明 (1) (I) 取 $y=\frac{2}{3}x^2$, 则有

$$f(x,y)=\frac{1}{9}x^4\geqslant 0,$$

当且仅当 $(x,y)=(0,0)$ 时上式等号成立, 故沿 $y=\dfrac{2}{3}x^2$, $(0,0)$ 是其极小值点;

(II) 取 $mx+ny=0$ $(m,n\in\mathbb{R})$,

(i) 当 $n\neq 0$ 时, 记 $y=kx$ $\left(k=-\dfrac{m}{n}\in\mathbb{R}\right)$, 则有

$$\begin{aligned}
g(x)=f(x,y)&=3kx^3-x^4-2k^2x^2=-x^4+3kx^3-2k^2x^2,\\
g'(x)&=-4x^3+9kx^2-4k^2x \implies g'(0)=0,\\
g''(x)&=-12x^2+18kx-4k^2 \implies g''(0)=-4k^2\leqslant 0.
\end{aligned}$$

(a) $k\neq 0 \implies g''(0)<0$, $x=0$ 是 $g(x)$ 的极大值点;

(b) $k=0 \implies g(x)=-x^4\leqslant 0 \implies x=0$ 是 $g(x)$ 的极大值点.

(ii) $n=0 \implies x=0$, 则有

$$f(x,y)=-2y^2\leqslant 0,$$

当且仅当 $(x,y)=(0,0)$ 时上式等号成立, 故沿 $x=0$, $(0,0)$ 是其极大值点.

由 (I)(II) 知, $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点, 但沿过 $(0,0)$ 点的每条直线, $(0,0)$ 都是它的极大值点. □

提示 (2) 本题可以因式分解.

证明 (2) 仅证明 $(0,0)$ 不是极值点.

注意到, $f(x,y)=-(x^2-y)(x^2-2y)$, $f(0,0)=0$.

(I) 当 $\dfrac{1}{2}x^2<y<x^2$ 时, $f(x,y)>0=f(0,0)$;

(II) 当 $y<\dfrac{1}{2}x^2$ 或 $y>x^2$ 时, $f(x,y)<0=f(0,0)$.

故 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点. □

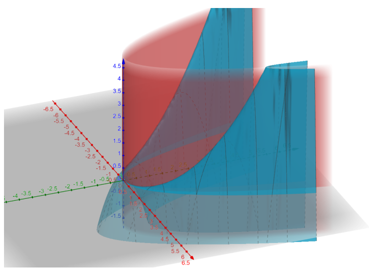

Figure 9.2 $f(x,y)=3x^2y-x^4-2y^2$

9.5.15

9.5.16

9.5.17 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上求一点 $M(x,y)$ $(x,y\geqslant 0)$, 使椭圆在该点的切线与坐标轴构成的三角形面积为最小, 并求其面积.

解 椭圆上一点 (u,v) 处的切线为 $\dfrac{ux}{a^2}+\dfrac{vy}{b^2}=1$,

令 $x=0 \implies y=\dfrac{b^2}{v}$; 令 $y=0 \implies x=\dfrac{a^2}{u}$, 故三角形的面积

$$f(u,v)=\frac{1}{2}\frac{a^2b^2}{uv},$$

记

$$F(u,v)=\frac{a^2b^2}{2uv}+\lambda\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}-1\right),$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial u}=-\dfrac{a^2b^2}{2vu^2}+\dfrac{2\lambda}{a^2}u=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial v}=-\dfrac{a^2b^2}{2uv^2}+\dfrac{2\lambda}{b^2}v=0, \quad (u,v\geqslant 0)\\ \dfrac{u^2}{a^2}+\dfrac{v^2}{b^2}-1=0\end{cases} \implies \begin{cases}u=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\\ v=\dfrac{\sqrt{2}}{2}b,\\ \lambda=ab,\end{cases}$$

此时

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}=\frac{a^2b^2}{vu^3}+\frac{2\lambda}{a^2},\quad \frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u}=\frac{a^2b^2}{2u^2v^2},\quad \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}=\frac{a^2b^2}{uv^3}+\frac{2\lambda}{b^2},$$

$$\boldsymbol{A}=HF\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{6b}{a} & 2\\ 2 & \dfrac{6a}{b}\end{pmatrix} \implies |\boldsymbol{A}|=32>0,\quad a_{11}=\frac{6b}{a}>0,$$

即 $\boldsymbol{A}$ 是一个正定方阵, 故 $F(u,v)$ 有极小值

$$F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)=ab,$$

又 $F(u,v)$ 是定义在有界闭集 $D=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}_+^2\left|\dfrac{u^2}{a^2}+\dfrac{v^2}{b^2}=1\right.\right\}$ 上的连续函数, 有唯一的极小值点, 故 $F(u,v)$ 在 D 上有最小值

$$F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)=ab.$$

□

9.5.18 求平面上一点 (x_0,y_0), 使其到 n 个定点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 的距离的平方和最小.

解 记

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}((x-x_i)^2+(y-y_i)^2),$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y-y_i)=0\end{cases} \implies \begin{cases}x=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i,\\ y=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}y_i,\end{cases}$$

此时

$$\boldsymbol{A}=Hf\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right)=\begin{pmatrix}2n & 0\\ 0 & 2n\end{pmatrix}\implies |\boldsymbol{A}|=4n^2>0,\quad a_{11}=2n>0,$$

即 $\boldsymbol{A}$ 是一个正定方阵, 故 $f(x,y)$ 有极小值

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right)=\sum_{i=1}^{n}((\overline{x}-x_i)^2+(\overline{y}-y_i)^2),\quad \overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\ \overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i.$$

又 $(\overline{x},\overline{y})$ 是连续函数 $f(x,y)$ 唯一的极值点, 故该点处取得最小值. □

9.5.19

9.5.20 在旋转椭球面 $\dfrac{x^2}{4}+y^2+z^2=1$ 上求距平面 $x+y+2z=9$ 最远和最近的点.

解 考虑椭球面上一点处与平面 $x+y+2z=9$ 平行的切平面.

椭球面 $\dfrac{x^2}{4}+y^2+z^2=1$ 上任一点 (u,v,w) 处的切平面方程为

$$\frac{ux}{4}+vy+wz=1,$$

令其法向量 $\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{u}{4},v,w\right)$ 与平面 $x+y+2z=9$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_0=(1,1,2)$ 平行, 则有

$$(u,v,w)=(4t,t,2t)\ (t\in\mathbb{R})\implies 9t^2=1\implies t=\pm\frac{1}{3}\implies (u,v,w)=\left(\pm\frac{4}{3},\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3}\right).$$

注意到平面 $x+y+2z=9$ 过点 $M(9,0,0)$, 故 $A\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right),B\left(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$ 到平面的距离分别为

$$d_1=\frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}_0\right|}{|\boldsymbol{n}|}=\sqrt{6},\quad d_2=\frac{\left|\overrightarrow{BM}\cdot\boldsymbol{n}_0\right|}{|\boldsymbol{n}_0|}=2\sqrt{6}.$$

故椭球面上距平面最远的点为 $B\left(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$, 距离为 $2\sqrt{6}$; 最近的点为 $A\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$, 距离为 $\sqrt{6}$. □

说明 求 A,B 到平面的距离时, 也可以直接使用点到平面的距离公式:

确切地说, 点 (x_0,y_0) 到平面 $ax+by+cz+f=0$ 的距离为

$$d=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+f|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

从而, 我们可以立即得到:

$$d_1=\frac{\left|\frac{4}{3}+\frac{1}{3}+\frac{4}{3}-9\right|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6},\quad d_2=\frac{\left|-\frac{4}{3}-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}-9\right|}{\sqrt{6}}=2\sqrt{6}.$$

9.5.21　设曲面 $S:\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\ (a>0)$.

(1) 证明 S 上任意点处的切平面与各坐标轴的截距之和等于 a;

(2) 在 S 上求一切平面, 使此切平面与三坐标面所围成的四面体体积最大, 并求四面体体积的最大值.

证明　(1) 记 $f(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{y}},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2\sqrt{z}},$$

故曲面 S 上任意一点 (u,v,w) 处的切平面的法向量

$$\boldsymbol{n}(u,v,w)=\left(\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{u}},\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{v}},1\right),$$

从而切平面方程为

$$\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{u}}(x-u)+\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{v}}(y-v)+z-w=0\xRightarrow{\sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w}=\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{ua}}x+\frac{1}{\sqrt{va}}y+\frac{1}{\sqrt{wa}}z=1,$$

故截距之和为

$$\sqrt{ua}+\sqrt{va}+\sqrt{wa}=a.$$

(2) 四面体体积为

$$F(u,v,w)=\frac{1}{6}\sqrt{ua\cdot va\cdot wa}=\frac{1}{6}\sqrt{a^3}\sqrt{uvw}\leqslant\frac{1}{6}\sqrt{a^3}\left(\frac{\sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w}}{3}\right)^3=\frac{1}{162}a^3,$$

当且仅当 $u=v=w=\dfrac{1}{9}a$ 时, 上式等号成立, $F(u,v,w)$ 取得最大值 $\dfrac{1}{162}a^3$. □

9.6 向量场的微商

9.6.1

9.6.2　设 $\boldsymbol{\omega}=\omega_1\boldsymbol{i}+\omega_2\boldsymbol{j}+\omega_3\boldsymbol{k}$ 是一个常值向量, 求向量场

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

的旋度 $\nabla\times\boldsymbol{v}$ 和散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$. 这里 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 是位置向量.

解　计算得:

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{v}&=\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\\&=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(\omega_2z-\omega_3y,\omega_3x-\omega_1z,\omega_1y-\omega_2x)\\&=(2\omega_1,2\omega_2,2\omega_3)=2\boldsymbol{\omega},\\\nabla\cdot\boldsymbol{v}&=\nabla\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\\&=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\omega_2z-\omega_3y,\omega_3x-\omega_1z,\omega_1y-\omega_2x)\\&=0.\end{aligned}$$

□

9.6.3 求下列向量场在指定点的散度.

(1) $\boldsymbol{v}=(3x^2-2yz,y^3+yz^2,xyz-3xz^2)$ 在 $M(1,-2,2)$ 处;

(2) $\boldsymbol{v}=x^2\sin y\boldsymbol{i}+y^2\sin xz\boldsymbol{j}+xy\sin\cos z\boldsymbol{k}$ 在 (x,y,z) 处.

解 (1)

(2)

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{v}&=2\sin y\cdot x+2\sin zx\cdot y+xy\cos\cos z\cdot(-\sin z)\\&=2x\sin y+2y\sin zx-xy\cos\cos z\cdot\sin z.\end{aligned}$$

□

9.6.4

9.6.5 求下列向量场的旋度.

(1) $\boldsymbol{v}=y^2\boldsymbol{i}+z^2\boldsymbol{j}+x^2\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{v}=(x\mathrm{e}^y+y)\boldsymbol{i}+(z+\mathrm{e}^y)\boldsymbol{j}+(y+2z\mathrm{e}^y)\boldsymbol{k}$.

解 (1)

(2)

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{v}&=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(x\mathrm{e}^y+y,z+\mathrm{e}^y,y+2z\mathrm{e}^y)\\&=(1+2z\mathrm{e}^y-1,0,-x\mathrm{e}^y+1)\\&=(2z\mathrm{e}^y,0,-x\mathrm{e}^y+1).\end{aligned}$$

□

9.6.6

9.6.7 设 $\boldsymbol{w}$ 是常向量, $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $r=|\boldsymbol{r}|$, $f(r)$ 是 r 的可微函数, 试通过 ∇ 运算求:

(1) $\nabla(\boldsymbol{w}\cdot f(r)\boldsymbol{r})$;

(2) $\nabla\cdot(\boldsymbol{w}\times f(r)\boldsymbol{r})$;

(3) $\nabla\times(\boldsymbol{w}\times f(r)\boldsymbol{r})$.

解 (1)

(2)

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{w}\times f(r)\boldsymbol{r})=\nabla\cdot(f(r)\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r})=f(r)\nabla\cdot(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r})+(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r})\cdot\nabla f(r)=(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r})\cdot\nabla f(r).$$

(3)

$$\begin{aligned}\nabla\times(\boldsymbol{w}\times f(r)\boldsymbol{r})&=\nabla\times(f(r)\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r})\\&=\nabla f(r)\times(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r})+f(r)\nabla\times(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r})\\&=\nabla f(r)\times(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r})+2f(r)\boldsymbol{w}.\end{aligned}$$

□

9.6.8

9.6.9 设 ϕ 有连续的二阶偏导数, 证明:

(1) $\nabla\times\nabla\phi=\mathbf{0}$; (2) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0$.

证明 (1) 计算得:

$$\begin{aligned}\nabla\times\nabla\phi&=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\\&=\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z},\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x},\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)=\mathbf{0},\end{aligned}$$

其中 $\phi\in C^2(\mathbb{R})$ 有连续的二阶偏导数.

另证 由 Stokes 定理,

$$\iint_S(\nabla\times\nabla\phi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_{\partial S}\nabla\phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_{\partial S}\mathrm{d}\phi=0,$$

对 $\forall S$ 成立, 因此 $\nabla\times\nabla\phi=0$. □

(2) 设 $\boldsymbol{a}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$, 则

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})&=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z},\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x},\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)\\&=\frac{\partial^2C}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2B}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2A}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2C}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2B}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2A}{\partial y\partial z}=0,\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{a}$ 有连续的二阶偏导数. □

9.6.10 设 $\boldsymbol{v}$ 有连续的二阶偏导数, 证明:

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{v})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})-\nabla^2\boldsymbol{v}.$$

证明 设 $\boldsymbol{v}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$, 考虑上式的各分量.

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{v})&=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z},\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x},\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)\\\Longrightarrow\ [\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{v})]_x&=\frac{\partial^2B}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2A}{\partial y^2}-\frac{\partial^2A}{\partial z^2}+\frac{\partial^2C}{\partial x\partial z},\\\left[\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})-\nabla^2\boldsymbol{v}\right]_x&=\frac{\partial^2A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2B}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2C}{\partial z\partial x}-\left(\frac{\partial^2A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2A}{\partial y^2}+\frac{\partial^2A}{\partial z^2}\right)\\&=\frac{\partial^2B}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2C}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2A}{\partial y^2}-\frac{\partial^2A}{\partial z^2}\\\Longrightarrow\ [\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{v})]_x&=[\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})-\nabla^2\boldsymbol{v}]_x,\end{aligned}$$

同理可得其 y,z 分量相等, 故

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{v})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})-\nabla^2\boldsymbol{v}.$$

□

说明 算符 ∇^2 作用在向量场 $\boldsymbol{v}=(v_x,v_y,v_z)$ 上表示

$$\nabla^2\boldsymbol{v}=(\Delta v_x,\Delta v_y,\Delta v_z)\,,$$

其中 $\Delta=\nabla\cdot\nabla=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ 表示 Laplace 算符.

9.7 微分形式

9.7.1 计算:

(1) $(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)\wedge(z\,\mathrm{d}z-z\,\mathrm{d}x)$;

(2) $(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)\wedge(x\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-z\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z)$.

解 (1)

$$(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)\wedge(z\,\mathrm{d}z-z\,\mathrm{d}x)=xz\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z+yz\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-yz\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x.$$

(2)

□

9.7.2 对下列微分形式 ω, 计算它们的微分, 即计算 $\mathrm{d}\omega$.

(1) $\omega=xy+yz+zx$;

(2) $\omega=xy\,\mathrm{d}x$;

(3) $\omega=xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y$;

(4) $\omega=x^2y\,\mathrm{d}x-yz\mathrm{e}^2\,\mathrm{d}y+\sin xyz\,\mathrm{d}z$;

(5) $\omega=xy^2\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-xz^2\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$;

(6) $\omega=xy\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yz\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+zx\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$.

解 (1)

(2)

(3)

(4) 记 $\boldsymbol{v}=x^2y\boldsymbol{i}-yz\mathrm{e}^2\boldsymbol{j}+\sin xyz\boldsymbol{k}$, 则

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=(xz\cos xyz+y\mathrm{e}^2,-yz\cos xyz,-x^2),$$

$$\omega=\omega_{\boldsymbol{v}}^1\implies\mathrm{d}\omega=\omega_{\nabla\times\boldsymbol{v}}^2=(xz\cos xyz+y\mathrm{e}^2)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-yz\cos xyz\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-x^2\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

(5) 记 $\boldsymbol{v}=xy^2\boldsymbol{i}-xz^2\boldsymbol{k}$, 则

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=y^2-2xz,$$

$$\omega=\omega_{\boldsymbol{v}}^2\implies\mathrm{d}\omega=\omega_{\nabla\cdot\boldsymbol{v}}^3=(y^2-2xz)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z.$$

(6)

□

9.8 第 9 章综合习题

9.8.1 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是非零常数. $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可微. 求证: 存在 $\mathbb{R}$ 上一元可微函数 $F(s)$ 使得

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) \tag{9.8}$$

的充分必要条件是

$$a_j\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i\frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

证明 先证明必要性.

在式 (9.8) 两边分别对 x_i, x_j 求偏导, 得:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}a_i, \quad \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}a_j \implies a_j\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i\frac{\partial f}{\partial x_j} = a_ia_j\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

必要性得证.

下面证明充分性.

记 $t = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$, 则有

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_1}(t - (a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n)) \\ \implies f(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= f\left(\frac{1}{a_1}(t - (a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n)), x_2, x_3, \cdots, x_n\right) \\ &:= F(t, x_2, x_3, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

上式两边同时对 x_i $(i = 2, 3, \cdots, n)$ 求偏导, 得:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\left(-\frac{a_i}{a_1}\right) + \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{1}{a_1}\left(a_i\frac{\partial f}{\partial x_1} - a_1\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = 0, \quad i = 2, 3, \cdots, n.$$

故 F 与变量 $x_2, x_3, \cdots, x_n$ 均无关, 即

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F(t, x_2, x_3, \cdots, x_n) = F(t) = F(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n).$$

□

说明 证明充分性时, 也可做变换

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & a_2 & \cdots & a_n \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} t_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n, \\ t_2 = a_2x_2 + \cdots + a_nx_n, \\ \cdots \\ t_n = a_nx_n. \end{cases}$$

参考 数学分析教程 9.4.**问题 1**.

9.8.2 设 $f(x,y,z)=F(u,v,w)$, 其中 $x^2=vw, y^2=wu, z^2=uv$. 求证:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=u\frac{\partial F}{\partial u}+v\frac{\partial F}{\partial v}+w\frac{\partial F}{\partial w}.$$

提示 等式两边对 u,v,w 求偏导即可.

9.8.3 **(Euler 定理)** 若函数 $u=f(x,y,z)$ 满足恒等式 $f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z)$ $(t>0)$, 则称 $f(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数. 试证下列关于齐次函数的 **Euler 定理**:

可微函数 $f(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数的充要条件是:

$$xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,y,z)=kf(x,y,z).$$

提示 证明充分性时, 考虑构造函数 φ, 使得其导数与

$$txf'_x(tx,ty,tz)+tyf'_y(tx,ty,tz)+tzf'_z(tx,ty,tz)=kf(tx,ty,tz)$$

有关.

证明 先证明必要性. 设 $f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z)$ 是 k 次齐次函数, 两边对 t 求导得:

$$xf'_x(tx,ty,tz)+yf'_y(tx,ty,tz)+zf'_z(tx,ty,tz)=kt^{k-1}f(x,y,z),$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{t}(txf'_x(tx,ty,tz)+tyf'_y(tx,ty,tz)+tzf'_z(tx,ty,tz))=\frac{1}{t}k\cdot t^k f(x,y,z)=\frac{1}{t}\cdot kf(tx,ty,tz),$$

由 (x,y,z) 的任意性, 将 $\left(\frac{x}{t},\frac{y}{t},\frac{z}{t}\right)$ 代入 (x,y,z) 知,

$$xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,y,z)=kf(x,y,z).$$

再证明充分性.

对 $\forall f$, 记 $\varphi(t)=\dfrac{f(tx,ty,tz)}{t^k}$, 从而

$$\varphi'(t)=\frac{t^{k-1}(txf'_x(tx,ty,tz)+tyf'_y(tx,ty,tz)+tzf'_z(tx,ty,tz)-kf(tx,ty,tz))}{t^{2k}}=0,$$

故 $\varphi(t)=\varphi(1)=f(x,y,z)$ 为常数, 从而

$$f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z)$$

是 k 次齐次函数. □

参考 数学分析教程 9.4.**问题 2**.

9.8.4 设 $f(x,y,z)$ 是 n 次齐次的可微函数. 若方程 $f(x,y,z)=0$ 隐含函数 $z=\varphi(x,y)$ (即, $f'_z\neq 0$), 则 $\varphi(x,y)$ 是一次齐次函数.

提示 直接运用**习题** 9.8.3的结论, 往证:

$$x\varphi'_x(x,y)+y\varphi'_y(x,y)=\varphi(x,y),$$

从而 $\varphi(x,y)$ 是一次齐次函数.

证明 方程 $f(x,y,z)=0$ 两边分别对 x,y 求导, 得:

$$\varphi_x'=-\frac{f_x'}{f_z'},\quad \varphi_y'=-\frac{f_y'}{f_z'}\implies x\varphi_x'+y\varphi_y'=-\frac{xf_x'+yf_y'}{f_z'},\tag{9.9}$$

而 $f(x,y,z)$ 是 n 次齐次函数, 满足 $f(tx,ty,tz)=t^nf(x,y,z)$, 由**习题 9.8.3**的结论知,

$$\begin{aligned}xf_x'(x,y,z)+yf_y'(x,y,z)+zf_z'(x,y,z)&=nf(x,y,z)=0\\ \implies -\frac{xf_x'+yf_y'}{f_z'}&=z=\varphi(x,y),\end{aligned}\tag{9.10}$$

由式 (9.9)(9.10) 知,

$$x\varphi_x'+y\varphi_y'=\varphi,$$

再次利用**习题 9.8.3**的结论知, $\varphi(x,y)$ 是一次齐次函数. □

9.8.5 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有连续二阶偏导数, 且对任意实数 x,y,z 满足 $f(x,y)=f(y,x)$ 和

$$f(x,y)+f(y,z)+f(z,x)=3f\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right).\tag{9.11}$$

试求 $f(x,y)$.

提示 在对方程求偏导时, 应当注意其对于变量 x,y,z 的地位均等性, 减少无效方程.

解 等式 $f(x,y)=f(y,x)$ 两边对变量 x 求偏导, 得:

$$f_1'(x,y)=f_2'(y,x),\tag{9.12}$$

上式两边对变量 x,y 分别求偏导, 得:

$$f_{11}''(x,y)=f_{22}''(y,x),\tag{9.13}$$

$$f_{12}''(x,y)=f_{21}''(y,x).\tag{9.14}$$

式 (9.11) 两边对变量 x 求偏导, 得:

$$\begin{aligned}f_1'(x,y)+f_2'(z,x)&=f_1'\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right)+f_2'\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right)\\ \implies f_1'(x,y)+f_1'(x,z)&=2f_1'\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right),\end{aligned}\tag{9.15}$$

其中已用到式 (9.12).

式 (9.15) 两边对 x 求偏导, 得:

$$\begin{aligned}f_{11}''(x,y)+f_{11}''(x,z)&=2\left[f_{11}''\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}+f_{12}''\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}\right]\\ &=\frac{2}{3}\left[f_{11}''\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right)+f_{12}''\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right)\right].\end{aligned}\tag{9.16}$$

式 (9.15) 两边对 y 求偏导, 得:

$$f''_{12}(x,y)=\frac{2}{3}\left[f''_{11}\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right)+f''_{12}\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right)\right]. \tag{9.17}$$

由式 (9.16)(9.17) 得:

$$f''_{11}(x,y)+f''_{11}(x,z)=f''_{12}(x,y)\implies f''_{11}(x,z)=f''_{12}(x,y)-f''_{11}(x,y):=h(x) \tag{9.18}$$

$$\implies f''_{12}(x,y)=f''_{11}(x,y)+f''_{11}(x,z)=2h(x), \tag{9.19}$$

其中, 式 (9.18) 中已用到 $f''_{11}(x,z)$ 与 y 无关, $f''_{12}(x,y)-f''_{11}(x,y)$ 与 z 无关, 二者相等, 因此均与 y,z 无关.

因此, 式 (9.16)(9.17) 化为

$$2h(x)=\frac{2}{3}\left(h\left(\frac{x+y+z}{3}\right)+2h\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\right)=2h\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\implies h(x)=C_1,$$

其中 $C_1\in\mathbb{R}$ 为常数.

从而, 我们有

$$\left.\begin{aligned}f''_{11}(x,y)=C_1&\implies f'_1(x,y)=C_1x+g_1(y)\\ f''_{12}(x,y)=2C_1&\implies f'_1(x,y)=2C_1y+g_2(x)\end{aligned}\right\}\implies f'_1(x,y)=C_1x+2C_1y+C_2,$$

其中 $C_2\in\mathbb{R}$ 为常数.

由式 (9.12) 得:

$$f'_2(x,y)=C_1y+2C_1x+C_2,$$

故

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\frac{1}{2}C_1x^2+2C_1xy+C_2x+g_3(y)=\frac{1}{2}C_1y^2+2C_1xy+C_2y+g_4(x)\\ \implies f(x,y)&=\frac{1}{2}C_1(x^2+y^2)+2C_1xy+C_2(x+y)+C_3\\ &=\frac{1}{2}C_1(x^2+4xy+y^2)+C_2(x+y)+C_3,\end{aligned}$$

其中, $C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}$. □

事实上, 式 (9.18)(9.19) 中的结论也可以这样得到:

另解 式 (9.11) 两边分别对 x,y,z 求偏导, 得:

$$\begin{aligned}&f'_1\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right)+f'_2\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right)\\ &=f'_1(x,y)+f'_2(z,x)=f'_1(y,z)+f'_2(x,y)=f'_1(z,x)+f'_2(y,z)\\ &\implies f'_1(x,y)+f'_1(x,z)=f'_1(y,z)+f'_1(y,x)\\ &\implies f'_1(x,z)-f'_1(y,z)=f'_1(y,x)-f'_1(x,y)=f'_1(y,x)-f'_1(x,x)+f'_1(x,x)-f'_1(x,y)\\ &\implies \frac{f'_1(x,z)-f'_1(y,z)}{x-y}=\frac{f'_1(y,x)-f'_1(x,x)}{x-y}+\frac{f'_1(x,x)-f'_1(x,y)}{x-y},\end{aligned}$$

上式令 $y \to x$ 得:

$$\begin{aligned} f''_{11}(x,z) &= f''_{12}(x,x) - f''_{11}(x,x) := h(x) \\ \implies & f''_{12}(x,x) = 2h(x). \end{aligned}$$

□

说明 此处只需要得到 $f''_{12}(x,x) = 2h(x)$ 的结论即可, 后面并没有用到 $f''_{12}(x,y)$.

9.8.6 证明不等式:

$$\frac{x^2+y^2}{4} \leqslant \mathrm{e}^{x+y-2} \quad (x \geqslant 0, y \geqslant 0).$$

9.8.7 设在 $\mathbb{R}^3$ 上定义的 $u = f(x,y,z)$ 是 z 的连续函数, 且 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续. 证明: u 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续.

9.8.8 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是包含原点的凸区域, $f \in C^1(D)$. 若

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D,$$

则 $f(x,y)$ 是常数.

证明 (1) 构造函数 $g(t) = f(tx,ty)$, 则有

$$\begin{aligned} g'(t) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = \frac{1}{t}\left(tx\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + ty\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\right) = 0, \quad \forall t \neq 0, \\ \implies \forall (x,y) \in D, \quad g(t) = \text{Const}. \\ \overset{t=2}{\implies} C = f(x,y) = f\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right) = \cdots = f\left(\frac{x}{2^n},\frac{y}{2^n}\right) \to f(0,0), \quad n \to \infty, \\ \implies C = f(0,0) \implies f(x,y) = f(0,0), \quad \forall (x,y) \in D. \end{aligned}$$

□

提示 (2) 直接运用中值定理.

证明 (2) 由 $f \in C^1(D)$ 及中值定理得, 对 $\forall (x,y) \in D$, $\exists \theta \in (0,1)$, 使得:

$$f(x,y) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\theta x,\theta y)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(\theta x,\theta y)\cdot y = \frac{1}{\theta}\left(\theta x\frac{\partial f}{\partial x}(\theta x,\theta y) + \theta y\frac{\partial f}{\partial y}(\theta x,\theta y)\right) = 0,$$

故 $f(x,y) = f(0,0)$ ($(x,y) \in D$) 为常数. □

9.8.9 设 $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $f(0,0) = 0$. 证明: 存在 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数 g_1, g_2, 使得

$$f(x,y) = xg_1(x,y) + yg_2(x,y).$$

提示 构造与 $f(x,y)$ 有关的单变量函数, 使得其导数与 x, y 有关.

证明 构造函数 $\varphi(t)=f(tx,ty)$, 则有

$$\begin{aligned}
&\varphi'(t)=xf_1'(tx,ty)+yf_2'(tx,ty)\\
\Longrightarrow\ &f(x,y)=f(x,y)-f(0,0)=\varphi(1)-\varphi(0)\\
&=\int_0^1\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^1 xf_1'(tx,ty)+yf_2'(tx,ty)\,\mathrm{d}t\\
&=x\int_0^1 f_1'(tx,ty)\,\mathrm{d}t+y\int_0^1 f_2'(tx,ty)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

记

$$g_1(x,y)=\int_0^1 f_1'(tx,ty)\,\mathrm{d}t,\quad g_2(x,y)=\int_0^1 f_2'(tx,ty)\,\mathrm{d}t,$$

往证: $g_1,g_2\in C(\mathbb{R}^2)$.

对 $\forall(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, 取有界闭区域

$$D=\{(x,y)||x|\leqslant|x_0|+1,|y|\leqslant|y_0|+1\},$$

则 $f_1'(x,y)$ 在 D 上一致连续.

从而, 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta\in(0,1)$, 使得当 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$ 且 $\begin{cases}|x_1-x_2|<\delta,\\|y_1-y_2|<\delta\end{cases}$ 时, 有

$$|f_1'(x_1,y_1)-f_1'(x_2,y_2)|<\varepsilon,$$

则当 $\begin{cases}|x-x_0|<\delta,\\|y-y_0|<\delta\end{cases}$ 时, 我们有 $(x,y)\in D$, 且 $\begin{cases}|tx-tx_0|=t\,|x-x_0|<\delta,\\|ty-ty_0|=t\,|y-y_0|<\delta,\end{cases}$ 从而

$$\begin{aligned}
&|f_1'(tx,ty)-f_1'(tx_0,ty_0)|<\varepsilon\\
\Longrightarrow\ |g_1(x,y)-g_1(x_0,y_0)|&=\left|\int_0^1(f_1'(tx,ty)-f_1'(tx_0,ty_0))\,\mathrm{d}t\right|\\
&\leqslant\int_0^1|f_1'(tx,ty)-f_1'(tx_0,ty_0)|\,\mathrm{d}t\\
&<\int_0^1\varepsilon\,\mathrm{d}t=\varepsilon,
\end{aligned}$$

此即 $g_1(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续, 又由 (x_0,y_0) 的任意性知, $g_1(x,y)\in C(\mathbb{R}^2)$, 同理可证得: $g_2(x,y)\in C(\mathbb{R}^2)$. 至此, 我们已经找到了满足条件的 $g_1,g_2\in C(\mathbb{R}^2)$, 使得

$$f(x,y)=xg_1(x,y)+yg_2(x,y).$$

□

说明 当看到 $f(x)\in C^1(\mathbb{R}),f(0)=0$ 时, 我们应当注意到如下结论:

(1) **微分角度** Lagrange 中值定理:

$$f(x)=f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0);$$

(2) **积分角度** 直接积分得: (注意导函数连续故可积)

$$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

对于多变量函数的情形, 我们则可以任意选取一个变量进行如上操作.

9.8.10 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某个邻域 U 上有定义, $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 U 上存在. 证明: 如果 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 中有一个在 (x_0,y_0) 处连续, 那么 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微.

9.8.11 设 $u(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上取正值且有二阶连续偏导数. 证明 u 满足方程

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$$

的充分必要条件是存在一元函数 f 和 g 使得 $u(x,y)=f(x)g(y)$.

证明 当 $f(x),g(y)$ 均存在时, 不妨假设其取值均为正值. (否则令 $f_2(x)=-f(x),g_2(y)=-g(y)$ 取值均为正, 可进行同样的讨论.)

设 $F(x,y)=\ln u(x,y)$, 则 $F(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有二阶连续偏导数.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}u-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=\frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}u-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x},$$

故

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\iff\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=0$$
$$\iff\frac{\partial F}{\partial x}=h_1(x),\quad\frac{\partial F}{\partial y}=h_2(y),$$

其中 $h_1(x),h_2(y)$ 均连续可微. 上式

$$\iff F(x,y)=h_3(x)+p(y)=h_4(y)+q(x)\iff F(x,y)=h_3(x)+h_4(y),$$

记 $f(x)=\mathrm{e}^{h_3(x)},g(y)=\mathrm{e}^{h_4(y)}$, 则上式

$$\iff \ln u(x,y)=h_3(x)+h_4(y)\iff u(x,y)=f(x)g(y).$$

□

9.8.12 **(拟微分中值定理)** 设 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}$ $(t\in[a,b])$ 有连续的导数, 证明: 存在 $\theta\in(a,b)$, 使得

$$|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)|\leqslant|\boldsymbol{r}'(\theta)|\,(b-a).$$

9.8.13 设 $f(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上有一阶连续偏导数, 且满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial z}$. 如果 $f(x,0,0)>0$ 对任意的 $x\in\mathbb{R}$ 成立, 求证: 对任意的 $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 也有 $f(x,y,z)>0$.

证明 对 $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 由中值定理知, $\exists\theta\in(0,1)$, 使得 $\boldsymbol{\xi}=(x-\theta(y+z),\theta y,\theta z)$ 满足:

$$\begin{aligned}f(x,y,z)-f(x+y+z,0,0)&=\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{\xi})\cdot(-(y+z))+\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{\xi})\cdot y+\frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{\xi})\cdot z\\&=\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{\xi})(-(y+z)+y+z)=0,\end{aligned}$$

故 $f(x,y,z)=f(x+y+z,0,0)>0$. □

9.8.14 求函数 $f(x,y)=x^2+xy^2-x$ 在区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant 2\right\}$ 上的最大值和最小值.

解 令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x+y^2-1=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2xy=0\end{cases}\implies (x,y)=(0,\pm1)\text{ or }\left(\frac{1}{2},0\right),$$

此时

$$\boldsymbol{A}=Hf(0,1)=\begin{pmatrix}2&2\\2&0\end{pmatrix}\implies|\boldsymbol{A}|=-4<0,$$

$$\boldsymbol{B}=Hf(0,-1)=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&0\end{pmatrix}\implies|\boldsymbol{B}|=-4<0,$$

$$\boldsymbol{C}=Hf\left(\frac{1}{2},0\right)=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\implies|\boldsymbol{C}|=2>0,\quad c_{11}=2>0,$$

故 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是不定方阵, $(x,y)=(0,\pm1)$ 不是极值点; $\boldsymbol{C}$ 是正定方阵, $f(x,y)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 处有极小值

$$f\left(\frac{1}{2},0\right)=-\frac{1}{4}.$$

下面考虑 f 在 ∂D 上的最值. 令 $x^2+y^2=2$.

记 $F(x,y)=x^2+xy^2-x+\lambda(x^2+y^2-2)$ $(\lambda\in\mathbb{R})$. 令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x+y^2-1+2\lambda x=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2xy+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2-2=0\end{cases}\implies (x,y)=(\pm\sqrt{2},0)\text{ or }\left(-\frac{1}{3},\pm\frac{\sqrt{17}}{3}\right)\text{ or }(1,\pm1)$$

$$\implies f(\sqrt{2},0)=2-\sqrt{2},\quad f(-\sqrt{2},0)=2+\sqrt{2},\quad f\left(-\frac{1}{3},\pm\frac{\sqrt{17}}{3}\right)=-\frac{5}{27},\quad f(1,\pm1)=1,$$

比较上述各值知, $f(x,y)$ 在 D 上有最大值 $f(-\sqrt{2},0)=2+\sqrt{2}$, 最小值 $f\left(\dfrac{1}{2},0\right)=-\dfrac{1}{4}$. □

9.8.15 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是正数, 且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$. 用 Lagrange 乘数法证明

$$x_1x_2\cdots x_n\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\leqslant n,$$

等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时成立.

证明 记

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{n}{x_1x_2\cdots x_n}-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)+\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n-n),\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=\dfrac{n}{\prod\limits_{k\neq i}x_k}\cdot\left(-\dfrac{1}{x_i^2}\right)+\dfrac{1}{x_i^2}+\lambda=\dfrac{1}{x_i^2}\left(1-\dfrac{n}{\prod\limits_{k\neq i}x_k}\right)+\lambda=0,\quad i=1,2,\cdots,n,\\ x_1+x_2+\cdots+x_n-n=0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ -\lambda=\frac{1}{x_i^2}\left(1-\frac{n}{\prod\limits_{k\neq i}x_k}\right)=\frac{1}{x_j^2}\left(1-\frac{n}{\prod\limits_{k\neq j}x_k}\right)$$

$$\Longrightarrow\ \left(\frac{1}{x_i}-\frac{1}{x_j}\right)\left[\left(\frac{1}{x_i}+\frac{1}{x_j}\right)-\frac{n}{\prod\limits_{k=1}^{n}x_k}\right]=0$$

$$\Longrightarrow\ \left(\frac{1}{x_i}-\frac{1}{x_j}\right)\cdot\frac{1}{x_ix_j}\left(x_i+x_j-\frac{n}{\prod\limits_{k\neq i,j}x_k}\right)=0.$$

往证:

$$x_i+x_j-\frac{n}{\prod\limits_{k\neq i,j}x_k}<0$$

$$\Longleftrightarrow\ n-\sum_{k\neq i,j}x_k-\frac{n}{\prod\limits_{k\neq i,j}x_k}<0$$

$$\Longleftrightarrow\ n<\sum_{k\neq i,j}x_k+\frac{n}{\prod\limits_{k\neq i,j}x_k},$$

注意到,

$$\sum_{k\neq i,j}x_k+\frac{n}{\prod\limits_{k\neq i,j}x_k}\geqslant(n-1)\sqrt[n-1]{n}>n,\quad n=3,4,\cdots.$$

故上式成立.

从而

$$\left(\frac{1}{x_i}-\frac{1}{x_j}\right)\cdot\frac{1}{x_ix_j}=0\ \Longrightarrow\ x_i=x_j=1,\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

故 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时有最小值 0, 从而

$$x_1x_2\cdots x_n\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\leqslant n.$$

□

说明 如何证明取得的是最小值/最大值?

9.8.16 设 $a_i\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,n)$, $p>1$. 证明:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leqslant\left(\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}},$$

并说明等号成立的条件.

9.8.17 设 $y_i=y_i(x_1,x_2,\cdots,x_n), i=1,2,\cdots,n$, 是 n 个可微的 n 元函数, 证明:

$$\mathrm{d}y_1\wedge\mathrm{d}y_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_n=\frac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n.$$

证明 先证明 $n=3$ 的情形. 即有

$$\mathrm{d}y_1\wedge\mathrm{d}y_2\wedge\mathrm{d}y_3=\frac{\partial(y_1,y_2,y_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3.$$

计算得:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y_1\wedge\mathrm{d}y_2\wedge\mathrm{d}y_3&=\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\frac{\partial y_1}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right)\wedge\left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\frac{\partial y_2}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right)\\&\quad\wedge\left(\frac{\partial y_3}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial y_3}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\frac{\partial y_3}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right)\\&=\left(\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_2}&\frac{\partial y_1}{\partial x_3}\\\frac{\partial y_2}{\partial x_2}&\frac{\partial y_2}{\partial x_3}\end{vmatrix}\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_3}&\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\\\frac{\partial y_2}{\partial x_3}&\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\end{vmatrix}\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1+\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}&\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\\\frac{\partial y_2}{\partial x_1}&\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\end{vmatrix}\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\right)\\&\quad\wedge\left(\frac{\partial y_3}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial y_3}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\frac{\partial y_3}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right)\\&=\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}&\frac{\partial y_1}{\partial x_2}&\frac{\partial y_1}{\partial x_3}\\\frac{\partial y_2}{\partial x_1}&\frac{\partial y_2}{\partial x_2}&\frac{\partial y_2}{\partial x_3}\\\frac{\partial y_3}{\partial x_1}&\frac{\partial y_3}{\partial x_2}&\frac{\partial y_3}{\partial x_3}\end{vmatrix}\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\\&=\frac{\partial(y_1,y_2,y_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3.\end{aligned}$$

因此运用数学归纳法及行列式的递归定义不难证明 n 时的情形. □

9.9 第 9 章补充习题

9.9.1 设 $F(x,y)$ 有连续的偏导数, 若曲线 $F(x,y)=0$ 在 (x_0,y_0) 自相交, 问在 (x_0,y_0) 附近是否存在隐函数? $F'_x(x_0,y_0)$ 和 $F'_y(x_0,y_0)$ 等于多少?

解 自相交 $\Longrightarrow$ 隐函数不存在, $F'_x(x_0,y_0)=\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0), F'_y(x_0,y_0)=\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0).$ □

说明 不是很能理解这题想问什么...

9.9.2 设 F 具有连续的一阶偏导数, $w=w(x,y,z)$ 是方程

$$F(x-aw,y-bw,z-cw)=1$$

所确定的隐函数, 其中 a,b,c 为常数. 求 $a\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\dfrac{\partial w}{\partial y}+c\dfrac{\partial w}{\partial z}$.

提示 直接对方程求偏导即可.

9.9.3 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上可微, 且满足

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{f(x,y)}{\rho}=+\infty,$$

其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. 证明: 对任意的 $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)$, 均存在一点 (x_0,y_0), 使得 $\nabla f(x_0,y_0)=\boldsymbol{v}$.

提示 可以考虑单变量中对应的结论:

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可微, 且满足

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{f(x)}{|x|}=+\infty,$$

证明: 对任意的 $a\in\mathbb{R}$, 存在 x_0, 使得 $f'(x_0)=a$.

分析 即证: $\exists(x_0,y_0)$, 使得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=v_1,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=v_2 \iff \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)-v_1=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)-v_2=0.$$

若能构造一个函数 F, 使得

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)-v_1,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)-v_2,$$

则只需证明, 对 $\forall\boldsymbol{v}$, $F(x,y)$ 有驻点.

证明 对 $\forall\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)$, 设 $F(x,y)=f(x,y)-v_1x-v_2y$. 即证: $F(x,y)$ 有驻点.

注意到,

$$\frac{F(x,y)}{\rho}=\frac{f(x,y)-v_1x-v_2y}{\rho}\geqslant\frac{f(x,y)}{\rho}-(|v_1|+|v_2|)\to+\infty,\quad \rho\to\infty,$$

即

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{F(x,y)}{\rho}=+\infty \Longrightarrow \lim_{\rho\to\infty}F(x,y)=+\infty,$$

故 $F(x,y)$ 在充分大的圆内取到最小值, 记最小值点为 (x_0,y_0), 易知其为极小值点, 从而

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)-v_1=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)-v_2=0$$
$$\Longrightarrow \nabla f(x_0,y_0)=\boldsymbol{v}.$$

□

9.9.4 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 且存在偏导数. 若

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f(x,y),$$

且

$$f(x,y)=0,\quad (x,y)\in\partial D,$$

求证: $f(x,y)$ 在 D 上恒等于零.

提示 用反证法.

证明 用反证法. 假设 $f(x,y)\not\equiv 0$, 则在 D 内部比如存在最大值或最小值. 不妨设其取到最大值 $f(x_0,y_0)>0$, 从而

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0 \Longrightarrow f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0,$$

矛盾! 故

$$f(x,y)\equiv 0,\quad (x,y)\in D.$$

□

9.9.5 设 $x=\cos\varphi\cos\psi, y=\cos\varphi\sin\psi, z=\sin\varphi$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

提示 (1) 方程组确定了隐函数 $\varphi=\varphi(x,y),\psi=\psi(x,y)$, 故 $z=\sin\varphi(x,y)$.

提示 (2) 方程组等价于 $x^2+y^2+z^2=1$.

参考 数学分析习题课讲义 20.2.**例 20.2.3**.

9.10 重点习题

9.1.19

9.2.17 本题对于求 $(0,0)$ 处的偏导数, 必须先将其余变量的值代入 (如, 求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ 时, 需先代入 $y=0$) 再对指定变量求导数 (通过导数的极限定义), 而不能求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}$, 这是由于偏导数在该点处不连续造成的.

9.2.33

9.3.3

9.8.13

9.8.5

9.8.9

第 10 章　多变量函数的重积分

10.1　二重积分

10.1.1　改变下列积分的顺序.

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$;

(2) $\displaystyle\int_{0}^{2} \mathrm{d}x \int_{2x}^{6-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$;

(3) $\displaystyle\int_{0}^{a} \mathrm{d}y \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_{a}^{b} \mathrm{d}y \int_{y}^{b} f(x,y)\,\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_{0}^{1} \mathrm{d}x \int_{0}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{1}^{2} \mathrm{d}x \int_{0}^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$;

(6) $\displaystyle\int_{0}^{1} \mathrm{d}y \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \mathrm{d}y \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

解　(1)

(2)

$$\int_{0}^{2} \mathrm{d}x \int_{2x}^{6-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{4} \mathrm{d}y \int_{0}^{\frac{1}{2}y} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{4}^{6} \mathrm{d}y \int_{0}^{6-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

(3)

(4)

$$\int_{a}^{b} \mathrm{d}y \int_{y}^{b} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} \mathrm{d}x \int_{a}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

(5)

$$\int_{0}^{1} \mathrm{d}x \int_{0}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{1}^{2} \mathrm{d}x \int_{0}^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{1} \mathrm{d}y \int_{y}^{2-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

(6) □

10.1.2　计算下列积分.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D=[0,1]^2$;

(2) $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D=[0,\pi]^2$;

(3) $\iint_D \cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, D : 由 $y=\pi, x=y, x=0$ 围成;

(4) $\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, D : 由 $x^2+y^2=a^2$ 围成的圆在第一象限部分;

(5) $\iint_D (x+y-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, D : 由 $y=x, y=x+a, y=a, y=3a$ 围成;

(6) $\iint_D \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, D : 由 $y=x, x=y^2$ 围成;

(7) $\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, D : 由 $x=2, y=x, xy=1$ 围成;

(8) $\iint_D |\cos(x+y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, D : 由 $y=x, y=0, x=\frac{\pi}{2}$ 围成.

解 (1)

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}y = -\int_0^1 \mathrm{d}x \cdot \left((1+x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{y=0}^1 \right)\\ &= -\int_0^1 ((2+x^2)^{-\frac{1}{2}} - (1+x^2)^{-\frac{1}{2}})\,\mathrm{d}x\\ &= -\ln\left|\frac{x+\sqrt{2+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right|\Bigg|_0^1 = \ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

(2)

(3)

(4)

$$\begin{aligned}\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y)\,\mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{d}x \cdot \left(xy+\frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\\ &= \int_0^a \left(x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}(a^2-x^2)\right)\mathrm{d}x\\ &= \left(-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}a^2x - \frac{1}{6}x^3\right)\Bigg|_0^a = \frac{2}{3}a^3.\end{aligned}$$

(5)

(6)

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y^2}^{y} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}y \left(\frac{\sin y}{y}(y-y^2)\right) = \int_0^1 \sin y\cdot(1-y)\,\mathrm{d}y\\ &= -\left(\cos y\cdot(1-y)\Big|_0^1 + \int_0^1 \cos y\,\mathrm{d}y\right) = -\left(-1+\sin y\Big|_0^1\right) = 1-\sin 1.\end{aligned}$$

(7)

(8)

$$\begin{aligned}\iint_D |\cos(x+y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}y \int_y^{\frac{\pi}{2}-y} \cos(x+y)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{x} (-\cos(x+y))\,\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}y\cdot \sin(x+y)\Big|_y^{\frac{\pi}{2}-y} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x\cdot(-\sin(x+y))\Big|_{\frac{\pi}{2}-x}^{x}\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \left(x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}-1.\end{aligned}$$

□

10.1.3 利用函数的奇偶性计算下列积分:

(1) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D: -1\leqslant x\leqslant 1, -1\leqslant y\leqslant 1;$

(2) $\displaystyle\iint_D \sin x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D: x^2-y^2=1, x^2+y^2=9$ 围成含原点的部分.

解 (1)

(2) 注意到, $f(x)=\sin x$ 是奇函数, 而积分区域关于 y 轴对称, 故

$$\iint_D \sin x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.$$

□

10.1.4 设函数 φ 和 ψ 分别在区间 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 上可积, 求证: $f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积, 且有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b\varphi(x)\,\mathrm{d}x\int_c^d\psi(y)\,\mathrm{d}y.$$

10.1.5 设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续, 证明:

$$\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2,$$
$$\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^a(a-x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 注意到,

$$\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\,\mathrm{d}y+\int_0^a\mathrm{d}x\int_x^a f(x)f(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^a f(y)\,\mathrm{d}y=\left(\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2,$$

而

$$\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^a\mathrm{d}y\int_x^a f(x)f(y)\,\mathrm{d}x=\int_0^a\mathrm{d}x\int_x^a f(x)f(y)\,\mathrm{d}y,$$

故

$$\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^a\mathrm{d}x\int_x^a f(x)f(y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

$$\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^a\mathrm{d}y\int_y^a f(y)\,\mathrm{d}x=\int_0^a(a-y)f(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^a(a-x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

10.1.6 设函数 $f(x,y)$ 有连续的二阶偏导数, 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上, 求积分

$$\iint_D\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\cdot\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{y=c}^{d}\\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,d)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,c)\right)\mathrm{d}x = \left.(f(x,d)-f(x,c))\right|_a^b\\ &= f(b,d)-f(b,c)-f(a,d)+f(a,c).\end{aligned}$$

□

10.1.7 设函数 $f(x,y)$ 连续, 求极限

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_{x^2+y^2\leqslant r^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

提示 考虑积分中值定理.

答案 $f(0,0)$.

10.2 二重积分的换元

10.2.1 计算下列积分.

(1) $\displaystyle\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\ln(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$;

(2) $\displaystyle\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^b xy(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$;

(3) $\displaystyle\int_0^\pi\int_0^\pi\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}} xy(x+y)\,\mathrm{d}y$;

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}\mathrm{d}x\int_0^{Rx}\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\mathrm{d}y+\int_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^{R}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\mathrm{d}y$.

解 (1)

(2)

(3)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\int_0^\pi\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^\pi\mathrm{d}x\int_0^\pi\cos(x+y)\,\mathrm{d}y = \int_0^\pi\mathrm{d}x\cdot\left.\sin(x+y)\right|_0^\pi\\ &= \int_0^\pi(\sin(x+\pi)-\sin x)\,\mathrm{d}x = \left.(\cos x-\cos(x+\pi))\right|_0^\pi\\ &= -4.\end{aligned}$$

(4)

(5)

$$\int_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}} \mathrm{d}x \int_0^{Rx} \left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) \mathrm{d}y + \int_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^{R} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\frac{R^2}{\sqrt{1+R^2}}} \mathrm{d}y \int_{\frac{1}{R}y}^{\sqrt{R^2-y^2}} \left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{R^2}{\sqrt{1+R^2}}} \mathrm{d}y \cdot \left(x - \frac{y^2}{x}\right)\Bigg|_{\frac{1}{R}y}^{\sqrt{R^2-y^2}}$$

$$= \int_0^{\frac{R^2}{\sqrt{1+R^2}}} \left(\frac{R^2-2y^2}{\sqrt{R^2-y^2}} - \left(\frac{1}{R}-R\right)y\right) \mathrm{d}y$$

$$= \left(y\sqrt{R^2-y^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}-R\right)y^2\right)\Bigg|_0^{\frac{R^2}{\sqrt{1+R^2}}} = \frac{1}{2}R^3.$$

□

10.2.2 计算下面二重积分.

(1) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D: x^2+y^2 \leqslant x+y$;

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D$: 由 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=4, y=0, y=x$ 所围成的第一象限部分;

(3) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D$: 由 $xy=1, xy=2, y=x, y=2x$ 围成的第一象限部分;

(4) $\displaystyle\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D$: 由 $y^2=ax, y^2=bx, x^2=my, x^2=ny$ 围成的区域 $(a>b>0, m>n>0)$;

(5) $\displaystyle\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D$: 由 $xy=a, xy=b, y^2=cx, y^2=dx$ 围成的第一象限部分 $(0<a<b, 0<c<d)$;

(6) $\displaystyle\iint_D 4xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D$: 由 $x^4+y^4=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 所围成的区域;

(7) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x+y+3}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D: |x|+|y|\leqslant 1$;

(8) $\displaystyle\iint_D \sin\frac{y}{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D$: 由直线 $x+y=1, x=0, y=0$ 所围成的区域.

(9) $\displaystyle\iint_D |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D: x^2+y^2\leqslant a^2$.

解 (1) 记 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则 $D: 0\leqslant r\leqslant \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right), -\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}$.

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\theta\right)} r^2\,\mathrm{d}r = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \cdot \left(\frac{1}{3}r^3\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{2\sqrt{2}}{3}\cos^3\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{2}}{6}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\cos 3\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+3\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6}\left(\frac{1}{3}\sin 3\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+3\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{8\sqrt{2}}{9}.$$

其中已用到

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \implies \cos^3\theta = \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta).$$

(2)

(3)

(4) 记 $y^2=ux, x^2=vy$, 则 $D'\mapsto D$, 其中 D' : 由 $u=a, u=b, v=m, v=n$ 围成,

$$\begin{cases} x=(uv^2)^{\frac{1}{3}}, \\ y=(u^2v)^{\frac{1}{3}} \end{cases} \Longrightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\frac{1}{3},$$

故

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\int_b^a \mathrm{d}u\int_n^m \mathrm{d}v=\frac{1}{3}(a-b)(m-n).$$

(5) 记 $xy=u, y^2=vx$, 则 D' : 由 $u=a, u=b, v=c, v=d$ 围成,

$$\begin{cases} x=u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{1}{3}}, \\ y=(uv)^{\frac{1}{3}} \end{cases} \Longrightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{4}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix}=\frac{1}{3}v^{-1},$$

故

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\int_a^b u\,\mathrm{d}u\int_c^d v^{-1}\,\mathrm{d}v=\frac{1}{6}(b^2-a^2)\ln\frac{d}{c}.$$

(6)

(7) 记 $x+y=u, x-y=v$, 则 D' : 由 $u=\pm1, v=\pm1$ 围成,

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(u+v), \\ y=\frac{1}{2}(u-v) \end{cases} \Longrightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{2},$$

故

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x+y+3}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{u}{\sqrt{u+3}}\,\mathrm{d}u\int_{-1}^1 v\,\mathrm{d}v\\&=\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^1\frac{u}{\sqrt{u+3}}\,\mathrm{d}u\right)\left(\frac{1}{2}v^2\bigg|_{-1}^1\right)=0.\end{aligned}$$

(8)

(9)

□

10.2.3　求下列曲线所围成的平面区域的面积.

(1) $x^2+2y^2=3$ 和 $xy=1$ (不含原点部分);

(2) $(x-y)^2+x^2=a^2$ $(a>0)$;

(3) 由直线 $x+y=a, x+y=b, y=kx, y=mx$ $(0<a<b, 0<k<m)$ 围成的平面区域.

解 (1)

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{\frac{3-x^2}{2}}} \mathrm{d}y = 2\int_1^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{3-x^2}{2}} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$$

$$= 2\left(\frac{x\sqrt{3-x^2} - 3\arccos\frac{x}{\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} - \ln x\right)\bigg|_1^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{3}} - \arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{2}} - \ln 2.$$

(2)

(3) □

10.2.4 证明:

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \left(\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

提示 将上式右边化为二重积分, 比较积分区域和被积函数的大小即可.

10.2.5 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明:

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \mathrm{e}^{-f(y)}\,\mathrm{d}y \geqslant 1.$$

证明 由积分形式的 Cauchy 不等式知,

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \mathrm{e}^{-f(y)}\,\mathrm{d}y = \left(\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 \mathrm{e}^{-f(x)}\,\mathrm{d}x\right) \geqslant \left(\int_0^1 \sqrt{\mathrm{e}^{f(x)-f(x)}}\,\mathrm{d}x\right)^2 = 1.$$

□

10.2.6 设 $f(x)$ 为连续的奇函数, 证明:

$$\iint_{|x|+|y|\leqslant 1} \mathrm{e}^{f(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geqslant 2.$$

证明 记 $x+y=u, x-y=v$, 则 D' : 由 $u=\pm 1, v=\pm 1$ 围成,

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(u+v), \\ y = \dfrac{1}{2}(u-v) \end{cases} \implies \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

故

$$\iint_{|x|+|y|\leqslant 1} \mathrm{e}^{f(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{f(u)}\,\mathrm{d}u \int_{-1}^1 \mathrm{d}v = \int_{-1}^1 \mathrm{e}^{f(u)}\,\mathrm{d}u = \int_{-1}^0 \mathrm{e}^{f(u)}\,\mathrm{d}u + \int_0^1 \mathrm{e}^{f(u)}\,\mathrm{d}u$$

$$\xlongequal{u=-t} \int_0^1 \mathrm{e}^{f(-t)}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \mathrm{e}^{f(u)}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \left(\mathrm{e}^{f(u)} + \mathrm{e}^{-f(u)}\right)\mathrm{d}u$$

$$\geqslant \int_0^1 2\,\mathrm{d}u = 2.$$

□

10.2.7 设 $f(t)$ 为连续函数, 求证:

$$\iint_D f(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-A}^{A} f(t)(A-|t|)\,\mathrm{d}t,$$

其中 D 为 $|x| \leqslant \dfrac{A}{2}, |y| \leqslant \dfrac{A}{2}, A > 0$ 为常数.

证明 记 $y = y, x = t + y$, 以 t, y 作为新的积分参量, 则 D' : 由 $y = \pm\dfrac{A}{2}, t = -y \pm \dfrac{A}{2}$ 围成, 且有

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

故

$$\begin{aligned}\iint_D f(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_{D'} f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y = \int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t \cdot \int_{-\frac{A}{2}}^{-t+\frac{A}{2}} \mathrm{d}y + \int_{-A}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t \cdot \int_{-t-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \mathrm{d}y \\ &= \int_0^A f(t)(A-t)\,\mathrm{d}t + \int_{-A}^{0} f(t)(A+t)\,\mathrm{d}t = \int_{-A}^{A} f(t)(A-|t|)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

□

10.3 三重积分

10.3.1 计算下列三重积分.

(1) $\displaystyle\iiint_V xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $V: 1 \leqslant x \leqslant 2, -2 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant \dfrac{1}{2}$;

(2) $\displaystyle\iiint_V xy^2z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, V : 由 $z = xy, y = x, x = 1, z = 0$ 围成;

(3) $\displaystyle\iiint_V y\cos(x+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, V : 有 $y = \sqrt{x}, y = 0, z = 0, x + z = \dfrac{\pi}{2}$ 围成;

(4) $\displaystyle\iiint_V (a-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, V : 由 $y = 0, z = 0, 2x + y = a, x + y = a, y + z = a$ 围成.

解 (1)

(2)

$$\begin{aligned}\iiint_V xy^2z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \int_0^{xy} xy^2z^3\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \cdot \frac{1}{4}x^5y^6 \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x \cdot \frac{1}{4}x^5 \cdot \frac{1}{7}x^7 = \frac{1}{28 \times 13}x^{13}\bigg|_0^1 = \frac{1}{364}.\end{aligned}$$

(3)

(4)

$$\begin{aligned}\iiint_V (a-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^a (a-y)\,\mathrm{d}y \cdot \int_{\frac{1}{2}(a-y)}^{a-y} \mathrm{d}x \cdot \int_0^{a-y} \mathrm{d}z = \int_0^a \frac{1}{2}(a-y)^3\,\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{8}(a-y)^4\bigg|_0^a = \frac{1}{8}a^4.\end{aligned}$$

□

10.3.2 计算下列积分值.

(1) $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \mathrm{d}y \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}z$;

(2) $\displaystyle\int_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}z$;

(3) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}z$;

(4) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\,\mathrm{d}z$.

解 (1) 记 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant 2\cos\theta$, 则有

$$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \mathrm{d}y \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2\,\mathrm{d}r \int_0^a z\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}a^2\cdot\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{4}{3}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}(\cos 3\theta+3\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}a^2\left(\frac{1}{3}\sin 3\theta+3\sin\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{9}a^2.$$

(2) 记 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant R$, 则有

$$\int_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}y (x^2+y^2)\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\cdot\int_0^R r\cdot r^2\cdot\sqrt{R^2-r^2}\,\mathrm{d}r = 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{15}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}(2R^2+3r^2)\right)\Bigg|_0^R = \frac{4\pi}{15}R^5.$$

(3)

(4) □

10.3.3 计算下列三重积分.

(1) $\displaystyle\iiint_V (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, V : 由 $x^2+y^2=2z, z=2$ 围成;

(2) $\displaystyle\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, V : 由 $x^2+y^2=z^2, z=1$ 围成;

(3) $\displaystyle\iiint_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, V : 由 $\sqrt{4-x^2-y^2}=z, x^2+y^2=3z$ 围成;

(4) $\displaystyle\iiint_V xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, V 是 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 的第一卦限部分;

(5) $\displaystyle\iiint_V x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, V : 由曲面 $z=y^2, z=4y^2$ $(y>0)$ 及平面 $z=x, z=2x, z=1$ 围成;

(6) $\displaystyle\iiint_V \left|x^2+y^2+z^2-1\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, V : $x^2+y^2+z^2\leqslant 4$;

(7) $\displaystyle\iiint_V \mathrm{e}^{|z|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, V : $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$;

(8) $\displaystyle\iiint_V (|x|+z)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, V : $1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4$.

解 (1) 记 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant 2$, 则有

$$\begin{aligned}\iiint_V (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iint (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \cdot \int_{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}^{2} \mathrm{d}z \\ &= \iint (x^2+y^2)\left(2-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 r^2\left(2-\frac{1}{2}r^2\right)\cdot r\,\mathrm{d}r \cdot \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\left(\frac{1}{2}r^4-\frac{1}{12}r^6\right)\bigg|_0^2 \\ &= \frac{16\pi}{3}.\end{aligned}$$

(2)

(3)

(4) 记 $x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$, 则积分区域化为

$$D = \left\{(r,\theta,\varphi)\middle|0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}.$$

故

$$\begin{aligned}\iiint_V xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iiint_D r^3\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\cdot r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^1 r^5\,\mathrm{d}r\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{6}r^6\bigg|_0^1\cdot\frac{1}{4}\sin^4\theta\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{48}.\end{aligned}$$

(5)

(6) 记 $x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$, 则积分区域化为

$$D = \{(r,\theta,\varphi)|0 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}.$$

故

$$\begin{aligned}\iiint_V \left|x^2+y^2+z^2-1\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iiint_D \left|r^2-1\right|\cdot r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^2\left|r^2-1\right|r^2\,\mathrm{d}r\cdot\int_0^\pi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \\ &= \left(\int_0^1(1-r^2)r^2\,\mathrm{d}r+\int_1^2(r^2-1)r^2\,\mathrm{d}r\right)\cdot(-\cos\theta)\Big|_0^\pi\cdot 2\pi \\ &= 4\pi\cdot\left(\left(\frac{1}{3}r^3-\frac{1}{5}r^5\right)\bigg|_0^1+\left(\frac{1}{5}r^5-\frac{1}{3}r^3\right)\bigg|_1^2\right) \\ &= 16\pi.\end{aligned}$$

(7)

(8) □

10.3.4 利用对称性求下列三重积分.

(1) $\iiint_V (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, V : 由 $z=1-x^2-y^2, z=0$ 围成;

(2) $\iiint_V x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, V : 由 $x^2+y^2=z^2, x^2+y^2=1$ 围成;

(3) $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $V: x^2+y^2+z^2 \leqslant x$;

(4) $\iiint_V (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $V: r^2 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, z \geqslant 0$;

(5) $\iiint_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $V: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

(6) $\iiint_V \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $V: x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$.

解 (1) 注意到积分区域关于 $x=y=0$ 中心对称, 而 $f(x,y)=x+y$ 满足 $f(x,y)=-f(-x,-y)$, 故

$$\iiint_V (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0.$$

(2) 注意到积分区域关于 $x=0$ 平面对称, $f(x,y,z)=x$ 满足 $f(x,y,z)=-f(-x,y,z)$, 故

$$\iiint_V x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0.$$

(3)

(4) 记 $x=\rho\sin\theta\cos\varphi, y=\rho\sin\theta\sin\varphi, z=\rho\cos\theta$, 则积分区域化为

$$D=\left\{(\rho,\theta,\varphi)\middle| r\leqslant\rho\leqslant R, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\right\}.$$

故

$$\begin{aligned}\iiint_V (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iiint_D \rho^2\sin^2\theta\cdot\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\ &= \int_r^R \rho^4\,\mathrm{d}\rho\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\\ &= \frac{1}{5}\rho^5\Big|_r^R\cdot\left(-\cos\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot 2\pi\\ &= \frac{1}{5}(R^5-r^5)\cdot\frac{2}{3}\cdot 2\pi = \frac{4\pi}{15}(R^5-r^5).\end{aligned}$$

说明 上述积分过程似乎并未用到对称性?

(5)

(6) 由对称性知, 上述积分为 0. □

10.3.5 计算下列曲面围成的立体体积.

(1) $y=0, z=0, 3x+y=6, 3x+2y=12, x+y+z=6$;

(2) $z=x^2+y^2, z=2x^2+2y^2, y=x, y=x^2$;

(3) $z^2+x^2=1, x+y+z=3, y=0$;

(4) $x^2+y^2=2x, z=x^2+y^2, z=0$;

(5) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1, z=xy$ (在第一卦限部分);
(6) $x^2+y^2+z^2=2az, x^2+y^2=z^2$ (含 z 轴部分);
(7) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$ (含 z 轴部分);
(8) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x$.

解 (1)

(2)

(3) 记 $D=\left\{(x,z)\middle|z^2+x^2\leqslant 1\right\}$

$$\begin{aligned}\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\cdot\int_0^{3-z-x}\mathrm{d}y=\iint_D(3-z-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\\ &=3\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z-2\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z=3\pi-2\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

注意到积分区域 D 关于 $x=0$ 对称, 而 $f(x,z)=x$ 满足 $f(x,z)=-f(-x,z)$, 故

$$\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z=0 \implies \iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=3\pi.$$

(4)

(5) 记 D 是 Oxy 平面第一象限内内由 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 围成的区域, 则有

$$\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\cdot\int_0^{xy}\mathrm{d}z=\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

记 $x=3s, y=2t$, 则 $D':s^2+t^2\leqslant 1, s\geqslant 0, t\geqslant 0$,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=\begin{vmatrix}3&0\\0&2\end{vmatrix}=6,$$

故上式

$$=\iint_{D'}6st\cdot 6\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t=36\iint_{D'}st\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t,$$

记 $s=r\cos\theta, t=r\sin\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant 1$, 上式

$$=36\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=36\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{2}.$$

(6)

(7)

(8) 记 $x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$, 则有

$$r^4=a^3r\sin\theta\cos\varphi \implies r^3=a^3\sin\theta\cos\varphi,$$

积分区域化为

$$D=\left\{(r,\theta,\varphi)\middle|0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}\right\},$$

故

$$\begin{aligned}\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \cdot \int_0^{a(\sin\theta\cos\varphi)^{\frac{1}{3}}} r^2\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \cdot \frac{1}{3}a^3 \sin\theta\cos\varphi \\ &= \frac{1}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{3}a^3 \cdot \left(\sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{3}a^3 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}a^3.\end{aligned}$$

□

10.3.6　求函数 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在域 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant x + y + z$ 内的平均值.

提示

$$\overline{f} = \frac{\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}.$$

10.3.7　设 $F(t) = \displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 f 为可微分函数, 求 $F'(t)$.

解

$$F(t) = \int_0^t f(r^2)4\pi r^2\,\mathrm{d}r \implies F'(t) = f(t^2)4\pi t^2.$$

□

10.3.8　证明: $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f(z)\,\mathrm{d}V = \pi\int_{-1}^1 f(z)(1-z^2)\,\mathrm{d}z$.

证明

$$\begin{aligned}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f(z)\,\mathrm{d}V &= \int_{-1}^1 f(z)\,\mathrm{d}z \cdot \iint_{x^2+y^2\leqslant 1-z^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^1 f(z)\,\mathrm{d}z \cdot \pi(1-z^2) \\ &= \pi\int_{-1}^1 f(z)(1-z^2)\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

□

10.3.9　设函数 $f(x,y,z)$ 连续, 证明:

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_a^x \mathrm{d}y \int_a^y f(x,y,z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}z \int_z^b \mathrm{d}y \int_y^b f(x,y,z)\,\mathrm{d}x.$$

证明

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_a^x \mathrm{d}y \int_a^y f(x,y,z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}x \int_a^x \mathrm{d}z \int_z^x f(x,y,z)\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_a^b \mathrm{d}z \int_z^b \mathrm{d}x \int_z^x f(x,y,z)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}z \int_z^b \mathrm{d}y \int_y^b f(x,y,z)\,\mathrm{d}x.$$

□

10.3.10

10.3.11

10.3.12

10.3.13

10.3.14

10.3.15

10.3.16

10.3.17

10.3.18

10.3.19

10.4 n 重积分

10.4.1 计算下列 n 重积分.

(1) $\displaystyle\int\cdots\int_{[0,1]^n} (x_1^2+\cdots+x_n^2)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$;

(2) $\displaystyle\int\cdots\int_{[0,1]^n} (x_1+\cdots+x_n)^2\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$;

(3) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_1\cdots x_n\,\mathrm{d}x_n$.

(1)

(2)

(3)

10.4.2 计算下列集合 $V_n=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\middle|\frac{x_1}{a_1}+\cdots+\frac{x_n}{a_n}\leqslant 1,x_1,\cdots,x_n\geqslant 0\right\}$ 的体积.

10.4.3 设 $f(x)$ 连续, 证明:

$$\int_0^a \mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)\,\mathrm{d}x_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^a f(t)(a-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t.$$

证明 由习题 **10.5.12**的结论知,

$$\begin{aligned}
&\int_0^a \mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)\,\mathrm{d}x_n\\
=&\int_0^a \mathrm{d}x_n\int_{x_n}^a\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_2}^a f(x_n)\,\mathrm{d}x_1\\
=&\int_0^a f(x_n)\,\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^a\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_2}^a \mathrm{d}x_1\\
=&\int_0^a f(x_n)\,\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^a\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_3}^a \mathrm{d}x_2\cdot(a-x_2)\\
=&\int_0^a f(x_n)\,\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^a\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_4}^a \mathrm{d}x_3\cdot\left(-\frac{1}{2}(a-x_2)^2\Big|_{x_2=x_3}^a\right)\\
=&\int_0^a f(x_n)\,\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^a\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_4}^a \mathrm{d}x_3\cdot\frac{1}{2}(a-x_3)^2\\
=&\int_0^a f(x_n)\,\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^a\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_5}^a \mathrm{d}x_4\cdot\left(-\frac{1}{2\cdot 3}(a-x_3)^3\Big|_{x_3=x_4}^a\right)\\
=&\int_0^a f(x_n)\,\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^a\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_5}^a \mathrm{d}x_4\cdot\frac{1}{3!}(a-x_4)^3\\
=&\cdots\\
=&\int_0^a f(x_n)\,\mathrm{d}x_n\cdot\frac{1}{(n-1)!}(a-x_n)^{n-1}\\
=&\frac{1}{(n-1)!}\int_0^a f(x_n)(a-x_n)^{n-1}\,\mathrm{d}x_n\\
=&\frac{1}{(n-1)!}\int_0^a f(t)(a-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

□

10.4.4 设 $f(x)$ 连续, 证明:

$$\int_0^a \mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\,\mathrm{d}x_n=\frac{1}{n!}\left(\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t\right)^n.$$

10.5 第 10 章综合习题

10.5.1 计算二重积分 $I=\iint_D \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4\}$.

提示

$$I=\iint_D \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D\cap E}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_{D\cap F}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $E=\left\{(x,y)\middle|x^2-y^2+2\geqslant 0\right\},F=\left\{(x,y)\middle|x^2-y^2+2\leqslant 0\right\}$.

10.5.2 计算三重积分

$$I=\iiint_{[0,1]^3}\frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w}{(1+u^2+v^2+w^2)^2}.$$

提示 运用柱坐标变换, 再令 $w=\tan\varphi$, 最后运用被积函数的对称性.

解 记 $u=r\cos\theta, v=r\sin\theta$, 则

$$\begin{aligned}\iiint_{[0,1]^3}\frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w}{(1+u^2+v^2+w^2)^2}&=2\int_0^1\mathrm{d}w\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}\frac{r}{(1+r^2+w^2)^2}\,\mathrm{d}r\\&=\int_0^1\mathrm{d}w\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\left(-\frac{1}{1+r^2+w^2}\bigg|_0^{\frac{1}{\cos\theta}}\right)\\&=\int_0^1\mathrm{d}w\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\left(\frac{1}{w^2}-\frac{1}{1+\frac{1}{\cos^2\theta}+w^2}\right)\\&=\frac{\pi}{4}\left(\arctan w\Big|_0^1\right)-\int_0^1\mathrm{d}w\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{\cos^2\theta}+w^2}\\&\xlongequal{w=\tan\varphi}\frac{\pi^2}{16}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\cdot\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\varphi}}\frac{1}{\cos^2\varphi}\\&=\frac{\pi^2}{16}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\cdot\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\varphi+\cos^2\theta}\\&=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\cdot\frac{\cos^2\varphi+\cos^2\theta}{\cos^2\varphi+\cos^2\theta}\\&=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^2}{32}.\end{aligned}$$

□

10.5.3 设 $a>0,b>0$. 试求下面的积分:

(1)

(2)

(1) (2)

10.5.4

10.5.5

10.5.6 计算曲面 $(x^2+y^2)^2+z^4=y$ 所围的体积.

提示 运用球坐标变换.

解 记 $x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$, 则有

$$r^4\sin^4\theta+r^4\cos^4\theta=r\sin\theta\sin\varphi \implies r^3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)=\sin\theta\sin\varphi,$$

从而积分区域化为

$$D=\left\{(r,\theta,\varphi)\middle|0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\pi,0\leqslant r\leqslant\left(\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\right)^{\frac{1}{3}}\right\},$$

故

$$\begin{aligned}
\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iiint_D r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\cdot\int_0^\pi \mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^{\left(\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\right)^{\frac{1}{3}}} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\\
&=\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\cdot\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin^2\theta\sin\varphi}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}=\frac{1}{3}\int_0^\pi\frac{\sin^2\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\,\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^\pi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\
&=\frac{1}{3}\left(-\cos\varphi\Big|_0^\pi\right)\int_0^\pi\frac{\sin^2\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}\int_0^\pi\frac{\csc^2\theta}{1+\cot^4\theta}\,\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{2}{3}\int_0^\pi\frac{1}{1+\cot^4\theta}\,\mathrm{d}(-\cot\theta)\xlongequal{\cot\theta=t}\frac{2}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t=\frac{4}{3}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t\\
&\xlongequal{t=\frac{1}{u}}\frac{4}{3}\left(\int_0^1\frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t+\int_1^0\frac{u^4}{1+u^4}\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u\right)=\frac{4}{3}\int_0^1\frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(t^2+\sqrt{2}t+1)+(t^2-\sqrt{2}t+1)}{(t^2+\sqrt{2}t+1)(t^2-\sqrt{2}t+1)}\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1\left(\frac{1}{(\sqrt{2}t+1)^2+1}+\frac{1}{(\sqrt{2}t-1)^2+1}\right)\mathrm{d}(\sqrt{2}t)\\
&=\frac{2\sqrt{2}}{3}(\arctan(\sqrt{2}t+1)+\arctan(\sqrt{2}t-1))\Big|_0^1\\
&=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi.
\end{aligned}$$

□

10.5.7 证明:

$$\iint_{[0,1]^2}(xy)^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t.$$

证明 (1) 记 $xy=u, y=v$, 则积分区域化为

$$D=\left\{(u,v)\middle|\frac{u}{v}\in[0,1],v\in[0,1]\right\}=\{(u,v)|u\in[0,1],v\in[u,1]\},$$

且有

$$\begin{cases}x=\dfrac{u}{v},\\ y=v\end{cases}\implies\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{v} & -\dfrac{u}{v^2}\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{v},$$

(事实上, 此处的变换等价于单变量积分的换元: $x=\dfrac{u}{y} \implies \mathrm{d}x=\dfrac{1}{y}\,\mathrm{d}u$.)

从而

$$\iint_{[0,1]^2}(xy)^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D u^u\frac{1}{v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\int_0^1 u^u\,\mathrm{d}u\int_u^1\frac{1}{v}\,\mathrm{d}v=\int_0^1(-u^u\ln u)\,\mathrm{d}u,$$

注意到,

$$\begin{aligned}\int_0^1(-u^u\ln u)\,\mathrm{d}u-\int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t&=\int_0^1 u^u(-\ln u-1)\,\mathrm{d}u\\&=-\int_0^1\mathrm{e}^{u\ln u}(\ln u+1)\,\mathrm{d}u\\&=-\mathrm{e}^{u\ln u}\Big|_0^1=0,\end{aligned}$$

其中已用到

$$\lim_{x\to0}x\ln x=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}(-x)=0.$$

故

$$\iint_{[0,1]^2}(xy)^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t.$$

□

说明 注意到, 上述积分通过交换积分次序进行计算, 但事实上我们也可以将其看作某一个变量的单变量函数通过分部积分进行计算.

证明 (2) 记 $xy=u \iff x=\dfrac{1}{y}u \implies \mathrm{d}x=\dfrac{1}{y}\,\mathrm{d}u$, 则有

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]^2}(xy)^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_0^1\mathrm{d}y\cdot\int_0^1(xy)^{xy}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\frac{1}{y}u^u\,\mathrm{d}u=\int_0^1\left(\int_0^y u^u\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}(\ln y)\\&=\ln y\int_0^y u^u\,\mathrm{d}u\Big|_0^1-\int_0^1\ln y\cdot y^y\,\mathrm{d}y=-\int_0^1 y^y\ln y\,\mathrm{d}y,\end{aligned}\tag{10.1}$$

其中已用到

$$\lim_{y\to0}\ln y\int_0^y u^u\,\mathrm{d}u\xlongequal{\exists\eta\in(0,y)}\lim_{y\to0}(\ln y\cdot y\eta^\eta)=\lim_{y\to0}y\ln y\cdot\mathrm{e}^{\lim\limits_{y\to0}\eta\ln\eta}=0.$$

注意到,

$$(y^y)'=(\mathrm{e}^{y\ln y})'=\mathrm{e}^{y\ln y}(\ln y+1)=y^y(\ln y+1)\implies y^y\ln y=(y^y)'-y^y,$$

因此式 (10.1)

$$=-\int_0^1((y^y)'-y^y)\,\mathrm{d}y=-y^y\Big|_0^1+\int_0^1 y^y\,\mathrm{d}y=\int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t,$$

其中已用到

$$\lim_{y\to0}y^y=\lim_{y\to0}\mathrm{e}^{y\ln y}=1.$$

□

10.5.8

10.5.9 设 f 是连续可导的单变量函数. 令 $F(t)=\iint_{[0,t]^2} f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 求证:

(1) $F'(t)=\dfrac{2}{t}\left(F(t)+\iint_{[0,t]^2} xyf'(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)$;

(2) $F'(t)=\dfrac{2}{t}\int_0^{t^2} f(s)\,\mathrm{d}s$.

提示 (1) 直接通过对变上限积分的求导计算 $F'(t)$.

证明 (1) 记 $xy=u, y=v$, 则积分区域化为

$$D=\left\{(u,v)\middle|\frac{u}{v},v\in[0,t]\right\}=\left\{(u,v)\middle|u\in[0,t^2],v\in\left[\frac{u}{t},t\right]\right\},$$

且有

$$\begin{cases} x=\dfrac{u}{v}, \\ y=v \end{cases} \Longrightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{v} & -\dfrac{u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{v},$$

从而

$$\begin{aligned} F(t)&=\iint_{[0,t]^2} f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{t^2} f(u)\,\mathrm{d}u\int_{\frac{u}{t}}^{t}\frac{1}{v}\,\mathrm{d}v \\ &=\int_0^{t^2} f(u)(2\ln t-\ln u)\,\mathrm{d}u=2\ln t\int_0^{t^2} f(u)\,\mathrm{d}u-\int_0^{t^2} f(u)\ln u\,\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

故

$$F'(t)=\frac{2}{t}\int_0^{t^2} f(u)\,\mathrm{d}u+2\ln t\cdot f(t^2)\cdot 2t-f(t^2)\ln t^2\cdot 2t=\frac{2}{t}\int_0^{t^2} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

(2) 得证.

下证 (1). 即证

$$F(t)+\iint_{[0,t]^2} xyf'(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{t^2} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

由前述讨论知,

$$\begin{aligned} &F(t)+\iint_{[0,t]^2} xyf'(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=F(t)+\int_0^{t^2} uf'(u)(2\ln t-\ln u)\,\mathrm{d}u \\ =&\int_0^{t^2}(f(u)+uf'(u))(2\ln t-\ln u)\,\mathrm{d}u=\int_0^{t^2}(2\ln t-\ln u)\,\mathrm{d}(uf(u)) \\ =&(2\ln t-\ln u)uf(u)\Big|_0^{t^2}-\int_0^{t^2} uf(u)\cdot\left(-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=\int_0^{t^2} f(u)\,\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

其中已用到

$$\lim_{u\to 0}(f(u)u\ln u)=\lim_{u\to 0} f(u)\cdot\lim_{u\to 0} u\ln u=f(0)\cdot 0=0.$$

(1) 得证. □

提示 (2) 证明 (1) 时从要证式入手, 证明 (2) 时通过微分的定义计算 $F'(t)$.

证明 (2) (1) 注意到,

$$\begin{aligned}\iint_{[0,t]^2} xyf'(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^t \mathrm{d}x \int_0^t xyf'(xy)\,\mathrm{d}y = \int_0^t \mathrm{d}x \cdot \int_0^t y\,\mathrm{d}f(xy)\\ &= \int_0^t \mathrm{d}x \cdot \left(yf(xy)\Big|_0^t - \int_0^t f(xy)\,\mathrm{d}y \right)\\ &= \int_0^t tf(tx)\,\mathrm{d}x - F(t)\\ &\xlongequal{tx=s} \int_0^{t^2} f(s)\,\mathrm{d}s - F(t),\end{aligned}$$

因此, 要证 (1), 只需证 (2). 下面计算 $F'(t)$.

$$\begin{aligned}F(t+\Delta t) - F(t) &= \int_0^t \mathrm{d}x \int_t^{t+\Delta t} f(xy)\,\mathrm{d}y + \int_0^t \mathrm{d}y \int_t^{t+\Delta t} f(xy)\,\mathrm{d}x + \iint_{[t,t+\Delta t]^2} f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &\xlongequal{\exists \xi,\eta\in(t,t+\Delta t)} 2\int_0^t \mathrm{d}x \int_t^{t+\Delta t} f(xy)\,\mathrm{d}y + f(\xi\eta)(\Delta t)^2\\ &\xlongequal{\exists \eta_2\in(t,t+\Delta t)} 2\int_0^t f(x\eta_2)\cdot\Delta t\,\mathrm{d}x + o(\Delta t)\\ &\xlongequal{\eta_2 x=s} \frac{2\Delta t}{\eta_2}\int_0^{t\eta_2} f(s)\,\mathrm{d}s + o(\Delta t)\\ &= \Delta t\cdot\frac{2}{t}\int_0^{t^2} f(s)\,\mathrm{d}s + o(\Delta t), \quad \Delta t\to 0,\\ \Longrightarrow\ F'(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t} = \frac{2}{t}\int_0^{t^2} f(s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

□

提示 (3) 注意到,

$$F(t) = \int_0^t \left(\int_0^t f(xy)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$$

若将其看作关于 t 的函数的单变量积分, 则变量 t 在积分上下限和被积函数中同时存在, 这给求导造成了困难, 我们试图通过合适的变换, 解决这一点.

证明 (3) 仅证明 (1).

记 $x = tu, y = tv$, 则

$$F(t) = \int_0^t \mathrm{d}x \cdot \int_0^t f(xy)\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^1 t^2 f(t^2uv)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = t^2\iint_{[0,1]^2} f(t^2uv)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

记 $g(t) = \iint_{[0,1]^2} f(t^2uv)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$, 从而 $F(t) = t^2g(t)$. 往证:

$$g'(t) = \iint_{[0,1]^2} 2tuvf'(t^2uv)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

事实上, 更一般地, 我们有:[1]

[1]不难证明, 此性质对于单变量积分或其他多重积分也成立 (只要是区域上的积分即可).

设 $g(t)=\iint_D f(t,x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=[a,b]\times[c,d]$, 则

$$g'(t)=\iint_D \frac{\partial f}{\partial t}(t,x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

要证上式, 只需证

$$\int_0^u g'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^u\left(\iint_D \frac{\partial f}{\partial t}(t,x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t+C,$$

$$\begin{aligned}RHS&=\int_0^u\mathrm{d}t\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d\mathrm{d}y\frac{\partial f}{\partial t}(t,x,y)+C=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d\mathrm{d}y\int_0^u\frac{\partial f}{\partial t}(t,x,y)\,\mathrm{d}t+C\\&=\iint_D f(u,x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+C=g(u)+C,\end{aligned}$$

取 $C=-g(0)$ 知结论成立.

下面求 $F'(t)$.

$$\begin{aligned}F'(t)&=(t^2g(t))'=2tg(t)+t^2g'(t)\\&=\frac{2}{t}\left(t^2g(t)+t^4\iint_{[0,1]^2}uvf'(t^2uv)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\right)\\&=\frac{2}{t}\left(F(t)+\iint_{[0,t]^2}xyf'(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right).\end{aligned}$$

□

10.5.10 (Poincaré 不等式) 设 $\varphi(x),\psi(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, $f(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y)|a\leqslant x\leqslant b,\varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x)\}$ 上连续可微, 且有 $f(x,\varphi(x))=0$, 则存在 $M>0$, 使得

$$\iint_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant M\iint_D (f_y'(x,y))^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

证明 先证明:

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^2(x,y)\,\mathrm{d}y\leqslant\frac{(\psi(x)-\varphi(x))^2}{2}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}(f_y'(x,y))^2\,\mathrm{d}y.$$

由 Cauchy 不等式,

$$\begin{aligned}f^2(x,y)&=\left(\int_{\varphi(x)}^y f_y'(x,t)\,\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\left(\int_{\varphi(x)}^y f_y'^2(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_{\varphi(x)}^y 1\,\mathrm{d}t\right)=(y-\varphi(x))\int_{\varphi(x)}^y f_y'^2(x,t)\,\mathrm{d}t\\ \Longrightarrow\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^2(x,y)\,\mathrm{d}y&\leqslant\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\left((y-\varphi(x))\int_{\varphi(x)}^y f_y'^2(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\\&=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\left(\int_{\varphi(x)}^y f_y'^2(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\left(\frac{(y-\varphi(x))^2}{2}\right)\\&=\left(\frac{(y-\varphi(x))^2}{2}\int_{\varphi(x)}^y f_y'^2(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\Bigg|_{\varphi(x)}^{\psi(x)}-\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\frac{(y-\varphi(x))^2}{2}f_y'^2(x,y)\,\mathrm{d}y\\&\leqslant\frac{(\varphi(x)-\psi(x))^2}{2}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f_y'^2(x,t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{(\psi(x)-\varphi(x))^2}{2}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}(f_y'(x,y))^2\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

故

$$\iint_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^2(x,y)\,\mathrm{d}y \leqslant \int_a^b \mathrm{d}x \cdot \frac{(\psi(x)-\varphi(x))^2}{2} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (f_y'(x,y))^2\,\mathrm{d}y$$
$$\leqslant M \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (f_y'(x,y))^2\,\mathrm{d}y = M \iint_D (f_y'(x,y))^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中取 M 为 $\dfrac{(\psi(x)-\varphi(x))^2}{2}$ 在 $[a,b]$ 上的最大值即可. □

10.5.11 设 $a>0$, $\Omega_n(a) = \{(x_1,\cdots,x_n) | x_1+\cdots+x_n \leqslant a, x_i \geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,n)\}$. 求积分

$$I_n(a) = \int\cdots\int_{\Omega_n(a)} x_1x_2\cdots x_n\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

解 记 $x_i = at_i\ (i=1,2,\cdots,n)$, 则有

$$\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(t_1,t_2,\cdots,t_n)} = a^n,$$

从而

$$I_n(a) = a^{2n}\int\cdots\int_{\Omega_n(1)} t_1t_2\cdots t_n\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n = a^{2n}I_n(1),$$

从而

$$\begin{aligned}
I_n(1) &= \int_0^1 x_n\,\mathrm{d}x_n \int\cdots\int_{\Omega_{n-1}(1-x_n)} x_1x_2\cdots x_{n-1}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1} \\
&= \int_0^1 x_n\,\mathrm{d}x_n\cdot(1-x_n)^{2(n-1)}I_{n-1}(1) = I_{n-1}(1)\int_0^1 x_n(1-x_n)^{2(n-1)}\,\mathrm{d}x_n \\
&= -I_{n-1}(1)\int_0^1 \left((1-x_n)^{2n-1} - (1-x_n)^{2(n-1)}\right)\mathrm{d}x_n \\
&= -I_{n-1}(1)\left(-\frac{1}{2n}(1-x_n)^{2n} + \frac{1}{2n-1}(1-x_n)^{2n-1}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)I_{n-1}(1) = \frac{1}{(2n-1)2n}I_{n-1}(1). \\
&\Longrightarrow I_n(1) = \prod_{i=2}^{n}\frac{1}{(2i-1)2i}I_1(1) = \frac{1}{2}\prod_{i=3}^{2n}\frac{1}{i} = \prod_{i=1}^{2n}\frac{1}{i}, \\
&\Longrightarrow I_n(a) = a^{2n}I_n(1) = a^{2n}\prod_{i=1}^{2n}\frac{1}{i}, \quad i=1,2,\cdots,n.
\end{aligned}$$

□

说明 建立递推关系时, 应当选取合适的积分顺序.

10.5.12 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为 n 元的连续函数, 证明:

$$\int_a^b \mathrm{d}x_1 \int_a^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_a^{x_{n-1}} f(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_n = \int_a^b \mathrm{d}x_n\int_{x_n}^b \mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_2}^b f(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_1.$$

证明 对 n 用数学归纳法.

当 $n=2$ 时,

$$\int_a^b \mathrm{d}x_1 \int_a^{x_1} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2 = \int_a^b \mathrm{d}x_2 \int_{x_2}^b f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1,$$

结论成立;

假设结论对 $n-1$ $(n\geqslant 3)$ 成立, 下面考虑 n 时的情形.

由归纳假设知,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \mathrm{d}x_1 \int_a^{x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_n \\
=&\int_a^b \mathrm{d}x_1 \int_a^{x_1} \mathrm{d}x_n \int_{x_n}^{x_1} \mathrm{d}x_{n-1} \cdots \int_{x_3}^{x_1} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_2 \\
=&\int_a^b \mathrm{d}x_n \int_{x_n}^b \mathrm{d}x_1 \int_{x_n}^{x_1} \mathrm{d}x_{n-1} \cdots \int_{x_3}^{x_1} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_2 \\
=&\int_a^b \mathrm{d}x_n \int_{x_n}^b \mathrm{d}x_{n-1} \int_{x_{n-1}}^b \mathrm{d}x_1 \cdots \int_{x_3}^{x_1} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_2 \\
=&\cdots \\
=&\int_a^b \mathrm{d}x_n \int_{x_n}^b \mathrm{d}x_{n-1} \cdots \int_{x_2}^b f(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_1.
\end{aligned}$$

因此结论对 n 的情形也成立. 由数学归纳法知, 结论对 $\forall n\in\mathbb{N}^*$ 成立. □

10.6 重点习题

10.3.1(2)

10.5.2

10.5.6

10.5.10

10.5.11

第 11 章　曲线积分和曲面积分

11.1　数量场在曲线上的积分

11.1.1　计算下列曲线的弧长.

(1) $\boldsymbol{r}(t)=\mathrm{e}^t\cos t\boldsymbol{i}+\mathrm{e}^t\sin t\boldsymbol{j}+\mathrm{e}^t\boldsymbol{k}\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(2) $x=3t, y=3t^2, z=2t^3$ 由 $O(0,0,0)$ 到 $A(3,3,2)$;

(3) $x=a\cos t, y=a\sin t, z=a\ln\cos t\ \left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(4) $z^2=2ax$ 与 $9y^2=16xz$ 的交线, 由点 $O(0,0,0)$ 到点 $A\left(2a,\dfrac{8a}{3},2a\right)$;

(5) $4ax=(y+z)^2$ 与 $4x^2+3y^2=3z^2$ 的交线, 由原点到点 $M(x,y,z)$ $(a>0, z\geqslant 0)$.

解　(1)

(2)

$$\int_0^1\|\boldsymbol{r}'(t)\|\,\mathrm{d}t=\int_0^1\sqrt{3^2+(6t)^2+(6t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^1(6t^2+3)\,\mathrm{d}t=(2t^3+3t)\Big|_0^1=5.$$

(3)

(4) 曲线上任意一点 $(x,y,z)=\left(\dfrac{t^2}{2a},\dfrac{4}{3}\dfrac{t^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2a}},t\right)$ $(t\in[0,2a])$, 故

$$s=\int_0^{2a}\sqrt{\left(\frac{t}{a}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2t}{a}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2a}\left(\frac{t}{a}+1\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^2}{2a}+t\right)\Big|_0^{2a}=4a.$$

(5)　□

11.1.2　计算下列曲线积分.

(1) $\displaystyle\int_L y^2\,\mathrm{d}s$, $L: x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(2) $\displaystyle\int_L\frac{z^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, $L: x=a\cos t, y=a\sin t, z=at\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(3) $\displaystyle\int_L(x+y)\,\mathrm{d}s$, $L:$ 顶点为 $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$ 的三角形周界;

(4) $\displaystyle\int_L\frac{\mathrm{d}s}{x-y}$, $L:$ 联结点 $A(0,-2)$ 到点 $B(4,0)$ 的直线段;

(5) $\displaystyle\int_L(x+y+z)\,\mathrm{d}s$, $L:$ 直线段 $AB: A(1,1,0), B(1,0,0)$ 及螺线 $BC: x=\cos t, y=\sin t, z=t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 组成;

(6) $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$, L : 由曲线 $r=a,\varphi=0,\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ 所围成的区域边界;

(7) $\int_L x\,ds$, L : 由对数螺线 $r=ae^{k\varphi}$ $(k>0)$ 在圆 $r=a$ 内的那一段;

(8) $\int_L z\,ds$, L : 圆锥螺线 $x=t\cos t, y=t\sin t, z=t$ $(0\leqslant t\leqslant t_0)$;

(9) $\int_L x\sqrt{x^2-y^2}\,ds$, L : 双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(x\geqslant 0)$ 的一半;

(10) $\int_L (x^2+y^2+z^2)^n\,ds$, L : 圆周 $x^2+y^2=a^2, z=0$;

(11) $\int_L x^2\,ds$, L : 圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$;

(12) $\int_L (yz+zx+xy)\,ds$, L : 圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$.

解 (1)

(2)

(3)

$$\int_L (x+y)\,ds=\int_0^1 x\,dx+\int_0^1 y\,dy+\int_0^1 (x+(1-x))\sqrt{2}\,dx=\sqrt{2}+1.$$

(4) 线段上一点 $(x,y)=\left(t,\dfrac{1}{2}t-2\right)$ $(t\in[0,4])$, 则

$$\int_L \frac{ds}{x-y}=\int_0^4 \frac{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{\frac{1}{2}t+2}\,dt=\sqrt{5}\int_0^4 \frac{1}{t+4}\,dt=\sqrt{5}\ln(t+4)\Big|_0^4=\sqrt{5}\ln 2.$$

(5)

(6)

(7)

(8)

$$\begin{aligned}\int_L z\,ds&=\int_0^{t_0} t\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}\,dt\\&=\int_0^{t_0} t\sqrt{t^2+2}\,dt=\frac{1}{3}(t^2+2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{t_0}=\frac{1}{3}((t_0^2+2)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2}).\end{aligned}$$

(9) 记 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则有

$$r^4=a^2r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\implies r^2=a^2\cos 2\theta\implies r=a\sqrt{\cos 2\theta},\quad r'(\theta)=a\frac{-\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}},$$

从而

$$\begin{aligned}
\int_L x\sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{d}s &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r\cos\theta\sqrt{r^2\cos 2\theta\cdot\left(a^2\cos 2\theta+a^2\frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}\right)}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2 a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^3\cos 2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^3(1-2\sin^2\theta)\,\mathrm{d}(\sin\theta) \\
&= a^3\left(\sin\theta-\frac{2}{3}\sin^3\theta\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^3.
\end{aligned}$$

(10)

(11) 由对称性知,

$$\int_L x^2\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\int_L (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s = \frac{a^2}{3}\int_L \mathrm{d}s = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

(12)

$$\begin{aligned}
\int_L (yz+zx+xy)\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{2}\int_L ((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2))\,\mathrm{d}s \\
&= -\frac{1}{2}\int_L (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s \\
&= -\frac{a^2}{2}\int_L \mathrm{d}s \\
&= -\pi a^3.
\end{aligned}$$

□

11.1.3 求曲线 $x=\mathrm{e}^t\cos t, y=\mathrm{e}^t\sin t, z=\mathrm{e}^t$ 从 $t=0$ 到任意点间那段弧的质量, 设它各点的密度与该点到原点的距离平方成反比, 且在点 $(1,0,1)$ 处的密度为 1.

解 考虑从 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(0)$ 到 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u)$ 的弧. 由题意知, $\rho(\boldsymbol{r})=\dfrac{2}{r^2}$, 则

$$\begin{aligned}
m(u) &= \left|\int_0^u \rho(\mathrm{e}^t\cos t,\mathrm{e}^t\sin t,\mathrm{e}^t)\sqrt{(\mathrm{e}^t(\cos t-\sin t))^2+(\mathrm{e}^t(\sin t+\cos t))^2+(\mathrm{e}^t)^2}\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_0^u \sqrt{3}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right| = \left|(-\sqrt{3}\mathrm{e}^{-t})\Big|_0^u\right| = \sqrt{3}\left|1-\mathrm{e}^{-u}\right|.
\end{aligned}$$

□

11.1.4 求螺旋线一圈 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=\dfrac{h}{2\pi}t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 对于各坐标轴的转动惯量. 设密度 $\rho=1$.

11.1.5 求半径为 a 的均匀半圆弧 (密度为 ρ) 对于处在圆心 O, 质量为 M 的质点的引力.

11.2 数量场在曲面上的积分

11.2.1 求下列曲面在指定部分的面积.

(1) 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=2x$ 内的部分;

(2) 柱面 $x^2+y^2=a^2$ 被平面 $x+z=0, x-z=0\ (x>0, y>0)$ 所截的部分;

(3) 圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 被圆柱 $y^2+z^2+a^2$ 所割下的部分;

(4) 球面 $x^2+y^2+z^2=3a^2$ 和抛物面 $x^2+y^2=2az\ (z\geqslant 0)$ 所围成的立体的全表面;

(5) 曲面 $x=\dfrac{1}{2}(2y^2+z^2)$ 被柱面 $4y^2+z^2=1$ 所截下的部分;

(6) 锥面 $z^2=x^2+y^2$ 被 Oxy 平面和 $z=\sqrt{2}\left(\dfrac{x}{2}+1\right)$ 所截下的部分;

(7) 螺旋面 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z=h\varphi$ 在 $0<r<a, 0<\varphi<2\pi$ 的部分;

(8) 曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=2a^2xy$ 的全部.

解 (1)

(2)

(3) 区域上任意一点 $(x,y,z)=(a\cos\theta, a\sin\theta, a\cos\varphi)\ (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, |\cos\varphi|\leqslant|\cos\theta|)$, 由对称性, 不妨只考虑 $D=\left\{(a\cos\theta, a\sin\theta, a\cos\varphi)\middle|0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}, \theta\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$ 的部分, 则

$$E=a^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta=a^2,\quad F=0,\quad G=a^2\sin^2\varphi,$$

故

$$\begin{aligned}\sigma&=8\iint_D \mathrm{d}\sigma=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_\theta^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\varphi=8\int_\theta^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\&=8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\cdot(-\cos\varphi)\Big|_\theta^{\frac{\pi}{2}}=8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=8a^2\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=8a^2.\end{aligned}$$

(4)

(5) 曲面上一点 $(x,y,z)=\left(y^2+\dfrac{1}{2}z^2, y, z\right)$,

$$E=(2y)^2+1=4y^2+1,\quad F=2yz,\quad G=z^2+1,$$

从而

$$\iint_D \mathrm{d}\sigma=\iint_{4y^2+z^2\leqslant 1}\sqrt{(4y^2+1)(z^2+1)-4y^2z^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_{4y^2+z^2\leqslant 1}\sqrt{4y^2+z^2+1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

记 $y=\dfrac{1}{2}r\cos\theta, z=r\sin\theta$, 则积分区域化为

$$D'=\{(r,\theta)|r\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\},$$

且有

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2}\cos\theta & -\dfrac{1}{2}r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=\frac{1}{2}r,$$

故

$$\iint_{4y^2+z^2\leqslant 1}\sqrt{4y^2+z^2+1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_{D'}\sqrt{r^2+1}\frac{1}{2}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sqrt{r^2+1}\,\mathrm{d}r$$
$$=\pi\cdot\frac{1}{3}(r^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{\pi}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

(6)

(7)

$$E=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1,\quad F=0,\quad G=r^2\sin^2\varphi+r^2\cos^2\varphi+h^2=r^2+h^2,$$

则

$$\iint_D \mathrm{d}\sigma=\int_0^a\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+h^2}\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\sqrt{r^2+h^2}\,\mathrm{d}r$$
$$\xlongequal{r=h\tan\theta}2\pi\int_0^{\arctan\frac{a}{h}}h\sec\theta\cdot h\frac{1}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
$$=2\pi h^2\int_0^{\arctan\frac{a}{h}}\frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\cos^4\theta}\xlongequal{\sin\theta=t}2\pi h^2\int_0^{\frac{a}{\sqrt{h^2+a^2}}}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2(1-t)^2}$$
$$=2\pi h^2\int_0^{\frac{a}{\sqrt{h^2+a^2}}}\frac{1}{4}\left(\frac{(1+t)+1}{(1+t)^2}+\frac{(1-t)+1}{(1-t)^2}\right)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{\pi h^2}{2}\left(\ln(1+t)-\frac{1}{1+t}-\ln(1-t)+\frac{1}{1-t}\right)\Bigg|_0^{\frac{a}{\sqrt{h^2+a^2}}}$$
$$=\frac{\pi h^2}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{h^2+a^2}+a}{\sqrt{h^2+a^2}-a}+\frac{2a\sqrt{h^2+a^2}}{h^2}\right).$$

(8) 记 $x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$, 则有

$$r^4=2a^2r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\implies r^2=a^2\sin^2\theta\sin 2\varphi,\quad \theta\in[0,\pi],\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right].$$

由对称性, 不妨只考虑

$$D=\left\{(\theta,\varphi)\Big|\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right\},$$

则

$$E=(a\sin 2\theta\cos\varphi\sqrt{\sin 2\varphi})^2+(a\sin 2\theta\sin\varphi\sqrt{\sin 2\varphi})^2+(a\cos 2\theta\sqrt{\sin 2\varphi})^2=a^2\sin 2\varphi,$$
$$F=a^2\sin 2\theta\sin^2\theta\cos\varphi\cos 3\varphi+a^2\sin 2\theta\sin^2\theta\sin\varphi\sin 3\varphi+a^2\cos 2\theta\sin\theta\cos\theta\cos 2\varphi$$
$$=a^2\sin\theta\cos\theta\cos 2\varphi,$$
$$G=\left(\frac{a\sin^2\theta\cos 3\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}\right)^2+\left(\frac{a\sin^2\theta\sin 3\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}\right)^2+\left(\frac{a\sin\theta\cos\theta\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}\right)^2$$
$$=\frac{a^2}{\sin 2\varphi}(\sin^4\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta\cos^2 2\varphi),$$
$$\implies\sqrt{EG-F^2}=a^2\sin^2\theta,$$

从而

$$\sigma = 4\iint_D d\sigma = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2\theta\, d\varphi = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$
$$= 4a^2\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2 a^2}{2}.$$

□

11.2.2 计算下列曲面积分.

(1) $\iint_S (x+y+z)\,dS$, S : 立方体 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$ 的全表面;

(2) $\iint_S xyz\,dS$, $S : x+y+z=1$ 在第一卦限部分;

(3) $\iint_S (x^2+y^2)\,dS$, S : 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=1$ 所围成的立体表面;

(4) $\iint_S (xy+yz+zx)\,dS$, S : 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$ 所割下的那块曲面;

(5) $\iint_S (x^4-y^4+y^2z^2-x^2z^2+1)\,dS$, S : 圆锥 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截下的部分;

(6) $\iint_S \frac{dS}{r^2}$, S : 圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=H$ 之间的部分, r 是 S 上的点到原点的距离;

(7) $\iint_S |xyz|\,dS$, S 为曲面 $z=x^2+y^2$ 介于二平面 $z=0$ 和 $z=1$ 间的部分.

解 (1)

(2) 区域上一点 $(x,y,z)=(x,y,1-x-y)$, 则

$$\begin{aligned}\iint_S xyz\,d\sigma &= \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\cdot xy(1-x-y)\sqrt{1+1+1}\\ &= \int_0^1 dx\cdot\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}x(1-x)y^2 - \frac{1}{3}xy^3\right)\Big|_0^{1-x}\\ &= \sqrt{3}\int_0^1 \frac{1}{6}x(1-x)^3\,dx\\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}\int_0^1 x(1-3x+3x^2-x^3)\,dx\\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1\\ &= \frac{\sqrt{3}}{120}.\end{aligned}$$

(3)

(4) 曲面上一点 $(x,y,z)=(x,y,\sqrt{x^2+y^2})$,

$$\begin{aligned}\iint_S (yz+zx+xy)\,dS &= \iint_{x^2+y^2\leqslant 2ax} (xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{z^2}}\,dx\,dy\\ &= \sqrt{2}\iint_{x^2+y^2\leqslant 2ax} (xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy,\end{aligned}$$

记 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则积分区域化为

$$D=\left\{(r,\theta)\middle|-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 2a\cos\theta\right\},$$

从而积分式

$$\begin{aligned}
&=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{2a\cos\theta}(r^2\sin\theta\cos\theta+r^2(\sin\theta+\cos\theta))r\,\mathrm{d}r\\
&=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\cdot(\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta)\cdot\left(\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{2a\cos\theta}\right)\\
&=4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta(\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\\
&=4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^5\theta\sin\theta+\cos^4\theta\sin\theta+(1-\sin^2\theta)^2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\\
&=4\sqrt{2}a^4\left(-\frac{1}{6}\cos^6\theta-\frac{1}{5}\cos^5\theta+\sin\theta-\frac{2}{3}\sin^3\theta+\frac{1}{5}\sin^5\theta\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4.
\end{aligned}$$

(5)

(6)

(7) 曲面上一点 $(x,y,z)=(x,y,x^2+y^2)$, 由对称性, 只需考虑 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^+\middle|x^2+y^2\leqslant 1\right\}$ 的部分, 则

$$\iint_S|xyz|\,\mathrm{d}S=4\iint_D xy(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

记 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则积分区域化为

$$D'=\left\{(r,\theta)\middle|0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

从而

$$\begin{aligned}
&4\iint_D xy(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\iint_0^1\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\cdot r^2\sin\theta\cos\theta r^2\sqrt{1+4r^2}r\\
&=2\int_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta=2\left(-\frac{1}{2}\cos 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\int_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r\\
&=\int_0^1 r^4\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r^2\xlongequal{r^2=t}\int_0^1 t^2\sqrt{1+4t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{6}\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}(1+4t)^{\frac{3}{2}}\\
&=\frac{1}{6}\left(t^2(1+4t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-2\int_0^1 t(1+4t)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t\right)=\frac{5\sqrt{5}}{6}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10}\int_0^1 t\,\mathrm{d}(1+4t)^{\frac{5}{2}}\\
&=\frac{5\sqrt{5}}{6}-\frac{1}{30}\left(t(1+4t)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1-\int_0^1(1+4t)^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}t\right)=\frac{5\sqrt{5}}{6}-\frac{25\sqrt{5}}{30}+\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{14}(1+4t)^{\frac{7}{2}}\Big|_0^1\\
&=\frac{5\sqrt{5}}{6}-\frac{25\sqrt{5}}{30}+\frac{1}{420}(125\sqrt{5}-1)=\frac{1}{420}(125\sqrt{5}-1).
\end{aligned}$$

□

11.2.3 利用对称性计算曲面积分.

(1) $\iint_S (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S,\ S: x^2+y^2+z^2=R^2$;

(2) $\iint_S (x+y+z)\,\mathrm{d}S,\ S: x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geqslant 0)$.

解 (1) 由对称性知,

$$\iint_S (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S=\frac{2}{3}\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S=\frac{2}{3}R^2\iint_S \mathrm{d}S=\frac{8\pi}{3}R^4.$$

(2)

□

11.2.4 设 G 是平面 $Ax+By+Cz+D=0\ (C\neq 0)$ 上的一个有界闭区域, 它在 Oxy 平面上的投影是 G_1, 试证: $\dfrac{\sigma(G)}{\sigma(G_1)}=\sqrt{\dfrac{A^2+B^2+C^2}{C^2}}$, 其中 $\sigma(D)$ 表示区域 D 的面积.

证明 设 G_1 内一点 (u,v), 则其对应 G 上一点 $\left(u,v,\dfrac{D-Au-Bv}{C}\right)$,

$$E=1+\frac{A^2}{C^2},\quad F=\frac{AB}{C^2},\quad G=1+\frac{B^2}{C^2},$$

从而面积元素

$$\mathrm{d}\sigma=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\sigma_1=\sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2}{C^2}}\,\mathrm{d}\sigma_1$$

$$\Longrightarrow\ \sigma(G)=\iint_G \mathrm{d}\sigma=\iint_{G_1}\sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2}{C^2}}\,\mathrm{d}\sigma_1=\sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2}{C^2}}\sigma(G_1).$$

□

11.2.5 求抛物面壳 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)\ (0\leqslant z\leqslant 1)$ 的质量, 其各点的密度为 $\rho=z$.

11.2.6 一个半径为 R 的均匀球壳 (密度为 ρ) 绕其直径旋转, 求它的转动惯量.

11.2.7 一个密度为 ρ 的均匀截锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\leqslant a\leqslant z\leqslant b)$, 求它的对于处在锥顶的质量为 m 的质点的引力.

11.3 向量场在曲线上的积分

11.3.1 计算下列第二型曲线积分.

(1) $\int_L (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$, L 是曲线 $y=1-|1-x|$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(2,0)$;

(2) $\int_L \dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$, L 是沿正方形 $A(1,0),B(0,1),C(-1,0),D(0,-1)$ 逆时针一周的路径;

(3) $\int_L \dfrac{-x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$, 逆时针方向一周的路径;

(4) $\displaystyle\int_L y^2\,\mathrm{d}x+xy\,\mathrm{d}y+xz\,\mathrm{d}z$, L 是从 $O(0,0,0)$ 到 $A(1,0,0)$ 再到 $B(1,1,0)$ 最后到 $C(1,1,1)$ 的折线段;

(5) $\displaystyle\int_L \mathrm{e}^{x+y+z}\,\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{x+y+z}\,\mathrm{d}y+\mathrm{e}^{x+y+z}\,\mathrm{d}z$, L 是 $x=\cos\varphi, y=\sin\varphi, z=\dfrac{\varphi}{\pi}$ 从点 $A(1,0,0)$ 到点 $B\left(0,1,\dfrac{1}{2}\right)$;

(6) $\displaystyle\int_L y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z$, L 是 $x+y=2$ 与 $x^2+y^2+z^2=2(x+y)$ 的交线, 从原点看去是顺时针方向.

解 (1) 记

$$L_1=\{(x,y)|y=x,0\leqslant x\leqslant 1\},\quad L_2=\{(x,y)|y=-x+2,1\leqslant x\leqslant 2\},$$

则

$$\begin{aligned}&\int_L(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y\\&=\int_{L_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y+\int_{L_2}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^1 2x^2\,\mathrm{d}x+\int_1^2(x^2+(-x+2)^2)\,\mathrm{d}x-\int_1^2(x^2-(-x+2)^2)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1+2\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right)\Big|_1^2=\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

(2) 易知 $(x,y)\in L$ 满足 $|x|+|y|=1$, 从而

$$\int_L\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}=\int_L\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=0,$$

其中已用到 $P=Q=1\implies\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=0$, 由 Green 公式知上述积分为零.

(3) 记 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta$, 则

$$\begin{aligned}\int_L\frac{-x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}&=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}(-a\cos\theta\cdot(-a\sin\theta)+a\sin\theta\cdot a\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta=-\frac{1}{2}\cos 2\theta\Big|_0^{2\pi}=0.\end{aligned}$$

(4)

(5)

(6) 曲线上任一点 $(x,y,z)=(1-\cos\theta,1+\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta)$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$, 从而

$$\begin{aligned}&\int_L y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}((1+\cos\theta)\cdot\sin\theta+\sqrt{2}\sin\theta\cdot(-\sin\theta)+(1-\cos\theta)\cdot\sqrt{2}\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\left(\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta+\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{2}\right)\mathrm{d}\theta\\&=\left(-\cos\theta-\frac{1}{4}\cos 2\theta+\sqrt{2}\sin\theta-\sqrt{2}\theta\right)\Big|_0^{2\pi}\\&=-2\sqrt{2}\pi.\end{aligned}$$

□

11.3.2 求向量场 $\boldsymbol{v}=(y+z)\boldsymbol{i}+(z+x)\boldsymbol{j}+(x+y)\boldsymbol{k}$ 沿曲线 $L: x=a\sin^2 t, y=2a\sin t\cos t, z=a\cos^2 t\ (0\leqslant t\leqslant\pi)$ 参数增加方向的曲线积分.

解 计算得:

$$\begin{aligned}\int_L \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_L (y+z)\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}y+(x+y)\,\mathrm{d}z\\ &= \int_0^{\pi}((2a\sin t\cos t+a\cos^2 t)\cdot 2a\sin t\cos t+a\cdot 2a\cos 2t\\ &\qquad +(a\sin^2 t+2a\sin t\cos t)\cdot(-2a\cos t\sin t))\,\mathrm{d}t\\ &= a^2\int_0^{2\pi}(\cos 2t\sin 2t+2\cos 2t)\,\mathrm{d}t\\ &= a^2\left(-\frac{1}{8}\cos 4t+\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}=0.\end{aligned}$$

□

11.3.3 设一质点处于弹性力场中, 弹力方向指向原点, 大小与质点离原点的距离成正比, 比例系数为 k, 若质点沿椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 从点 $(a,0)$ 移到点 $(0,b)$, 求弹性力所做的功.

11.3.4 利用 Green 公式, 计算下列曲线积分.

(1) $\oint_L (x+y)^2\,\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$, L 是顶点为 $A(1,1),B(3,3),C(3,5)$ 的三角形的周界, 沿逆时针方向;

(2) $\oint_L (xy+x+y)\,\mathrm{d}x+(xy+x-y)\,\mathrm{d}y$, L 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 沿顺时针方向;

(3) $\oint_L (yx^3+\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}x+(xy^3+x\mathrm{e}^y-2y)\,\mathrm{d}y$, L 是对称于两坐标轴的闭曲线;

(4) $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]\,\mathrm{d}y$, L 是 $y^2=x-1$ 与 $x=2$ 围成的封闭曲线沿逆时针方向;

(5) $\int_L (x^2+2xy-y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2-2xy+y^2)\,\mathrm{d}y$, L : 从点 $A(0,-1)$ 沿直线 $y=x-1$ 到点 $M(1,0)$, 再从 M 沿圆周 $x^2+y^2=1$ 到点 $B(0,1)$;

(6) $\int_L (\mathrm{e}^x\sin y-my)\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\,\mathrm{d}y$, 其中 L : 由点 $A(a,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax\ (a>0)$.

解 (1)

(2)

(3) 记

$$P=yx^3+\mathrm{e}^y,\quad Q=xy^3+x\mathrm{e}^y-2y,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=y^3+\mathrm{e}^y-(x^3+\mathrm{e}^y)=y^3-x^3,$$

由 Green 公式知,

$$\oint_L (yx^3+\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}x+(xy^3+x\mathrm{e}^y-2y)\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D (y^3-x^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $D:\partial D=L$.

由区域 D 关于原点对称, 且被积函数 $f(x,y)=y^3-x^3$ 满足 $f(-x,-y)=-f(x,y)$ 知,

$$\oint_L (yx^3+\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}x+(xy^3+x\mathrm{e}^y-2y)\,\mathrm{d}y=\iint_D (y^3-x^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.$$

(4)

(5) 记

$$P=x^2+2xy-y^2,\quad Q=x^2-2xy+y^2,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=(2x-2y)-(2x-2y)=0,$$

故原积分与路径无关, 记 L' : 线段 AB, 则

$$\begin{aligned}&\int_L (x^2+2xy-y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2-2xy+y^2)\,\mathrm{d}y\\=&\int_{L'} (x^2+2xy-y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2-2xy+y^2)\,\mathrm{d}y\\=&\int_{-1}^{1} y^2\,\mathrm{d}y=\frac{1}{3}y^3\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

(6) 设 L' : 由点 $A(a,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的下半圆周 $x^2+y^2=ax$. 记

$$P=\mathrm{e}^x\sin y-my,\quad Q=\mathrm{e}^x\cos y-m,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cos y-(\mathrm{e}^x\cos y-m)=m,$$

则有

$$P(x,-y)\,\mathrm{d}x=-P(x,y)\,\mathrm{d}x,\quad Q(x,-y)\,\mathrm{d}(-y)=-Q(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

故

$$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=-\int_{L'} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_{-L'} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{L+(-L')} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y,$$

由 Green 公式知, 上式

$$=\frac{1}{2}\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_D m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{m}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi a^2=\frac{1}{8}\pi ma^2,$$

其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant ax\right\},\partial D=L+(-L')$. □

11.3.5 利用曲线积分计算下列区域的面积.

(1) 星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 围成的区域;

(2) 旋轮线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与 Ox 轴所围成的区域 D.

解 (1)

(2) 由 Green 公式知,

$$\begin{aligned}\sigma(D)&=\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\oint_{L=\partial D} y\,\mathrm{d}x\\&=-\int_{2\pi}^{0} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,\mathrm{d}t\\&=a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)\mathrm{d}t\\&=a^2\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}\\&=3\pi a^2.\end{aligned}$$

□

11.3.6 计算曲线积分 $\displaystyle\int_L \frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

(1) L_1 为从点 $A(-a,0)$ 沿圆周 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 到点 $B(a,0), a>0$;

(2) L_2 为从点 $A(-1,0)$ 沿抛物线 $y=4-(x-1)^2$ 到点 $B(3,0)$.

解 (1) 记 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta$, 则

$$\int_{L_1}\frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_\pi^0\frac{-a\sin\theta\cdot(-a\sin\theta)+a\cos\theta\cdot a\cos\theta}{a^2}\,\mathrm{d}\theta=\int_\pi^0\mathrm{d}\theta=-\pi.$$

(2) 取 $a=\dfrac{1}{2}$, D : 由 $L_1, L_2, y=0$ 围成的区域, 则 $\partial D=(-L_2)+\overrightarrow{AC}+L_1+\overrightarrow{DB}$, 其中 $C\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$, $D\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

记

$$\begin{aligned}P=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad Q=\frac{x}{x^2+y^2},\\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=0,\end{aligned}$$

由 Green 公式知,

$$\begin{aligned}&\int_{\partial D}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\left(\int_{-L_2}+\int_{AC}+\int_{L_1}+\int_{DB}\right)P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=0\\ \Longrightarrow&\int_{L_2}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\left(\int_{AC}+\int_{L_1}+\int_{DB}\right)P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_{L_1}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=-\pi.\end{aligned}$$

□

11.3.7 设 D 是平面上由简单闭曲线 L 围成的区域.

(1) 如果 $f(x,y)$ 有连续的二阶偏导数, 证明:

$$\oint_L \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s = \iint_D \Delta f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是曲线 L 的单位外法向量, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称为二维的 Laplace 算子.

推论 当 f 满足 Laplace 方程 $\Delta f = 0$ 时, 有 $\displaystyle\oint_L \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s = 0$.

(2) 如果 $\boldsymbol{a}$ 是单位常值向量, 证明:

$$\oint_L \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}s = 0.$$

(3) 如果 $u(x,y), v(x,y)$ 有连续的二阶导数, 证明下列**第二 Green 公式**:

$$\oint_L \left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}s = \iint_D (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

提示 设单位外法向量为 $\boldsymbol{n} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j}$, 则平面曲线 L 指向逆时针方向的单位切向量为 $\boldsymbol{\tau} = -\cos\beta\boldsymbol{i} + \cos\alpha\boldsymbol{j}$.

证明 (1) 设曲线 L 的单位切向量为

$$\boldsymbol{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta), \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1,$$

则 $\boldsymbol{n} = (\cos\beta, -\cos\alpha)$. 从而由 Green 公式知,

$$\begin{aligned}\oint_L \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s &= \oint_L \nabla f\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \oint_L\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\beta - \frac{\partial f}{\partial y}\cos\alpha\right)\mathrm{d}s\\ &= \oint_L -\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}y = \iint_D\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \iint_D \Delta f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

(2) 设 $\boldsymbol{a} = (a,b), a^2+b^2 = 1$, 由 Green 公式得:

$$\begin{aligned}\oint_L \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}s = \oint_L \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s &= \oint_L (a\cos\beta - b\cos\alpha)\,\mathrm{d}s\\ &= \oint_L a\,\mathrm{d}y - b\,\mathrm{d}x = \iint_D\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.\end{aligned}$$

(3) 由上述讨论及 Green 公式知,

$$\begin{aligned}\oint_L\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}s &= \oint_L v\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y\right) - u\left(-\frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}y\right)\\ &= \oint_L\left(-v\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x + \left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}y\\ &= \iint_D\left(v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \iint_D (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

□

11.4 向量场在曲面上的积分

11.4.1 计算下列第二型曲面积分.

(1) $\displaystyle\iint_S (x+y^2+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧;

(2) $\displaystyle\iint_S xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 是柱面 $x^2+z^2=R^2$ 在 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 两卦限内被平面 $y=0$ 及 $y=h$ 所截下部分的外侧;

(3) $\displaystyle\iint_S xy^2z^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的 $x\leqslant 0$ 的部分, 远离球心一侧;

(4) $\displaystyle\iint_S yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$, S 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的上半部分 $(z\geqslant 0)$ 并取外侧;

(5) $\displaystyle\iint_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限的部分, 远离原点的一侧;

(6) $\displaystyle\iint_S (y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 是圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧;

(7) $\displaystyle\iint_S xz^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x^2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+y^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 是通过上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧;

(8) $\displaystyle\iint_S f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+g(y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+h(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $f(x),g(y),h(z)$ 为连续函数, S 为直角平行六面体 $0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b, 0\leqslant z\leqslant c$ 的外侧.

解 (1)

(2) 曲面上任意一点 $(x,y,z)=(R\cos\theta, y, R\sin\theta)$ $\left(0\leqslant y\leqslant h, -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,y)}=\begin{vmatrix}-R\sin\theta & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-R\sin\theta,$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \iint_S xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^h\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2\sin\theta\cos\theta\cdot y\cdot R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}y\\ &= R^3\int_0^h y\,\mathrm{d}y\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,\mathrm{d}(\sin\theta)\\ &= R^3\cdot\frac{1}{2}h^2\cdot\left(\frac{1}{3}\sin^3\theta\right)\bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{1}{3}R^3h^2.\end{aligned}$$

(3)

(4) 记 $(x,y,z)=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$ $\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\right)$.

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}-\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta\\ 0 & -\sin\theta\sin\varphi\end{vmatrix}=\sin^2\theta\sin\varphi,$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \iint_S yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cdot\sin^2\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\\ &=\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,\mathrm{d}(\sin\theta)\\ &=\left(\frac{1}{2}\varphi-\frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)\left(\frac{1}{4}\sin^4\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\\ &=\frac{1}{4}\pi.\end{aligned}$$

(5)

(6) 记 $(x,y,z)=(r\cos\theta,r\sin\theta,r)$ $(0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$, 取其法向量 $\boldsymbol{n}=(r\cos\theta,r\sin\theta,-r)$, 则

$$\begin{aligned}&(y-z,z-x,x-y)\cdot\boldsymbol{n}=2r^2(\sin\theta-\cos\theta),\\ \Longrightarrow &\iint_S(y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &=\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r^2(\sin\theta-\cos\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\ &=2\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}(\sin\theta-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\\ &=2\left(\frac{1}{3}r^3\Big|_0^1\right)\left((-\cos\theta-\sin\theta)\Big|_0^{2\pi}\right)\\ &=0.\end{aligned}$$

(7)

(8) 先计算

$$\iint_S f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

显然, 上述积分只在

$$\varSigma_1=\{(x,y,z)|x=0,0\leqslant y\leqslant b,0\leqslant z\leqslant c\},\quad \varSigma_2=\{(x,y,z)|x=a,0\leqslant y\leqslant b,0\leqslant z\leqslant c\}$$

两个面上值不为零, 从而

$$\begin{aligned}\iint_S f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z&=\iint_{\varSigma_1}f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iint_{\varSigma_2}f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &=-f(0)\iint_{D_1}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+f(a)\iint_{D_2}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &=(f(a)-f(0))bc,\end{aligned}$$

其中 $\iint_{D_1}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $\iint_{D_2}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 分别表示在 $\varSigma_1,\varSigma_2$ 上的二重积分.

同理可计算得:

$$\iint_S g(y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = (g(b)-g(0))ca, \quad \iint_S h(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (h(c)-h(0))ab,$$

$$\Longrightarrow \iint_S f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + g(y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + h(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= (f(a)-f(0))bc + (g(b)-g(0))ca + (h(c)-h(0))ab.$$

□

11.4.2 求场 $\boldsymbol{v} = (x^3 - yz)\boldsymbol{i} - 2x^2y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 通过长方体 $0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b, 0 \leqslant z \leqslant c$ 的外侧表面 S 的通量.

解 记 D_1 是长方体在 Oyz 平面内的面, D_2 是其对面, 类似地定义 D_3, D_4, D_5, D_6. 易知,

$$\begin{aligned}
\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S &= -\iint_{D_1}(-yz)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint_{D_2}(a^3 - yz)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&\quad - \iint_{D_3} 0\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \iint_{D_4}(-2x^2\cdot b)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \\
&\quad - \iint_{D_5} 0\cdot\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_6} c\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= a^3\iint_{D_1}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - 2b\iint_{D_4}x^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + c\iint_{D_6}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= a^3bc - 2bc\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^a + cab = \frac{1}{3}a^3bc + abc.
\end{aligned}$$

□

11.5 Gauss 定理和 Stokes 定理

11.5.1 计算下列曲面积分.

(1) $\iint_S (x+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (xy+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 是以 $O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ 为顶点的四面体的外表面;

(2) $\iint_S xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + zx\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 是由 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 所围成的四面体的外侧表面;

(3) $\iint_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 是球面 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ 的外侧;

(4) $\iint_S xy^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + yz^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + zx^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 是球面 $x^2+y^2+z^2 = z$ 的外侧;

(5) $\iint_S (x-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 是旋转抛物面 $z = x^2+y^2$ $(0 \leqslant z \leqslant 1)$ 的下侧;

(6) $\iint_S (y^2+z^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (z^2+x^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2 = a^2$ $(z \geqslant 0)$ 的上侧.

解 (1)

(2) 记 $\boldsymbol{v}=(xy,yz,zx)$, 则 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=y+z+x$, 记 V 为 S 所围成的四面体, 由 Gauss 定理得:

$$\oiint_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V=\iiint_V (x+y+z)\,\mathrm{d}V,$$

考虑 $f(x,y,z)=x+y+z$ 的等值面, 记 $V(t)$ 为 $x=0,y=0,z=0,x+y+z=t$ 所围成的四面体的体积, 易得 $V(t)=\frac{1}{6}t^3 \implies \mathrm{d}V=\mathrm{d}\left(\frac{1}{6}t^3\right)=\frac{1}{2}t^2\,\mathrm{d}t$, 从而

$$\iiint_V (x+y+z)\,\mathrm{d}V=\int_0^1 t\cdot\frac{1}{2}t^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{8}t^4\bigg|_0^1=\frac{1}{8}.$$

说明 本题也可以直接计算曲面积分或对 $\iiint_V (x+y+z)\,\mathrm{d}V$ 通过重积分进行计算.

(3)

(4) 记 $\boldsymbol{v}=(xy^2,yz^2,zx^2) \implies \nabla\cdot\boldsymbol{v}=y^2+z^2+x^2$, 记 V 是 S 围成的闭区域, 由 Gauss 定理得:

$$\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V=\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V,$$

记 $x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$, 则积分区域化为

$$D=\left\{(r,\theta,\varphi)\Big|0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant\cos\theta\right\},$$

且

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=r^2\sin\theta,\\
\implies \iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V&=\iiint_D r^2\cdot r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\
&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta} r^4\,\mathrm{d}r\\
&=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{5}\cos^5\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\\
&=-\frac{2\pi}{5}\cdot\left(\frac{1}{6}\cos^6\theta\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\\
&=\frac{\pi}{15}.
\end{aligned}$$

(5)

(6) 记 $\boldsymbol{v}=(y^2+z^2,z^2+x^2,x^2+y^2) \implies \nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$, 记 V 是由 S 和 $\Sigma: x^2+y^2\leqslant a^2, z=0$ 围成的区域, 取 Σ 法向为 $(0,0,-1)$, 由 Gauss 定理得:

$$\left(\iint_S+\iint_\Sigma\right)\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V=0 \implies \iint_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\iint_\Sigma \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $\iint_D$ 表示在 Σ 区域内的二重积分.

记 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则积分区域化为 $D'=\{(r,\theta)|0\leqslant r\leqslant a, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$, 从而

$$\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D'} r^2\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\int_0^a r^3\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=\left(\frac{1}{4}r^4\bigg|_0^a\right)\cdot 2\pi=\frac{\pi a^4}{2}.$$

□

11.5.2 求引力场 $\boldsymbol{F}=-km\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ 通过下列闭曲面外侧的通量:

(1) 空间中任一包围质量 m (在原点) 的闭曲面;

(2) 空间中任一不包围质量 m 的闭曲面;

(3) 质量 m 在光滑的闭曲面上.

(1)

(2)

(3)

11.5.3 设区域 V 是由曲面 $x^2+y^2-\dfrac{z^2}{2}=1$ 及平面 $z=1, z=-1$ 围成, S 为 V 的全表面外侧, 又设 $\boldsymbol{v}=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$. 求积分

$$\iint_S \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_S \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}.$$

11.5.4 设对于半空间 $x>0$ 内任一的光滑有向封闭曲面 S, 都有

$$\oiint_S xf(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-xyf(x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有连续的一阶导数, 且 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$, 求 $f(x)$.

解 记 $\boldsymbol{v}=(xf(x),-xyf(x),-\mathrm{e}^{2x}z) \implies \nabla\cdot\boldsymbol{v}=xf'(x)+(1-x)f(x)-\mathrm{e}^{2x}$, 记 V 是 S 围成的闭区域, 由 Gauss 定理得:

$$\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V=0,$$

由 V 的任意性知, $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$ 对 $x>0$ 恒成立, 即

$$xf'+(1-x)f-\mathrm{e}^{2x}=0.$$

考虑上述微分方程对应的齐次线性方程的解 f_{h}.

$$xf'+(1-x)f=0 \implies \frac{\mathrm{d}f}{f}=\left(1-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \implies \ln|f|=x-\ln x+C_1$$

$$f_{\mathrm{h}}=\pm\mathrm{e}^{x-\ln x+C_1}=\frac{C\mathrm{e}^x}{x},\quad C\in\mathbb{R}.$$

下面考虑原非齐次线性方程的特解 $f_{\mathrm{p}}=\dfrac{C(x)\mathrm{e}^x}{x}$, 代入原方程得:

$$x\cdot C'(x)\frac{\mathrm{e}^x}{x}=\mathrm{e}^{2x} \implies C'(x)=\mathrm{e}^x \implies C(x)=\mathrm{e}^x \implies f_{\mathrm{p}}=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x},$$

故原方程的通解为

$$f(x)=f_{\mathrm{h}}+f_{\mathrm{p}}=\frac{\mathrm{e}^x(C+\mathrm{e}^x)}{x}=\frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)}{x}+\frac{(C+1)\mathrm{e}^x}{x},$$

注意到,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(C+1)\mathrm{e}^x}{x}=\lim_{x\to0^+}f(x)-\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)}{x}=1-1=0,$$

而 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ 不存在, 故 $C+1=0 \implies C=-1 \implies f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)}{x}$. □

11.5.5 证明任意光滑闭曲面 S 围成的立体体积可以表成

$$V = \frac{1}{3} \oiint_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中积分沿 S 的外侧进行.

证明 记 $\boldsymbol{v} = (x, y, z) \implies \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 3$, 记 D 是由 S 围成的区域, 由 Gauss 定理得:

$$\iint_S \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_D \nabla \cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V = 3 \iiint_D \mathrm{d}V = 3V \implies V = \frac{1}{3} \iint_S \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

□

11.5.6 证明 Archimedes 原理: 物体 V 全部浸入液体中所受的浮力等于物体同体积的液体的重量.

提示 设液体的密度为常数 ρ, 给出物体表面每一小块 $\mathrm{d}S$ 所受到的压力, 通过积分计算 ∂V 的压力.

参考 数学分析教程 12.4.**例 3**.

11.5.7 设 $\boldsymbol{c}$ 是常向量, S 是任意的光滑闭曲面, 证明:

$$\iint_S \cos(\widehat{\boldsymbol{c}, \boldsymbol{n}})\,\mathrm{d}S = 0,$$

其中 $(\widehat{\boldsymbol{c}, \boldsymbol{n}})$ 表示向量 $\boldsymbol{c}$ 与曲面法向量 $\boldsymbol{n}$ 的夹角.

证明 记 V 是 S 所围成的区域, 取 $\boldsymbol{n}$ 是曲面的单位法向量, 由 Gauss 定理得:

$$\iint_S \cos(\widehat{\boldsymbol{c}, \boldsymbol{n}})\,\mathrm{d}S = \iint_S \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \iint_S \nabla \cdot \boldsymbol{c}\,\mathrm{d}V = 0.$$

□

11.5.8 设 L 是 xy 平面上光滑的简单闭曲线, 逆时针方向, 立体 V 是柱体, 它以 L 为准线, 以 L 在 xy 平面内所围平面区域 D 为底, 侧面是母线平行于 z 轴的柱面, 高为 1, 试写出向量场 $\boldsymbol{v} = P(x, y)\boldsymbol{i} + Q(x, y)\boldsymbol{j}$ 在 V 上的 Gauss 公式, 并由此来证明 Green 公式.

11.5.9 计算下列曲线积分.

(1) $\oint_L y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$, L 是顶点为 $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ 的三角形边界, 从原点看去, L 沿顺时针方向;

(2) $\oint_L (y - z)\,\mathrm{d}x + (z - x)\,\mathrm{d}y + (x - y)\,\mathrm{d}z$, L 是圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 和平面 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{h} = 1$ $(a > 0, h > 0)$ 的交线, 从 x 轴的正方向看来, L 沿逆时针方向;

(3) $\oint_L (y^2 - z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}z$, L 是平面 $x + y + z = \dfrac{3}{2}a$ 与立方体 $0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant a, 0 \leqslant z \leqslant a$ 表面的交线从 z 轴正向看来, L 沿逆时针方向;

(4) $\oint_L y^2\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y + xz\,\mathrm{d}z$, L 是圆柱面 $x^2 + y^2 = 2y$ 与平面 $y = z$ 的交线, 从 z 轴正向看来, L 沿逆时针方向;

(5) $\oint_L (y^2-y)\,\mathrm{d}x+(z^2-z)\,\mathrm{d}y+(x^2-x)\,\mathrm{d}z$, L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, L 的方向与 z 轴正向成右手系;

(6)

解　(1)

(2)

(3) 记 $\boldsymbol{v}=(y^2-z^2,z^2-x^2,x^2-y^2) \implies \nabla\times\boldsymbol{v}=-2(y+z,z+x,x+y)$, 记 S 是平面与立方体的截面, 法向 $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, 由 Stokes 定理得:

$$\oint_L \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S \nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_S (x+y+z)\,\mathrm{d}S=-\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2}a\cdot\sigma(S)=-\frac{9}{2}a^3,$$

其中已用到 $\sigma(S)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2\cdot 6=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$.

(4)

(5) 记 $\boldsymbol{v}=(y^2-y,z^2-z,x^2-x) \implies \nabla\times\boldsymbol{v}=(-(2z-1),-(2x-1),-(2y-1))$, 记 S 是球面与平面的截面, 法向 $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, 由 Stokes 定理得:

$$\oint_L \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S \nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S -(2(x+y+z)-3)\,\mathrm{d}S=\sqrt{3}\iint_S \mathrm{d}S=\sqrt{3}\pi a^2.$$

(6) 记 $\boldsymbol{v}=(y^2-z^2,2z^2-x^2,3x^2-y^2) \implies \nabla\times\boldsymbol{v}=(-2y-4z,-2z-6x,-2x-2y)$, 记 S 是平面内 L 围成的区域, 法向 $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, 由 Stokes 定理得:

$$\oint_L \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S \nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S (-8x-4y-6z)\,\mathrm{d}S=\iint_D (-2x+2y-12)\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中 D 是 Oxy 平面内 $|x|+|y|=1$ 围成的区域.

注意到, $f(x,y)=-2x+2y$ 满足 $f(-x,-y)=-f(x,y)$, 由对称性知,

$$\iint_D (-2x+2y)\,\mathrm{d}\sigma=0 \implies \iint_D (-2x+2y-12)\,\mathrm{d}\sigma=-12\iint_D \mathrm{d}\sigma=-12\sigma(D)=-24.$$

□

11.5.10　在积分 $\oint_L x^2y^3\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z$ 中, 路径 L 是 Oxy 平面上正向的圆 $x^2+y^2=R^2, z=0$; 利用 Stokes 公式化曲线积分为以 L 为边界所围区域 S 上的曲面积分.

(1) S 取 Oxy 平面上的圆面 $x^2+y^2\leqslant R^2$;

(2) S 取半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, 结果相同吗?

解　记 $\boldsymbol{v}=(x^2y^3,1,z) \implies \nabla\times\boldsymbol{v}=(1,0,-3x^2y^2)$.

(1) S 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$, 由 Stokes 定理得:

$$\oint_L \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S \nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\iint_S -3x^2y^2\,\mathrm{d}S,$$

记 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 则积分区域化为 $D = \{(r,\theta)|0 \leqslant r \leqslant R, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$, 从而

$$\begin{aligned}\iint_S -3x^2y^2\,\mathrm{d}S &= \iint_D -3r^4\sin^2\theta\cos^2\theta\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = -3\int_0^R r^5\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2\mathrm{d}\theta\\ &= -3\cdot\frac{1}{6}R^6\cdot\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{8}R^6.\end{aligned}$$

(2) S 的单位法向量 $\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{R}(x,y,z)$, 由 Stokes 定理得:

$$\oint_L \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S \nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \frac{1}{R}\iint_S (x-3x^2y^2z)\,\mathrm{d}S,$$

记 $x = R\sin\theta\cos\varphi, y = R\sin\theta\sin\varphi, z = R\cos\theta$, 则积分区域化为

$$D = \left\{(\theta,\varphi)\middle|0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\right\},$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}\iint_S (x-3x^2y^2z)\,\mathrm{d}S &= \frac{1}{R}\iint_D (R\sin\theta\cos\varphi - 3R^5\sin^4\theta\cos^2\varphi\sin^2\varphi\cos\theta)\cdot R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\ &= -3R^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\,\mathrm{d}(\sin\theta)\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\ &= -3R^6\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{8}R^6,\end{aligned}$$

其中已用到

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}\iint_D R^3\sin^2\theta\cos\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi &= R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\ &= R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot\left(\sin\varphi\Big|_0^{2\pi}\right) = 0.\end{aligned}$$

由上述讨论知, 不论 S 的选取如何, 积分结果均相同. □

11.5.11 证明: 常向量场 $\boldsymbol{c}$ 沿任意光滑闭曲线的环量等于 0.

证明 注意到, $\nabla\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$, 记 S 是任意光滑闭曲线围成的曲面, 由 Stokes 定理得:

$$\oint_L \boldsymbol{c}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S \nabla\times\boldsymbol{c}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0.$$

□

11.5.12 求向量场 $\boldsymbol{v} = (y^2+z^2)\boldsymbol{i} + (z^2+x^2)\boldsymbol{j} + (x^2+y^2)\boldsymbol{k}$ 沿曲线 L 的环量. 其中 L 为 $x^2+y^2+z^2 = R^2\ (z \geqslant 0)$ 与 $x^2+y^2 = Rx$ 的交线, 从 x 轴正向看来, L 沿逆时针方向.

解 记 $\boldsymbol{v} = (y^2+z^2, z^2+x^2, x^2+y^2) \implies \nabla\times\boldsymbol{v} = 2(y-z, z-x, x-y)$, 记 S 为球面被柱面所截得的截面, 其单位法向量 $\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{R}(x,y,z)$, 由 Stokes 定理得:

$$\oint_L \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S \nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \frac{2}{R}\iint_S\left(\sum_{\text{cyc}} x(y-z)\right)\mathrm{d}S = 0.$$

□

11.6 其他形式的曲线曲面积分

11.6.1 利用散度的积分表示, 推导出在柱坐标系下的散度.

11.6.2 利用梯度的积分表示, 推导出在球坐标系下的梯度.

11.6.3 设函数 $u(x,y,z)$ 在光滑曲面 S 所围成的闭区域 V 上具有指导二阶的连续偏微商, 且满足 Laplace 方程:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

试证明:

(1) $\displaystyle\oiint_S \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S=0$;

(2) $\displaystyle\oiint_S u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S=\iiint_V (\nabla u)^2\,\mathrm{d}V$, 其中 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 是沿 S 外侧法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向微商.

(1)

(2)

11.7 保守场

11.7.1 设平面上有四条路径:

L_1 : 折线, 从 $(0,0)$ 到 $(1,0)$ 再到 $(1,1)$;

L_2 : 从 $(0,0)$ 沿着抛物线 $y=x^2$ 到 $(1,1)$;

L_3 : 从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的直线段;

L_4 : 折线, 从 $(0,0)$ 到 $(0,1)$ 再到 $(1,1)$.

求下列力场 $\boldsymbol{F}$ 沿上述四条路径所作的功, 并说明它们的值为什么会不相等或不相等.

(1) $\boldsymbol{F}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$;

(2) $\boldsymbol{F}=2xy\boldsymbol{i}+x^2\boldsymbol{j}$.

(1)

(2)

11.7.2 求下列曲线积分.

(1) $\displaystyle\int_L (2x+y)\,\mathrm{d}x+(x+4y+2z)\,\mathrm{d}y+(2y-6z)\,\mathrm{d}z$, 其中 L 由点 $P_1(a,0,0)$ 沿曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ z=0 \end{cases}$ 到 $P_2(0,a,0)$, 再由 P_2 沿直线 $\begin{cases} z+y=a, \\ x=0 \end{cases}$ 到点 $P_3(0,0,a)$;

(2) $\displaystyle\int_{\widehat{AMB}} (x^2-yz)\,\mathrm{d}x+(y^2-zx)\,\mathrm{d}y+(z^2-xy)\,\mathrm{d}z$, 其中 $\widehat{AMB}$ 是柱面螺线 $x=a\cos\varphi, y=a\sin\varphi, z=\dfrac{h}{2\pi}\varphi$ 上点 $A(a,0,0)$ 到 $B(a,0,h)$ 的一段.

解 (1) 记 $\boldsymbol{v}=(2x+y,x+4y+2z,2y-6z) \implies \nabla\times\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$, 从而由 Stokes 定理得:

$$\begin{aligned}\int_L \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=\int_{P_1}^{P_3}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{P_1}^{O}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{O}^{P_3}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\&=\int_a^0 2x\,\mathrm{d}x+\int_0^a(-6z)\,\mathrm{d}z=\left(x^2\Big|_a^0\right)+\left(-3z^2\Big|_0^a\right)=-4a^2.\end{aligned}$$

(2)

□

11.7.3 证明下列向量场是有势场, 并求出它们的势函数.

(1) $\boldsymbol{v}=(2x\cos y-y^2\sin x)\boldsymbol{i}+(2y\cos x-x^2\sin y)\boldsymbol{j}$;

(2) $\boldsymbol{v}=yz(2x+y+z)\boldsymbol{i}+xz(2y+z+x)\boldsymbol{j}+xy(2z+x+y)\boldsymbol{k}$;

(3) $\boldsymbol{v}=r^2\boldsymbol{r}$, 其中 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}, r=|\boldsymbol{r}|$.

解 (1) 记 $\boldsymbol{v}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j} \implies \dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=(-2y\sin x-2x\sin y)-(-2x\sin y-2y\sin x)=0$, 故 $\boldsymbol{v}$ 是无旋场, 从而是有势场. 其势函数

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+C=\left(\int_{(0,0)}^{(x,0)}+\int_{(x,0)}^{(x,y)}\right)\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+C\\&=\int_0^x(2x\cos y-y^2\sin x)\Big|_{y=0}\mathrm{d}x+\int_0^y(2y\cos x-x^2\sin y)\,\mathrm{d}y+C\\&=x^2+(y^2\cos x+x^2\cos y)\Big|_0^y+C=y^2\cos x+x^2\cos y+C.\end{aligned}$$

(2)

(3) 由球坐标下的旋度公式知 $\nabla\times\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$, 故 $\boldsymbol{v}$ 是无旋场, 从而是有势场. 其势函数

$$\varphi(r,\theta,\phi)=\int_{(0,0,0)}^{(r,\theta,\phi)}r^2\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+C=\int_0^r r^3\,\mathrm{d}r+C=\frac{1}{4}r^4+C.$$

□

11.7.4 当 a 取何值时, 向量场 $\boldsymbol{F}=(x^2+5ay+3yz)\boldsymbol{i}+(5x+3axz-2)\boldsymbol{j}+[(a+2)xy-4z]\boldsymbol{k}$ 是有势场, 并求出此时的势函数.

解 $\boldsymbol{F}$ 是有势场, 因此是无源场, 令

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{F}&=((a+2)x-3ax,3y-(a+2)y,(5+3az)-(5a+3z))\\&=((2-2a)x,(1-a)y,(3a-3)z+5-5a)=\mathbf{0}\\\implies a&=1,\quad \boldsymbol{F}=(x^2+5y+3yz,5x+3xz-2,3xy-4z),\end{aligned}$$

从而其势函数

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z)&=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+C=\left(\int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)}+\int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)}+\int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)}\right)\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+C\\&=\int_0^x x^2\,\mathrm{d}x+\int_0^y(5x-2)\,\mathrm{d}y+\int_0^z(3xy-4z)\,\mathrm{d}z+C\\&=\frac{1}{3}x^3+(5x-2)y+(3xyz-2z^2)+C.\end{aligned}$$

□

11.7.5 求下列全微分的原函数 u:

(1) $\mathrm{d}u = (3x^2 + 6xy^2)\,\mathrm{d}x + (6x^2y - 4y^3)\,\mathrm{d}y$;

(2) $\mathrm{d}u = (x^2 - 2yz)\,\mathrm{d}x + (y^2 - 2xz)\,\mathrm{d}y + (z^2 - 2xy)\,\mathrm{d}z$.

解 (1) $u(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 - y^4 + C$, $C \in \mathbb{R}$;

(2) $u(x, y, z) = \dfrac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C$, $C \in \mathbb{R}$. □

11.7.6 验证下列积分与路径无关, 并求出它们的值.

(1) $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x - y)(\mathrm{d}x - \mathrm{d}y)$;

(2) $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(2,2)} \left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + 1\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y$;

(3) $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(6,3)} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

(4) $\displaystyle\int_{(0,0,2)}^{(2,3,-4)} x\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y - z^3\,\mathrm{d}z$;

(5) $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y - \frac{xy}{z^2}\,\mathrm{d}z$;

(6) $\displaystyle\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, 其中 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 上.

解 (1)

(2)

(3)

(4)

(5) 记 $\boldsymbol{F} = \left(1 - \dfrac{1}{y} + \dfrac{y}{z}, \dfrac{x}{z} + \dfrac{x}{y^2}, -\dfrac{xy}{z^2}\right)$, 则

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \left(-\frac{x}{z^2} + \frac{x}{z^2}, -\frac{y}{z^2} + \frac{y}{z^2}, \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{y^2}\right) - \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z}\right)\right) = \mathbf{0},$$

故 $\boldsymbol{F}$ 在 $\mathbb{R}^3_+$ 上是无旋场, 从而是保守场, 其曲线积分与路径无关,

$$\begin{aligned}
&\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y - \frac{xy}{z^2}\,\mathrm{d}z \\
&= \left(\int_{(1,1,1)}^{(2,1,1)} + \int_{(2,1,1)}^{(2,2,1)} + \int_{(2,2,1)}^{(2,2,2)}\right)\left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y - \frac{xy}{z^2}\,\mathrm{d}z \\
&= \int_1^2 1 \cdot \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(2 + \frac{2}{y^2}\right)\mathrm{d}y - \int_1^2 \frac{4}{z^2}\,\mathrm{d}z \\
&= \left(x\Big|_1^2\right) + \left(2y - \frac{2}{y}\right)\Big|_1^2 + \left(\frac{4}{z}\Big|_1^2\right) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

(6) 记 $\boldsymbol{F}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)$, 则

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}(-yz+yz,-zx+zx,-xy+xy)=\mathbf{0},$$

故 $\boldsymbol{F}$ 在 $\mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{0}\}$ 上是无旋场, 从而是保守场, 其曲线积分与路径无关, 且其势函数

$$\varphi=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$
$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\mathrm{d}\varphi=0.$$

□

11.7.7 设 $f(u)$ 是连续函数, 但不一定可微, L 是分段光滑的任意闭曲线, 证明:

(1) $\displaystyle\oint_L f(x^2+y^2)(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)=0$;

(2) $\displaystyle\oint_L f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z)=0$.

证明 (1)

(2) 注意到,

$$f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})x\,\mathrm{d}x=\sqrt{x^2+y^2+z^2}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\cdot\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$
$$\Longrightarrow\ tf(t)\cdot\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z}{t}=tf(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中 $t=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 故函数

$$\varphi(x,y,z)=\int_{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}tf(t)\,\mathrm{d}t$$

满足 $\nabla\varphi=\boldsymbol{v}=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$, 从而 $\boldsymbol{v}$ 是有势场, 其环量

$$\oint_L\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_L\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_L\mathrm{d}\varphi=0.$$

□

参考 数学分析教程 13.4.**练习题 4**.

11.7.8 稳恒电流通过无穷长的直导线 (作 Oz 轴) 所产生的磁场为 $\boldsymbol{B}=\dfrac{2I}{x^2+y^2}(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j})$ $(x^2+y^2\neq0)$, 试讨论 $\boldsymbol{B}$ 沿 Oxy 平面上任意光滑闭曲线的环量 $\varGamma$.

11.7.9 试求函数 $f(x)$, 使曲线积分 $\displaystyle\int_L(f'(x)+6f(x)+\mathrm{e}^{-2x})y\,\mathrm{d}x+f'(x)\,\mathrm{d}y$ 与积分的路径无关.

解 记 $\boldsymbol{v} = (f'(x) + 6f(x) + \mathrm{e}^{-2x})y\boldsymbol{i} + f'(x) + \boldsymbol{j} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j}$, 令

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = f''(x) - (f'(x) + 6f(x) + \mathrm{e}^{-2x}) = 0,$$

考虑二阶非齐次线性方程

$$f'' - f' - 6f = \mathrm{e}^{-2x}$$

的解.

其对应的齐次线性方程为

$$f'' - f' - 6f = 0,$$

其特征方程

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \implies \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -2,$$

故齐次线性方程的通解为

$$f_{\mathrm{h}} = C_{10}y_1(x) + C_{20}y_2(x) = C_{10}\mathrm{e}^{3x} + C_{20}\mathrm{e}^{-2x}, \quad C_{10}, C_{20} \in \mathbb{R},$$

其中 $y_1 = \mathrm{e}^{3x}, y_2 = \mathrm{e}^{-2x}$, 其 Wronski 行列式

$$W_{[y_1,y_2]}(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{-2x} \\ 3\mathrm{e}^{3x} & -2\mathrm{e}^{-2x} \end{vmatrix} = -5\mathrm{e}^{x},$$

故非齐次线性方程有特解

$$f_{\mathrm{p}} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x),$$

其中

$$C_1(x) = -\int \frac{\mathrm{e}^{-2x} \cdot \mathrm{e}^{-2x}}{-5\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{25}\mathrm{e}^{-5x}, \quad C_2(x) = \int \frac{\mathrm{e}^{3x} \cdot \mathrm{e}^{-2x}}{-5\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}x,$$

从而非齐次线性方程的通解为

$$\begin{aligned} f = f_{\mathrm{h}} + f_{\mathrm{p}} &= \left(-\frac{1}{25}\mathrm{e}^{-5x} + C_{10}\right)\mathrm{e}^{3x} + \left(-\frac{1}{5}x + C_{20}\right)\mathrm{e}^{-2x} \\ &= C_1\mathrm{e}^{3x} + \left(-\frac{1}{5}x + C_2\right)\mathrm{e}^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

11.7.10 已知 $\alpha(0) = 0, \alpha'(0) = 2, \beta(0) = 2$.

(1) 求 $\alpha(x), \beta(x)$ 使线积分 $\displaystyle\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 与路径无关, 其中 $P(x,y) = (2x\alpha'(x) + \beta(x))y^2 - 2y\beta(x)\tan 2x, Q(x,y) = (\alpha'(x) + 4x\alpha(x))y + \beta(x)$;

(2) 求 $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(0,2)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$.

(1)

(2)

11.7.11 设函数 $Q(x,y)$ 在 Oxy 平面上具有一阶连续偏导数, 曲线积分 $\int_L 2xy\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 与路径无关, 并且对任意 t, 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

求 $Q(x,y)$.

解 记 $\boldsymbol{v} = 2xy\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j} := P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j}$, 令

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = Q'_x - 2x = 0 \implies Q(x,y) = x^2 + f(y).$$

考虑积分 $\int_{(0,0)}^{(x,y)} \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, 由于其积分与路径无关, 从而

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \left(\int_{(0,0)}^{(x,0)} + \int_{(x,0)}^{(x,y)}\right) \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^y (x^2 + f(y))\,\mathrm{d}y = x^2 y + \int_0^y f(y)\,\mathrm{d}y,$$

由题意知,

$$t^2 + \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y = t + \int_0^t f(y)\,\mathrm{d}y, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

上式两边对 t 求导得:

$$2t = 1 + f(t) \implies f(t) = 2t - 1 \implies Q(x,y) = x^2 + 2y - 1.$$

□

11.7.12 求解微分方程:

(1) $(xy^2 + 2y - 2y\cos x - y\sin x)\,\mathrm{d}x + (x^2 y + 2x + \cos x - 2\sin x)\,\mathrm{d}y = 0$;

(2) $2xy\,\mathrm{d}x + (y^2 - x^2)\,\mathrm{d}y = 0$.

解 (1) 注意到,

$$LHS = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2y^2 + 2xy - 2y\sin x + y\cos x\right) := \mathrm{d}u = 0 \implies u(x,y) = C,$$

故该微分方程的解为方程

$$\frac{1}{2}x^2y^2 + 2xy - 2y\sin x + y\cos x = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

所确定的隐函数.

(2)

提示 凑全微分.

□

11.7.13 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, $f(0)=0, f'(0)=2$, 且

$$(\mathrm{e}^x\sin y+x^2y+f(x)y)\,\mathrm{d}x+(f'(x)+\mathrm{e}^x\cos y+2x)\,\mathrm{d}y=0$$

为全微分方程. 求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解.

解 记 $LHS=\mathrm{d}u$, 则

$$u=\mathrm{e}^x\sin y+\frac{1}{3}yx^3+y\int_{x_0}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t+g(y)=f'(x)y+\mathrm{e}^x\sin y+2xy+h(x)$$
$$\Longrightarrow\ y\cdot\left(\frac{1}{3}x^3+\int_{x_0}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t-f'(x)-2x\right)=h(x)-g(y)$$
$$\Longrightarrow\ h(x)=0,$$

两边对 x 求导得:

$$x^2+f(x)-f''(x)-2=0\iff f''(x)-f(x)=x^2-2,$$

其对应的齐次线性微分方程的通解为

$$f_{\mathrm{h}}=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x},\quad C_1,C_2\in\mathbb{R},$$

记 $p_1(x)=\mathrm{e}^x, p_2(x)=\mathrm{e}^{-x}$, 其 Wronski 行列式

$$W_{[p_1,p_2]}(x)=\begin{vmatrix}\mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x}\\ \mathrm{e}^x & -\mathrm{e}^{-x}\end{vmatrix}=-2,$$

故非齐次线性微分方程有特解

$$f_{\mathrm{p}}=C_1(x)p_1(x)+C_2(x)p_2(x),$$

其中

$$C_1(x)=-\int\frac{\mathrm{e}^{-x}(x^2-2)}{-2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}x(x+2),\quad C_2(x)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}x(x-2),$$

从而非齐次方程的通解为

$$f=f_{\mathrm{h}}+f_{\mathrm{p}}=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}-x^2,$$

由 $f(0)=0, f'(0)=2$ 得:

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\ C_1-C_2=2\end{cases}\Longrightarrow\ C_1=1,\quad C_2=-1,$$

从而

$$f(x)=-x^2+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x},$$

故

$$u=\mathrm{e}^x\sin y+y(2x-2x+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})=\mathrm{e}^x\sin y+y(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}),$$

全微分方程的通解为

$$\mathrm{e}^x\sin y+y(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})=C,\quad C\in\mathbb{R}$$

所确定的隐函数. □

11.7.14 确定常数 λ, 使在右半平面 $x > 0$ 上的向量场

$$\boldsymbol{v} = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda \boldsymbol{i} - x^2(x^4 + y^2)^\lambda \boldsymbol{j}$$

为某二元函数 $u(x, y)$ 的梯度, 并求 $u(x, y)$.

解 若 $\boldsymbol{v} = \nabla u \implies \nabla \times \boldsymbol{v} = \nabla \times \nabla u = \mathbf{0}$, 记 $\boldsymbol{v} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j}$, 则有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (-4 - 4\lambda)x(x^4 + y^2)^\lambda = 0 \implies \lambda = -1,$$

从而

$$\boldsymbol{v} = \frac{2xy}{x^4 + y^2}\boldsymbol{i} - \frac{x^2}{x^4 + y^2}\boldsymbol{j}, \quad u = -\arctan\frac{y}{x^2} + C.$$

□

11.7.15 给出二维情况下梯度和 Laplace 算子在极坐标系下的表示.

11.7.16 利用 Laplace 算子在极坐标和球坐标下的表示, 分别验证:

(1) $u(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$;

(2) $u(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

是 Laplace 方程 $\Delta u = 0$ 的解.

11.8 微分形式的积分

11.9 第 11 章综合习题

11.9.1 求第一型曲线积分 $I = \displaystyle\int_L z\,\mathrm{d}s$, 其中 L 是曲面 $x^2 + y^2 = z^2$ 与 $y^2 = ax$ $(a > 0)$ 交线上从点 $(0, 0, 0)$ 到 $(a, a, a\sqrt{2})$ 的弧段.

解 曲线上一点

$$(x, y, z) = (at^2, at, \sqrt{a^2t^2 + a^2t^4}),$$

$$\implies \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \sqrt{(2at)^2 + a^2 + \left(a\frac{1 + 2t^2}{\sqrt{1 + t^2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2(8t^4 + 9t^2 + 2)}{1 + t^2}},$$

$$\begin{aligned}\implies I &= \int_0^1 \sqrt{a^2t^2(1 + t^2)\cdot\frac{a^2(8t^4 + 9t^2 + 2)}{1 + t^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= a^2\int_0^1 t\sqrt{8t^4 + 9t^2 + 2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{256}(-72\sqrt{2} + 200\sqrt{19} + 17\sqrt{2}\ln(25 - 4\sqrt{38})).\end{aligned}$$

□

说明 上述单变量积分结果来自 WolframAlpha.

11.9.2 设 $a,b,c>0$. 求由曲线 $L:\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2n+1}+\left(\dfrac{y}{b}\right)^{2n+1}=c\left(\dfrac{x}{a}\right)^{n}\left(\dfrac{y}{b}\right)^{n}$ 围成的区域 D 的面积 S.

11.9.3 求平面上两个椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\quad (a>b>0)$$

内部公共区域的面积.

解 记 D 是由 $y=x,y=0,\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 在第一象限内围成的区域, 由对称性知,

$$\begin{aligned}\sigma=8\sigma(D)&=8\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\left(b\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}-y\right)\mathrm{d}y\\&\xlongequal{y=a\sin\theta}8ab\left(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\bigg|_0^{\arctan\frac{b}{a}}-8\cdot\frac{1}{2}y^2\bigg|_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\\&=4ab\arctan\frac{b}{a}.\end{aligned}$$

□

说明 也可以考虑 Green 定理, $\sigma=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_L x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x$, 并运用椭圆的参数方程表示 (注意参数的范围).

11.9.4 **(Poisson 公式)** 设 $S:x^2+y^2+z^2=1$, $f(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 求证:

$$\iint_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S=2\pi\int_{-1}^{1}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)\,\mathrm{d}t.$$

提示 (1) 考虑 $F(x,y,z)=ax+by+cz$ 的等值面.

证明 (1) 考虑 $F(x,y,z)=ax+by+cz$ 的等值面 $\Pi(t):ax+by+cz=\sqrt{a^2+b^2+c^2}t$ ($t\in[-1,1]$), 注意到 $\Pi(t),\Pi(t+\mathrm{d}t)$ 在球面上截下的面积为

$$\mathrm{d}S=2\pi\sqrt{1-t^2}\cdot 1\,\mathrm{d}\theta,$$

其中 $\sin\theta=t\ \left(\theta\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\right)\implies\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}t\implies\mathrm{d}S=2\pi\,\mathrm{d}t$, 从而

$$\int_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S=\int_{-1}^{1}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)\cdot 2\pi\,\mathrm{d}t=2\pi\int_{-1}^{1}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)\,\mathrm{d}t.$$

□

注意 $f(t)$ 不一定可导, 因此不能使用 Gauss 定理.

提示 (2) 考虑适当的坐标变换, 使得某一坐标轴的方向与平面法向一致, 从而 $ax+by+cz$ 的取值可以较为容易地用新坐标表示.

分析 (2) 取新的坐标系 $Ouvw$, 取平面的单位法向 $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c)$ 作为新的 w 轴方向, $x^2+y^2+z^2=1\iff u^2+v^2+w^2=1\implies u^2+v^2=1-w^2$, 从而球面上一点的

参数表示为

$$\begin{cases} u = \sqrt{1-w^2}\cos\varphi, \\ v = \sqrt{1-w^2}\sin\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad -1 \leqslant w \leqslant 1. \\ w = w, \end{cases}$$

参考 数学分析教程 12.2.**问题 1**.

11.9.5 设 $S(t)$ 是平面 $x+y+z=t$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 截下的部分, 且

$$F(x,y,z) = 1-(x^2+y^2+z^2).$$

求证: 当 $|t| \leqslant \sqrt{3}$ 时, 有

$$\iint_{S(t)} F(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \frac{\pi}{18}(3-t^2)^2.$$

提示 (1) 注意 F 在球面上的取值.

证明 (1) 构造矢量场 $\boldsymbol{F}$, 使得 $|\boldsymbol{F}| = F$, 且其方向与 S 的法向 $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ 相反. 因此, 设

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \frac{F(x,y,z)}{\sqrt{3}}(1,1,1),$$

从而

$$\iint_S F\,\mathrm{d}S = -\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

注意到, $\displaystyle\iint_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 0$, 其中 Σ 为球面被平面截下的上半部分, 法向朝外.

又

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-2x-2y-2z),$$

记 V 是由 S 和 Σ 围成的区域, 由 Gauss 定理得:

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{S+\Sigma} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V = -\frac{2}{\sqrt{3}}\iiint_V (x+y+z)\,\mathrm{d}V.$$

考虑 $f(x,y,z) = x+y+z$ 的等值面 $\Pi(r): x+y+z=r$ $(-\sqrt{3} \leqslant r \leqslant \sqrt{3})$.

易知, $\Pi(r), \Pi(r+\mathrm{d}r)$ 与球面所围成的体积为

$$\mathrm{d}V = \pi\left(1-\frac{r^2}{3}\right)\mathrm{d}\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right),$$

其中 $d = \dfrac{r}{\sqrt{3}}$ 为 $\Pi(r)$ 到球心的距离.

从而

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\sqrt{3}}\iiint_V (x+y+z)\,\mathrm{d}V &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\int_t^{\sqrt{3}} r\cdot\pi\left(1-\frac{r^2}{3}\right)\mathrm{d}\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right) \\ &= -\frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{12}r^4\right)\Bigg|_t^{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{18}(3-t^2)^2, \end{aligned}$$

故

$$\iint_S F\,\mathrm{d}S = -\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\pi}{18}(3-t^2)^2, \quad |t|\leqslant\sqrt{3}.$$

□

注意 使用 Gauss 定理时, 必须先将标量场 F 矢量化为 $\boldsymbol{F}$, 并留意 $\boldsymbol{F}$ 方向和大小的选取.

† 常见错误: 对标量场 F 求散度 $\nabla\cdot F = \dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial z}$, 这完全是错误的!

提示 (2) 也可以选取合适的坐标系, 直接计算曲面积分.

证明 (2) 显然, $S(t)$ 是一个圆, 记其圆心为 A, 取以 A 为极点的极坐标系, 则 $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$, 积分区域化为

$$D=\left\{(r,\theta)\middle|0\leqslant r\leqslant\sqrt{1-\frac{t^2}{3}},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right\},$$

且

$$F(x,y,z)=1-\left(r^2+\frac{t^2}{3}\right),$$

从而

$$\begin{aligned}\iint_S F\,\mathrm{d}S &= \iint_D\left(1-\left(r^2+\frac{t^2}{3}\right)\right)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\ &=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}}\left(\left(1-\frac{t^2}{3}\right)r-r^3\right)\mathrm{d}r\\ &=2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{t^2}{3}\right)r^2-\frac{1}{4}r^4\right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}}\\ &=\frac{\pi}{18}\left(3-t^2\right)^2.\end{aligned}$$

□

参考 数学分析教程 12.2.**问题 2**.

11.9.6 设 $f(t)$ 在 $|t|\leqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 上连续. 证明:

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{2}{3}\pi\int_{-1}^1 f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)\,\mathrm{d}t.$$

提示 先用球坐标变换, 再运用 **Poisson 公式** (见习题 11.9.4).

证明 记 $x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$, 则

$$\begin{aligned}&\iiint_V f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ =&\iiint_{V'} f(a\sin\theta\cos\varphi+b\sin\theta\sin\varphi+c\cos\theta)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\ =&\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r\iint_{S'} f(a\sin\theta\cos\varphi+b\sin\theta\sin\varphi+c\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\ =&\frac{1}{3}\iint_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S,\end{aligned}$$

其中 S, S' 均表示球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

由 **Poisson** 公式得: 上式

$$= \frac{1}{3}\cdot 2\pi \int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\pi \int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)\,\mathrm{d}t.$$

□

参考 数学分析教程 12.2.**问题 3**.

11.9.7 设 $f(x,y)$ 在 $\overline{B}_R(\boldsymbol{P}_0)$ 上有二阶连续偏导数, 且满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

求证: 对 $0 \leqslant r \leqslant R$, 有

$$f(\boldsymbol{P}_0) = \frac{1}{2\pi r}\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s,$$

其中 $\boldsymbol{P}_0 = (x_0, y_0)$, $L = \partial B_r(\boldsymbol{P}_0)$ 是以 $\boldsymbol{P}_0$ 为圆心, r 为半径的圆.

提示 往证:

$$g(r) = \frac{1}{2\pi r}\oint_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$$

为常数.

证明 记

$$g(r) = \frac{1}{2\pi r}\oint_L f(x,y)\,\mathrm{d}s,$$

作换元 $x = x_0 + r\cos\theta, y = y_0 + r\sin\theta$, 则由**习题 10.5.9 证明 (3)**中的性质知,

$$\begin{aligned} g(r) &= \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) r\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta, \\ g'(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi r}\oint_L \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}y - \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

记

$$P = -\frac{\partial f}{\partial y}, \quad Q = \frac{\partial f}{\partial x} \implies \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

由 Green 公式知,

$$g'(r) = \frac{1}{2\pi r}\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0,$$

其中 $D = \left\{(x,y)\middle|(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leqslant r^2\right\}$.

故 $g(r)$ 为常数, 从而

$$g(r) = g(0) \implies f(\boldsymbol{P}_0) = \frac{1}{2\pi r}\oint_L f(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

□

说明 上述结论可以推广到三维空间的情形, 请读者自行尝试.

11.9.8　设 $f(x,y,z)$ 在 $\overline{B}_R(\boldsymbol{P}_0)$ 上有二阶连续偏导数, 且满足 Laplace 方程

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0.$$

求证: 对 $0\leqslant r\leqslant R$, 有

$$f(\boldsymbol{P}_0)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

其中 $\boldsymbol{P}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $S=\partial B_r(\boldsymbol{P}_0)$ 是以 $\boldsymbol{P}_0$ 为球心, r 为半径的球面.

11.9.9　设 D 是平面上光滑封闭曲线 L 所围成的区域, $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上有二阶连续偏导数且满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

求证:

(1) 若 $f(x,y)$ 不是常数, 则它在 $\overline{D}$ 上的最大值和最小值都只能在 L 上取到.

(2) 当 $f(x,y)$ 在 L 上恒为零时, 它在 D 上也恒为零.

提示　考虑**习题 11.9.7**的结论.

证明　(1) 用反证法. 假设 $\exists\boldsymbol{x}_0\in D^\circ$, 使得 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处取得最值, 不妨设为最大值. 即

$$f(\boldsymbol{x})\leqslant f(\boldsymbol{x}_0),\quad \forall\boldsymbol{x}\in\overline{D},$$

又 $\boldsymbol{x}_0\in D^\circ$, 从而 $\exists r_0>0$, 使得对 $\forall 0<r\leqslant r_0$, 有 $\overline{B}_r(\boldsymbol{x}_0)\subset\overline{D}$, 从而 f 在 $L(r)=\partial\overline{B}_r(\boldsymbol{x}_0)$ 上的平均值

$$\frac{1}{2\pi r}\oint_{L(r)} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s\leqslant f(\boldsymbol{x}_0),$$

另一方面, 由 $\nabla^2 f=0$ 及**习题 11.9.7**的结论, 我们有

$$\frac{1}{2\pi r}\oint_{L(r)} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s=f(\boldsymbol{x}_0),$$

$$\Longrightarrow f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0),\quad \forall\boldsymbol{x}\in\partial\overline{B}_r(\boldsymbol{x}_0),\quad \forall 0<r\leqslant r_0,$$

$$\Longrightarrow f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0),\quad \forall\boldsymbol{x}\in\overline{B}_{r_0}(x_0),$$

从而 $\forall\boldsymbol{x}\in\overline{B}_{r_0}(x_0)$ 也是最大值点.

现在考虑任一条过 $\boldsymbol{x}_0$ 的直线 l.

记

$$D_\varepsilon=\left\{\boldsymbol{x}\in\overline{D}\middle|\rho(\boldsymbol{x},\partial D)>\varepsilon,0<\varepsilon<r_0\right\},\quad l_\varepsilon=l\cap\overline{D_\varepsilon},$$

由上述定义易知, $\forall\boldsymbol{x}\in l_\varepsilon$, 有 $\overline{B}_\varepsilon(\boldsymbol{x})\subset\overline{D}$.

以 $\boldsymbol{x}_0$ 为圆心, ε 为半径作圆 $\overline{B}_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0)$ 交 l 于 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_1'$, 则 $\forall\boldsymbol{x}\in\overline{\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1'}$, 有 $f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0)$, 且 $\boldsymbol{x}$ 为最大值点; 再分别以 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_1'$ 为圆心, ε 为半径作圆 $\overline{B}_\varepsilon(\boldsymbol{x}_1),\overline{B}_\varepsilon(\boldsymbol{x}_1')$ 交 l 于 $\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_2',\cdots$, 如此下去, 可以作 $N<\infty$ 个 (有限个) 圆, 使得

$$l_\varepsilon\subset\left(\bigcup_{i=1}^N(\overline{B}_\varepsilon(\boldsymbol{x}_i)\cup\overline{B}_\varepsilon(\boldsymbol{x}_i'))\right)\cup\overline{B}_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0)\implies f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0),\quad\forall\boldsymbol{x}\in l_\varepsilon,$$

又由 ε 的任意性, 令 $\varepsilon \to 0$, 由 $f \in C(\overline{D})$ 知,

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0), \quad \forall \boldsymbol{x} \in l \cap \overline{D},$$

再由 l 的任意性知,

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \overline{D},$$

即 $f(\boldsymbol{x})$ 为常数, 这与题设条件矛盾, 故假设不成立, $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上的最大值和最小值都只能在 L 上取到.

说明 细心的读者应当发现, 上述证明只适用于 D 为凸域的情形, 否则过 $\boldsymbol{x}_0$ 的直线可能有一部分落在 D 的外侧. 但是延续上述做法, 注意到与最大值点取值相同的点都会变成最大值点, 稍作修改, 我们有如下的证法.

分析 显然 D 是道路连通的, 设 $\boldsymbol{x}_0 \in D^\circ$ 是最大值点, 对 $\forall \boldsymbol{x} \in \overline{D}$, 存在一条连续的曲线 $\boldsymbol{g}(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, 使得 $\boldsymbol{g}(\alpha) = \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{g}(\beta) = \boldsymbol{x}$, 考虑集合

$$E = \{t \in [\alpha, \beta] | f(\boldsymbol{g}(u)) = f(\boldsymbol{g}(\alpha)), u \in [a, t]\},$$

易知 $\sup E = \beta$.

(2) 假设 $f(x,y)$ 不恒为零, 即 $f(x,y)$ 不是常数, 由 (1) 的结论知, 其最大值 M 和最小值 m 都只能在 ∂D 上取得, 从而 $M = m = C \implies f(x,y) = C$ 为常数. □

另证 我们参照**习题 11.3.7(1)**的做法.

记 $\boldsymbol{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta), \boldsymbol{n} = (\cos\beta, -\cos\alpha)$ 分别是曲线 L 的单位切向量和单位外法向量, 一方面,

$$\oint_L f \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}s = f\Big|_{\partial D} \cdot \oint_L \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}s = 0,$$

另一方面, 由 Green 公式, 我们有

$$\begin{aligned}
\oint_L f \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}s &= \oint_L f \left[(f'_x, f'_y) \cdot (\cos\beta, -\cos\alpha) \right] \mathrm{d}s \\
&= \oint_L f (f'_x \cos\beta - f'_y \cos\alpha) \, \mathrm{d}s \\
&= \oint_L (-f f'_y \, \mathrm{d}x + f f'_x \, \mathrm{d}y) \\
&= \iint_D \left[((f'_x)^2 + f f''_{xx}) + ((f'_y)^2 + f f''_{yy}) \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \iint_D [f(f''_{xx} + f''_{yy}) + (f'_x)^2 + (f'_y)^2] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \iint_D ({f'_x}^2 + {f'_y}^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \geqslant 0,
\end{aligned}$$

从而

$${f'_x}^2 + {f'_y}^2 \equiv 0 \implies f'_x = f'_y \equiv 0 \implies f(x,y) = \text{Const.}, \quad (x,y) \in D.$$

□

11.10 第 11 章补充习题

11.10.1 设 L 圆周 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 方向为逆时针方向. $f(x)$ 是一个正值可微函数, 且满足

$$\oint_L -\frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x + xf(y)\,\mathrm{d}y = 2\pi.$$

求 $f(x)$.

证明 记

$$P=-\frac{y}{f(x)},\quad Q=xf(y),$$
$$\Longrightarrow\ \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{f(x)},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=f(y),$$

记 $D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 1\right\}$, 则 $\partial D=L$, 由 Green 公式及对称性得:

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(f(y)+\frac{1}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_D\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}+f(y)+\frac{1}{f(y)}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\iint_D 4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\sigma(D)=2\pi,$$

当且仅当

$$f(x)=\frac{1}{f(x)}\ \Longrightarrow\ f(x)\equiv 1$$

时, 上式等号成立. 故

$$f(x)\equiv 1,\quad x\in D.$$

□

说明 上述过程也可以直接写作

$$\iint_D\left(f(y)+\frac{1}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\cdots,$$

关键是注意到积分区域对变量 x,y 的对称性, 即 x,y 地位均等.

11.10.2 设 D 是 Oxy 平面上有限条逐段光滑曲线围成的区域, $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上有二阶连续偏导数且满足不等式

$$f\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+f\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\geqslant 2af\frac{\partial f}{\partial x}+2bf\frac{\partial f}{\partial y}+cf^2,$$

其中 a,b,c 为常数且 $c\geqslant a^2+b^2$. 求证: 若 $f\Big|_{\partial D}\equiv 0$, 则 $f\Big|_D\equiv 0$.

分析 显然, 上述不等式让我们联想到配方, 即

$$f\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+f\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\geqslant 2af\frac{\partial f}{\partial x}+2bf\frac{\partial f}{\partial y}+cf^2\geqslant 2af\frac{\partial f}{\partial x}+2bf\frac{\partial f}{\partial y}+(a^2+b^2)f^2,$$
$$\Longleftrightarrow\ ff''_{xx}+ff''_{yy}+f'^2_x+f'^2_y\geqslant(af+f'_x)^2+(bf+f'_y)^2,$$

细心的读者应当发现, 上式左边恰好等于**习题** 11.9.9(2) **另证**中我们所构造的积分式, 因此, 我们自然考虑使用与其相似的手法.

证明 记 $\boldsymbol{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta),\boldsymbol{n}=(\cos\beta,-\cos\alpha)$ 分别是曲线 $L=\partial D$ 的单位切向量和单位外法向量, 一方面,

$$\oint_L f\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s=f\Big|_{\partial D}\cdot\oint_L\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s=0,$$

另一方面, 由 Green 公式, 我们有

$$\begin{aligned}
\oint_L f\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s&=\oint_L f\left[(f_x',f_y')\cdot(\cos\beta,-\cos\alpha)\right]\mathrm{d}s\\
&=\oint_L f(f_x'\cos\beta-f_y'\cos\alpha)\,\mathrm{d}s\\
&=\oint_L(-ff_y'\,\mathrm{d}x+ff_x'\,\mathrm{d}y)\\
&=\iint_D\left[((f_x')^2+ff_{xx}'')+((f_y')^2+ff_{yy}'')\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\geqslant\iint_D[{f_x'}^2+{f_y'}^2+2aff_x'+2bff_y'+cf^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\geqslant\iint_D[{f_x'}^2+{f_y'}^2+2aff_x'+2bff_y'+(a^2+b^2)f^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\iint_D\left[(af+f_x')^2+(bf+f_y')^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\geqslant 0,
\end{aligned}$$

从而,

$$(af+f_x')^2+(bf+f_y')^2\equiv 0\implies af+f_x'=bf+f_y'\equiv 0,\quad (x,y)\in D,$$

解上述偏微分方程组易得:

$$f(x,y)=C\mathrm{e}^{-ax-by},$$

而

$$f\Big|_{\partial D}=0,\quad \mathrm{e}^{-ax-by}\geqslant 0\implies C=0\implies f(x,y)\equiv 0,\quad (x,y)\in D.$$

事实上, 即使不求解微分方程, 我们也可以得出上述结果.

$$af+f_x'=bf+f_y'=0\implies bf_x'-af_y'=0,$$

取 $\boldsymbol{e}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b,-a)$, 则有

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(f_x',f_y')\cdot(b,-a)=0,$$

对 $\forall(x,y)\in D$, 取过 (x,y) 且平行于 $\boldsymbol{e}$ 的直线, 交 ∂D 于 (x_0,y_0) (确切地说, 直线交 ∂D 于两点, 任取一点即可), 则 $f(x,y)=f(x_0,y_0)=0$.

(设 $g(t)=f(x+bt,y-at)$, $g'(t)=bf_x'-af_y'=0$, 又 $\exists t_0\in\mathbb{R}$, 使得 $(x_0,y_0)=(x+bt_0,y-at_0)\in\partial D$, 从而 $f(x,y)=g(0)=g(t_0)=f(x_0,y_0)=0$.) □

11.10.3 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant a^2\right\}$ 上具有一阶连续偏导数, 且满足

$$f(x,y)\Big|_{x^2+y^2=a^2}=a^2,\quad \max_{(x,y)\in D}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]=a^2,$$

其中 $a>0$. 证明:

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{4}{3}\pi a^4.$$

提示 考虑 Green 公式. 构造 P,Q, 使得 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 与 $f(x,y)$ 有关.

证明 记

$$P=-yf(x,y),\quad Q=xf(x,y).$$

出处 2018 年第九届全国大学生数学竞赛决赛 (非数学专业). 第 6 题.

11.10.4

11.10.5

11.10.6

11.10.7

11.10.8

11.10.9

第 12 章　Fourier 分析

12.1　函数的 Fourier 级数

12.1.1　作出下列周期 2π 的函数的图形, 并把它们展开成 Fourier 级数, 并说明收敛情况.

(1) 在 $[-\pi,\pi)$ 中, $f(x)=\begin{cases}-\pi, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ x, & 0<x<\pi;\end{cases}$

(2) 在 $[-\pi,\pi)$ 中, $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$;

(3) 在 $[-\pi,\pi)$ 中, $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 1, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$

解　(1)

$$
\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-\pi\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x\right)=-\frac{1}{2}\pi,\\
a_n&=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-\pi)\cos nx\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x\right)\\
&=-\left(\frac{1}{n}\sin nx\bigg|_{-\pi}^{0}\right)+\frac{1}{n\pi}\left(x\sin nx+\frac{1}{n}\cos nx\right)\bigg|_0^{\pi}\\
&=\frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\frac{1}{n^2\pi}((-1)^n-1),\\
b_n&=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-\pi)\sin nx\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x\right)\\
&=\left(\frac{1}{n}\cos nx\bigg|_{-\pi}^{0}\right)-\frac{1}{n\pi}\left(x\cos nx-\frac{1}{n}\sin nx\right)\bigg|_0^{\pi}\\
&=\frac{1}{n}(1-2\cos n\pi)=\frac{1}{n}(1-2(-1)^n),\\
\Longrightarrow\ f(x)&\sim-\frac{1}{4}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2\pi}((-1)^n-1)\cos nx+\frac{1}{n}(1-2(-1)^n)\sin nx\right)\\
&=\begin{cases}f(x), & x\neq k\pi,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=2k\pi,\\ 0, & x=(2k-1)\pi,\end{cases}\qquad k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

(2)

(3)

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} 1\cdot\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\mathrm{e}^x\Big|_{-\pi}^{0} + \pi\right) = \frac{1}{\pi}(1-\mathrm{e}^{-\pi}+\pi), \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \mathrm{e}^x\cos nx\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\mathrm{e}^x\cos nx + n\mathrm{e}^x\sin nx}{1+n^2}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right) \\
&= \frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}\cos n\pi}{\pi(1+n^2)} = \frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}(-1)^n}{\pi(1+n^2)}, \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \mathrm{e}^x\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\mathrm{e}^x\sin nx - n\mathrm{e}^x\cos nx}{1+n^2}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-n-(-n\mathrm{e}^{-\pi}\cos n\pi)}{1+n^2} + \frac{1}{n}(1-\cos n\pi)\right) \\
&= \frac{n(-1+\mathrm{e}^{-\pi}(-1)^n)}{\pi(1+n^2)} + \frac{1}{\pi n}(1-(-1)^n),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow\ f(x) &\sim \frac{1}{2\pi}(1-\mathrm{e}^{-\pi}+\pi) \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx - \sin nx) + \frac{1}{n}(1-(-1)^n)\sin nx\right) \\
&= \begin{cases} f(x), & x\neq(2k-1)\pi, \\ \dfrac{\mathrm{e}^{-\pi}+1}{2}, & x=(2k-1)\pi, \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

□

12.1.2 将下列函数展开成以指定区间长度为周期的 Fourier 级数, 并说明收敛情况.

(1) $f(x) = 1-\sin\dfrac{x}{2}$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$;

(2) $f(x) = \dfrac{x}{3}$ $(0\leqslant x\leqslant T)$;

(3) $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ $(-l\leqslant x\leqslant l)$;

(4) $f(x) = \begin{cases} 1, & |x|<1, \\ -1, & 1\leqslant|x|\leqslant 2. \end{cases}$

解 (1)

(2)

(3) 记

$$A = a, \quad B = \frac{n\pi}{l}.$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \mathrm{e}^{Ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\left(\frac{1}{A}\mathrm{e}^{Ax}\bigg|_{-l}^{l}\right) = \frac{1}{Al}(\mathrm{e}^{Al} - \mathrm{e}^{-Al}),\\
a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \mathrm{e}^{Ax}\cos Bx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\,\frac{A\mathrm{e}^{Ax}\cos Bx + B\mathrm{e}^{Ax}\sin Bx}{A^2+B^2}\bigg|_{-l}^{l} = \frac{1}{l}\,\frac{A(\mathrm{e}^{Al} - \mathrm{e}^{-Al})(-1)^n}{A^2+B^2},\\
b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \mathrm{e}^{Ax}\sin Bx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\,\frac{A\mathrm{e}^{Ax}\sin Bx - B\mathrm{e}^{Ax}\cos Bx}{A^2+B^2}\bigg|_{-l}^{l} = \frac{1}{l}\,\frac{-B(\mathrm{e}^{Al} - \mathrm{e}^{-Al})(-1)^n}{A^2+B^2},\\
\Longrightarrow\ f(x) &\sim \frac{1}{2Al}(\mathrm{e}^{Al} - \mathrm{e}^{-Al}) + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(\mathrm{e}^{Al} - \mathrm{e}^{-Al})}{A^2+B^2}(A\cos Bx - B\sin Bx)\\
&= \begin{cases} \mathrm{e}^{Ax}, & x \neq (2k-1)l,\\ \dfrac{\mathrm{e}^{-Al} + \mathrm{e}^{Al}}{2}, & x = (2k-1)l, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

(4)

□

12.1.3 把下列函数展开成正弦级数和余弦级数:

(1) $f(x) = 2x^2\ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$;

(2) $f(x) = \begin{cases} A, & 0 \leqslant x < \dfrac{1}{2},\\ 0, \dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant l; \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2h}, & 0 \leqslant x \leqslant 2h,\\ 0, & 2h < x \leqslant \pi. \end{cases}$

解 (1)

(2)

(3) 记 $f(x)$ 的奇延拓和偶延拓分别为 $f_{\mathrm{o}}(x), f_{\mathrm{e}}(x)$.

先考虑正弦级数.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{2h}\left(1 - \frac{x}{2h}\right)\sin nx\,\mathrm{d}x\\
&= \left(-\frac{2}{\pi n}\cos nx\bigg|_0^{2h}\right) - \frac{1}{\pi h}\cdot\left(-\frac{1}{n}\left(x\cos nx - \frac{1}{n}\sin nx\right)\bigg|_0^{2h}\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2 h}\sin 2nh\right),\\
\Longrightarrow\ f_{\mathrm{o}}(x) &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2 h}\sin 2nh\right)\sin nx, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

下面考虑余弦级数.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{2h}\left(1-\frac{x}{2h}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(x-\frac{1}{4h}x^2\right)\Big|_0^{2h} = \frac{2h}{\pi},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{2h}\left(1-\frac{x}{2h}\right)\cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{2}{n\pi}\sin nx\Big|_0^{2h}\right) - \frac{1}{h\pi}\cdot\frac{1}{n}\left(x\sin nx+\frac{1}{n}\cos nx\right)\Big|_0^{2h} \\ &= \frac{1}{\pi n^2 h}(1-\cos 2nh), \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ f_{\mathrm{e}}(x) = \frac{h}{\pi} + \frac{1}{\pi h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(1-\cos 2nh)\cos nx, \quad x\in\mathbb{R}.$$

□

12.1.4 已知函数的 Fourier 级数展开式, 求常数 a 的值.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} = a(2a-|x|)$, 其中 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx = ax$, 其中 $-\pi<x<\pi$.

解 (1) 注意到,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2a}{\pi}\int_0^{\pi}(2a-x)\,\mathrm{d}x = \frac{2a}{\pi}\left(2ax-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2a}{\pi}\left(2a\pi-\frac{1}{2}\pi^2\right) = 0$$

$$\Longrightarrow\ a=\frac{\pi}{4}.$$

经验证, $a=\dfrac{\pi}{4}$ 时, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ 是 $\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{\pi}{2}-|x|\right)$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 的 Fourier 展开式.

(2) 注意到,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} ax\sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{2a}{n}\cos n\pi = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \ \Longrightarrow\ a=\frac{1}{2}.$$

□

12.1.5

(1) 设

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}, \\ 2-2x, & \dfrac{1}{2}<x<1, \end{cases}$$

$$S(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x, \quad -\infty<x<+\infty,$$

其中 $a_n = 2\displaystyle\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,\cdots)$. 求 $S\left(\dfrac{9}{4}\right)$, $S\left(-\dfrac{5}{2}\right)$;

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\leqslant 0,\\ 1+x^2, & 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$ 则其以 2π 为周期的 Fourier 级数的和函数为 $S(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$. 求 $S(3\pi), S(-4\pi)$.

解 (1) 将 $f(x)$ 偶延拓, 周期 $T=2$, 则 $S(x)$ 为 $f(x)$ 的余弦级数, 从而

$$S\left(\frac{9}{4}\right)=S\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4},$$
$$S\left(-\frac{5}{2}\right)=S\left(\frac{5}{2}\right)=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{2}+\right)+f\left(\frac{1}{2}-\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{4}.$$

(2)

□

12.1.6

(1)

(2)

提示 利用积分的换元.

(1)

(2)

12.1.7

提示 考虑 Fourier 级数的复数形式.

12.1.8

(1)

(2)

(1)

(2)

12.1.9 将 $f(x)=1+x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成周期为 2π 的余弦级数, 并求:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)}{(2n-1)^2}$; (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4(2n-1)}{(2n-1)^2}$.

解

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(x+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^{\pi} = 2+\pi,\\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+x)\cos nx\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\left(\sin nx + x\sin nx + \frac{1}{n}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi}\\
&= \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n-1),\\
\Longrightarrow\ f(x) &= 1+\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx\\
&= 1+\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2},\quad x\in\mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

(1) 令 $x=1$ 得:

$$
\begin{aligned}
f(1) = 1+\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)}{(2n-1)^2} = 2\\
\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)}{(2n-1)^2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right),
\end{aligned}
$$

(2) 令 $x=4$ 得:

$$
\begin{aligned}
f(4) = f(2\pi-4) = 2\pi-3 = 1+\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4(2n-1)}{(2n-1)^2}\\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4(2n-1)}{(2n-1)^2} = \frac{\pi}{8}(8-3\pi).
\end{aligned}
$$

□

12.1.10 设 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 这个周期上可以表示为

$$
f(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2}\leqslant x < -\frac{\tau}{2},\\ H, & -\frac{\tau}{2}\leqslant x < \frac{\tau}{2},\\ 0, & \frac{\tau}{2}\leqslant x\leqslant\frac{T}{2}. \end{cases}
$$

试把它展开成 Fourier 级数的复数形式.

解 显然 $f(x)$ 为偶函数, 因此其 Fourier 级数为偶函数, 记 $l=\frac{T}{2}, \omega=\frac{\pi}{l}=\frac{2\pi}{T}$,

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{l}\int_0^{\frac{\tau}{2}}H\,\mathrm{d}x = \frac{\tau}{l}H = \frac{2\tau H}{T},\\
a_n &= \frac{2}{l}\int_0^{\frac{\tau}{2}}H\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x = \frac{2H}{l}\cdot\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^{\frac{\tau}{2}} = \frac{2H}{n\pi}\sin\frac{\tau n\pi}{2l},
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow\ f(x)\sim\sum_{-\infty}^{+\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2n\pi}{T}x} = \begin{cases} f(x), & x\neq\frac{(2k-1)\tau}{2},\\ \frac{H}{2}, & x=\frac{(2k-1)\tau}{2}, \end{cases}\quad k\in\mathbb{Z},
$$

其中

$$F_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{\tau H}{T}, \quad F_{\pm n} = \frac{1}{2}a_n = \frac{H}{n\pi}\sin\frac{\tau n\pi}{T}.$$

□

12.2 平方平均收敛

12.2.1 将 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ 0, & a \leqslant |x| < \pi \end{cases}$ 展开成 Fourier 级数, 然后利用 Parseval 等式求下列级数的和:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2}$; (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 na}{n^2}$.

解 显然 $f(x)$ 是偶函数, 因此其 Fourier 级数为余弦函数.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^a 1 \cdot \mathrm{d}x = \frac{2a}{\pi}, \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^a \cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}\left(\sin nx\Big|_0^a\right) = \frac{2}{n\pi}\sin na, \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow f(x) \sim \frac{a}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\sin na \cos nx = \begin{cases} f(x), & |x| \neq a, \\ \dfrac{1}{2}, & |x| = a, \end{cases} \quad |x| < \pi.$$

(1) 显然 $f \in L^2[-\pi,\pi]$, 由 Parseval 等式得:

$$\frac{1}{2}\frac{4a^2}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2}\sin^2 na = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2a}{\pi},$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2} = \frac{a\pi}{2} - \frac{1}{2}a^2,$$

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 na}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{\sin^2 na}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{a\pi}{2} - \frac{1}{2}a^2\right).$$

□

12.2.2 设 $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上可积且平方可积的函数, a_n, b_n 是 $f(x)$ 的 Fourier 系数. 求证: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ 收敛.

提示 考虑 Cauchy 不等式.

证明 由 $f \in L^2[-\pi,\pi]$ 及 Bessel 不等式知,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < M_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < M_2$$

均收敛, 其中 $M_1, M_2 < +\infty$.

由 Cauchy 不等式知,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{a_k}{k}\right|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right) < M_1\cdot\frac{\pi^2}{6}, \quad \forall n\in\mathbb{N}^*,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n}\right|$ 收敛, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 收敛; 同理可证得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛. □

12.2.3 求周期为 2π 的函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0,\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$ 的 Fourier 级数, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 以及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 的值.

解 显然 $f(x)$ 是奇函数, 因此其 Fourier 级数为正弦级数.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}1\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{n\pi}\left(\cos nx\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n),$$

$$\Longrightarrow\ f(x)\sim\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1-(-1)^n)\sin nx=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1},$$

显然 $f\in L^2[-\pi,\pi]$, 由 Parseval 等式知,

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x=2,$$

$$\Longrightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

另一方面, 由 Parseval 等式推论知, 对 $\forall x\in[-\pi,\pi]$, 有

$$\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\,\mathrm{d}x,$$

$$\Longrightarrow\ x=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\Big|_0^x\right)=\frac{4}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right),$$

$$\Longrightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\quad 0\leqslant x\leqslant\pi.$$

事实上, 从级数角度, 由 Dirichlet 定理知, Fourier 级数 $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ 在 $(0,\pi)$ 上内闭一致收敛于 $f(x)$, 从而无穷求和与积分次序可交换, 故

$$\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\,\mathrm{d}x,$$

$$\Longrightarrow\ x=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\Big|_0^x\right)=\frac{4}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right),$$

$$\Longrightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\quad 0<x<\pi.$$

又端点处有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

也满足上式, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\quad 0\leqslant x\leqslant\pi.$$

□

12.2.4 证明下列函数系是正交函数系, 并求其对应的标准正交系.

(1)

(2)

(3)

(4) $\cos\frac{\pi}{2l}x,\cos\frac{3\pi}{2l}x,\cdots,\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x,\cdots$, 在 $[0,l]$ 上.

证明 (1)

(2)

(3)

(4) 记 $f_n(x)=\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\ (n=0,1,\cdots)$, 计算得:

$$\begin{aligned}\langle f_m,f_n\rangle&=\int_0^l\cos\frac{(2m+1)\pi}{2l}x\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^l\left(\cos\frac{(m-n)\pi}{l}x+\cos\frac{(m+n+1)\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{l}{(m-n)\pi}\sin\frac{(m-n)\pi}{l}x+\frac{l}{(m+n+1)\pi}\sin\frac{(m+n+1)\pi}{l}x\right)\Big|_0^l\\&=0,\quad m\neq n,\\\langle f_n,f_n\rangle&=\int_0^l\cos^2\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^l\left(1+\cos\frac{(2n+1)\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{1}{2}x+\frac{l}{(2n+1)\pi}\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x\right)\Big|_0^l\\&=\frac{l}{2},\end{aligned}$$

因此函数系 $\{f_n\}$ 构成正交函数系, 且

$$\{\tilde{f}_n(x)\}=\left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right\}$$

构成标准正交系. □

说明 对于 $[a,b]$ 上的标准正交函数系 $\{\varphi_n(x)\}$, 我们有

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x),$$

其中

$$a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

特别地, $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right\} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right\}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上构成一组标准正交函数系, 因此 Fourier 系数 (以 $\tilde{a}_n$ 为例)

$$\tilde{a}_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\,\mathrm{d}x,$$

从而

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{a}_n\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx + \tilde{b}_n\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

因此我们熟知的 Fourier 级数与此处的广义 Fourier 级数是一致的.

12.2.5

12.2.6

12.2.7

12.2.8

(1)

(2)

(1)

(2)

12.3 收敛性定理的证明

12.3.1 把函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x$ $(-\pi < x < \pi)$ 展开为 Fourier 级数; 证明: 当 $0 < x < \pi$ 时, 有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

证明 取

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & -\pi < x < 0, \end{cases}$$

由习题 12.2.3的结论知,

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}, \quad -\pi < x < \pi,$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\frac{\pi}{4}f(x)=\frac{\pi}{4},\quad 0<x<\pi.$$

在上式中令 $x=\frac{\pi}{2}$, 得:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}.$$

□

12.3.2

(1)
(2)
(3)

(1)

(2)

(3)

12.3.3

12.3.4

(1)
(2)

(1)

提示 在 $\cos ax$ 的 Fourier 展开式中, 令 $x=\pi$ 并记 $a\pi\to x$.

(2)

提示 在 $\cos ax$ 的 Fourier 展开式中, 令 $x=0$.

12.3.5 证明: 对任意实数 x, 有

$$|\cos x|=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos 2nx,$$

$$|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx.$$

证明 由于 $f(x)=|\cos x|$ 为偶函数, 因此其 Fourier 级数为余弦级数.

$$
\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\left(\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{4}{\pi},\\
a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos x|\cos nx\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos nx\,\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\cos nx\,\mathrm{d}x\right)\\
&\xlongequal{\pi-x\to t}\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos nx\,\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos t)\cos(n\pi-t)\,\mathrm{d}t\right)\\
&=\frac{2}{\pi}(1+(-1)^n)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos nx\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1+(-1)^n}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(n-1)x+\cos(n+1)x)\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1+(-1)^n}{\pi}\left(\frac{1}{n-1}\sin(n-1)x+\frac{1}{n+1}\sin(n+1)x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\frac{1+(-1)^n}{\pi}\left(\frac{1}{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{2}+\frac{1}{n+1}\sin\frac{(n+1)\pi}{2}\right)\\
&\xlongequal[k=1,2,\cdots]{n=2k}\frac{2}{\pi}\cdot(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\
&=\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1},\\
\Longrightarrow\ |\cos x|&=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos 2nx,\quad x\in\mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

上式中将 $\dfrac{\pi}{2}-x$ 代入 x, 得:

$$
|\sin x|=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos 2n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx,\quad x\in\mathbb{R}.
$$

□

12.3.6 对 $x\in(0,2\pi)$ 以及 $a\neq 0$, 求证:

$$
\mathrm{e}^{ax}=\frac{\mathrm{e}^{2a\pi}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos nx-n\sin nx}{n^2+a^2}\right).
$$

证明 计算得:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{a\pi}(\mathrm{e}^{2a\pi}-1),\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ax}\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\frac{a\mathrm{e}^{ax}\cos nx}{a^2+n^2}\Big|_0^{2\pi}\right) = \frac{(\mathrm{e}^{2a\pi}-1)a}{\pi(a^2+n^2)},\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ax}\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-n\mathrm{e}^{ax}\cos nx}{a^2+n^2}\Big|_0^{2\pi}\right) = \frac{(1-\mathrm{e}^{2a\pi})n}{\pi(a^2+n^2)},\\
\Longrightarrow \mathrm{e}^{ax} &= \frac{\mathrm{e}^{2a\pi}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos nx - n\sin nx}{n^2+a^2}\right).
\end{aligned}
$$

□

12.3.7

12.3.8

12.3.9

(1)

(2)

(1)

提示 由于 $f(x) \in C[-\pi,\pi]$, 从而级数一致收敛于 f, 因此可微, 取 $f'(0)$ 即可. 令 $x=1$.

(2)

提示 运用 Parseval 等式.

12.4 Fourier 变换

12.4.1

(1)

(2)

(3)

(1)

(2)

(3)

12.4.2 求下列函数的 Fourier 变换:

(1)

(2) $f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}\cos bx \ (a>0)$;

(3)

解 (1)

(2) 注意到 $f(x)$ 为偶函数, 故其 Fourier 变换为

$$\begin{aligned}\hat{f}(u)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a|t|}\cos bt\cos ut\,\mathrm{d}t\\&=2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}\cos bt\cos ut\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}(\cos t(u-b)+\cos t(u+b))\,\mathrm{d}t\\&=a\left(\frac{1}{a^2+(u-b)^2}+\frac{1}{a^2+(u+b)^2}\right).\end{aligned}$$

(3)

□

12.4.3 按指定的要求将函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$ $(0\leqslant x<+\infty)$ 表示成 Fourier 积分.

(1) 用偶延拓;

(2) 用奇延拓.

解 (1)

$$\begin{aligned}a(u)&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cos ut\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+u^2},\\\Longrightarrow f(x)&=\int_0^{+\infty}\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+u^2}\cos ux\,\mathrm{d}u=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos ux}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

(2)

□

12.4.4 求函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & |x|>1,\\1, & |x|<1\end{cases}$$

的 Fourier 变换. 由此证明:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha\cos\alpha x}{\alpha}\,\mathrm{d}\alpha=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & |x|<1,\\\frac{\pi}{4}, & |x|=1,\\0, & |x|>1.\end{cases}$$

解 注意到, $f(x)$ 为偶函数, 因此其 Fourier 变换为余弦变换,

$$a(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cos ut\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos ut\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\frac{\sin u}{u},$$

$$\Longrightarrow\ f(x)\sim\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin u\cos ux}{u}\,\mathrm{d}u=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ \dfrac{1}{2}, & |x|=1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ \int_0^{+\infty}\frac{\sin u\sin ux}{u}\,\mathrm{d}u=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & |x|<1,\\ \dfrac{\pi}{4}, & |x|=1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

□

12.4.5 求函数 $F(\lambda)=\lambda\mathrm{e}^{-\beta|\lambda|}$ $(\beta>0)$ 的 Fourier 逆变换.

解 注意到, $F(\lambda)$ 为奇函数, 从而其 Fourier 逆变换

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\beta\lambda}\,\mathrm{i}\sin\lambda x\,\mathrm{d}\lambda=\frac{\mathrm{i}}{\pi}\cdot\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\beta\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda\right),$$

而

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\beta\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda&=\int_0^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{(\mathrm{i}x-\beta)\lambda}\,\mathrm{d}\lambda\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\lambda}{\mathrm{i}x-\beta}\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}x-\beta)\lambda}\\&=\frac{1}{\mathrm{i}x-\beta}\left(\lambda\mathrm{e}^{(\mathrm{i}x-\beta)\lambda}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}x-\beta)\lambda}\,\mathrm{d}\lambda\right)\\&=\frac{1}{\mathrm{i}x-\beta}\left(\Big|-\frac{1}{\mathrm{i}x-\beta}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}x-\beta)\lambda}\Big|_0^{+\infty}\right)\\&=\frac{1}{(\mathrm{i}x-\beta)^2},\end{aligned}$$

其中已用到

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\mathrm{e}^{(\mathrm{i}x-\beta)\lambda}=\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\beta\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}=0,\qquad\lim_{\lambda\to+\infty}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}x-\beta)\lambda}=\lim_{\lambda\to+\infty}\mathrm{e}^{-\beta\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}=0,$$

因此

$$f(x)=\frac{\mathrm{i}}{\pi}\cdot\mathrm{Im}\,\frac{1}{(\mathrm{i}x-\beta)^2}=\frac{\mathrm{i}}{\pi}\cdot\mathrm{Im}\,\frac{(\mathrm{i}x+\beta)^2}{(-x^2-\beta^2)^2}=\frac{2\beta x\,\mathrm{i}}{\pi(x^2+\beta^2)^2}.$$

□

12.5 第 12 章综合习题

12.5.1 证明: 级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 在不包含 2π 整数倍的闭区间上一致收敛, 但它不是 $\mathbf{R}^2[-\pi,\pi]$ 中任意一个函数的 Fourier 级数.

此处 $\mathbf{R}^2[-\pi,\pi]$ 表示 $[-\pi,\pi]$ 上满足以下条件的函数的全体:
(1) 若 f 是 $[-\pi,\pi]$ 上的有界函数, 则它是 Riemann 可积的;
(2) 若 f 是 $[-\pi,\pi]$ 上的无界函数, 则 f^2 是反常可积的.

证明 只需证明该级数在 $(0,2\pi)$ 上内闭一致收敛. 考虑其闭子区间 $[a,b]\subset(0,2\pi)$, 则

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx\cdot 2\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2k-1}{2}x-\cos\frac{2k+1}{2}x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

记 $m=\min\left\{\sin\dfrac{a}{2},\sin\dfrac{b}{2}\right\}(>0)$, 则

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|=\left|\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\leqslant\frac{1}{m},$$

故 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx$ 在 $[a,b]$ 上一致有界, 又 $\left\{\dfrac{1}{\ln n}\right\}$ 一致收敛于 0, 由 Dirichlet 判别法知, 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\ln n}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

下证其不是 $\mathbf{R}^2[-\pi,\pi]$ 中任意一个函数的 Fourier 级数.

用反证法. 假设其为某个函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 由 Parseval 等式知

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

从而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^2 n}$ 收敛, 这与已知事实矛盾. 故原级数不是 $\mathbf{R}^2[-\pi,\pi]$ 中任意一个函数的 Fourier 级数. □

12.5.2 证明下列等式:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\cos nx}{n}=\ln\left(2\cos\dfrac{x}{2}\right)\quad(-\pi<x<\pi)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n}=-\ln\left(2\sin\dfrac{x}{2}\right)\quad(0<x<2\pi)$.

引理 12.1

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

证明 (1) 考虑函数 $f(x)=\ln\left(2\cos\dfrac{x}{2}\right)$ 的 Fourier 级数. 由于其为偶函数, 故其 Fourier 级数为余弦级数.

由引理 12.1 得:

$$-\frac{\pi}{2}\ln 2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln 2\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\to\frac{t}{2}}\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\cos\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\pi}\ln\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\Longrightarrow\int_0^{\pi}\ln\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=-\pi\ln 2,$$

故

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \ln 2 \,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \ln\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x\right) = 0,$$

又

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{n}\sin nx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx\frac{-\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x\right] \\
&\overset{\dagger}{=} \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x \xlongequal{\pi-x\to t} \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin n(\pi-t)\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nt\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t+\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\ddagger}{=} \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = (-1)^{n-1}\frac{1}{n},
\end{aligned}$$

其中 † 处已经用到

$$\lim_{x\to\pi}\sin nx\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right) = 0,$$

‡ 处用到 Dirichlet 核

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t \xlongequal{n\to n-1} \int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = \pi.$$

故

$$\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n}, \quad -\pi < x < \pi.$$

(2) 上式中记 $x+\pi\to t$ 得:

$$\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) = \ln\left(2\cos\frac{t-\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos n(t-\pi)}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nt}{n},$$

$$\Longrightarrow -\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

□

12.5.3

(1)

(2)

(1)

(2)

12.5.4 设 f 是周期为 2π 且在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积的函数. 如果它在 $[-\pi,\pi]$ 上单调, 证明:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n\to\infty).$$

分析 要证 $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n \to \infty)$, 即证 $\frac{a_n}{\frac{1}{n}} = na_n$ 有界, 即 $\exists M > 0$, 使得 $|na_n| \leqslant M$ 对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 成立.

如果单从级数收敛的角度考虑, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

两个级数均收敛 (分别由 Bessel 不等式及逐项积分得到), 但显然我们无法由此推出 na_n 有界. 事实上, 我们可以举出反例: 取 $a_n = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$, 满足上述两个级数均收敛, 但 $na_n = n^{\frac{1}{3}}$ 无界.

因此, 为了证明 $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n \to \infty)$, 我们需要考虑 a_n 作为某个函数 f 的 Fourier 级数, 其具有的特殊性质. 故我们从其形式入手.

引理 12.2 (第二积分平均值定理) 设 $f \in R[a,b]$, g 在 $[a,b]$ 上单调, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 (1) 要证 $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n \to \infty)$, 即证 $\frac{a_n}{\frac{1}{n}} = na_n$ 有界, 即 $\exists M > 0$, 使得 $|na_n| \leqslant M$ 对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 成立.

由 f 单调及**引理 12.2** 知, $\exists \xi \in [-\pi, \pi]$, 使得

$$\begin{aligned}
na_n &= \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{n}{\pi}\left(f(-\pi)\int_{-\pi}^{\xi}\cos nx\,\mathrm{d}x + f(\pi)\int_{\xi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left[f(-\pi)\left(\sin nx\Big|_{-\pi}^{\xi}\right) + f(\pi)\left(\sin nx\Big|_{\xi}^{\pi}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\sin n\xi(f(-\pi) - f(\pi)), \\
\Longrightarrow |na_n| &\leqslant \frac{1}{\pi}\left|f(\pi) - f(-\pi)\right|,
\end{aligned}$$

故 na_n 有界, 从而 $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n \to \infty)$, 同理可证得: $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n \to \infty)$. □

证明 (2) 要证 $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n \to \infty)$, 即证 na_n 有界.

$$na_n = \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t \xlongequal{nt \to x} \frac{1}{\pi}\int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,\mathrm{d}x,$$

令 $x_k = -n\pi + 2k\pi$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$, 则

$$-n\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = n\pi, \quad \Delta x_k = 2\pi,$$

则

$$\begin{aligned}\int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(f\left(\frac{x}{n}\right)-f\left(\frac{x_k}{n}\right)\right)\cos x\,\mathrm{d}x + f\left(\frac{x_k}{n}\right)\int_{x_k}^{x_{k+1}}\cos x\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(f\left(\frac{x}{n}\right)-f\left(\frac{x_k}{n}\right)\right)\cos x\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

不妨设 $f(x)$ 单调递减, 则

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(f\left(\frac{x}{n}\right)-f\left(\frac{x_k}{n}\right)\right)\cos x\,\mathrm{d}x\right| \\ \leqslant{}& \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left|f\left(\frac{x}{n}\right)-f\left(\frac{x_k}{n}\right)\right||\cos x|\,\mathrm{d}x \\ \leqslant{}& \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(f\left(\frac{x_k}{n}\right)-f\left(\frac{x}{n}\right)\right)\mathrm{d}x \\ \leqslant{}& \sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{x_k}{n}\right)-f\left(\frac{x_{k+1}}{n}\right)\right)\Delta x_k \\ ={}& \left(f\left(\frac{x_0}{n}\right)-f\left(\frac{x_n}{n}\right)\right)\cdot 2\pi \\ ={}& (f(-\pi)-f(\pi))\cdot 2\pi,\end{aligned}$$

故 na_n 有界, 从而 $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)\ (n\to\infty)$, 同理可证得: $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)\ (n\to\infty)$. □

12.5.5

12.5.6

12.5.7 设 f 是周期为 2π 的连续函数. 令

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t,$$

用 a_n, b_n 和 A_n, B_n 分别表示 f 和 F 的 Fourier 系数. 证明:

$$A_0 = a_0^2,\quad A_n = a_n^2 + b_n^2,\quad B_n = 0.$$

由此推出 f 的 Parseval 等式.

证明 由 f 是周期为 2π 知,

$$\begin{aligned}A_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\mathrm{d}t\int_{t-\pi}^{t+\pi}f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2=a_0^2.\end{aligned}$$

下证: $A_n=a_n^2+b_n^2$.

一方面,

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi^2}\iint_D f(t)f(x+t)\cos nx\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

其中 $D=[-\pi,\pi]^2$.

另一方面,

$$\begin{aligned}\pi^2(a_n^2+b_n^2)&=\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\right)^2+\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t\right)^2\\&=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nu\,\mathrm{d}u+\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nu\,\mathrm{d}u\\&=\iint_D f(t)f(u)\cos n(t-u)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\\&\xlongequal{u-t\to x}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\mathrm{d}t\int_{-\pi-t}^{\pi-t}f(t+x)\cos nx\,\mathrm{d}x\\&\overset{\dagger}{=}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi}f(t+x)\cos nx\,\mathrm{d}x\\&=\iint_D f(t)f(x+t)\cos nx\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中 † 处已用到 $g(x)=f(t+x)\cos nx$ 也是周期为 2π 的函数.

故

$$A_n=a_n^2+b_n^2.$$

最后证: $B_n=0$.

只需证 $F(x)$ 为偶函数, 即 $F(x)=F(-x)$. 注意到,

$$\pi F(-x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(-x+t)\,\mathrm{d}t\xlongequal{-x+t\to u}\int_{-x-\pi}^{-x+\pi}f(u+x)f(u)\,\mathrm{d}u=\int_{-\pi}^{\pi}f(u)f(x+u)\,\mathrm{d}u,$$

其中上式已用到 $h(u)=f(u)f(x+u)$ 也是周期为 2π 的函数.

故 $F(x)=F(-x)$ 是偶函数, 其 Fourier 级数为余弦函数, 从而 $B_n=0$. □

12.5.8 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 连续, 并在此区间上有可积且平方可积的导数 f'. 如果 f 满足

$$f(-\pi)=f(\pi),\quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

证明:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

当且仅当 $f(x)=\alpha\cos x+\beta\sin x$ 时等号成立.

证明 由 $f\in C[-\pi,\pi]$ 知, 其 Fourier 级数在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 f, 即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

由一致收敛的函数项级数的可微性知,

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(na_n\cos nx-nb_n\sin nx).$$

由 Parseval 等式知, 要证:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

即证:

$$\sum_{n=1}^{\infty}((na_n)^2+(nb_n)^2)\geqslant \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2),$$

由 $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 知, 上式

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty}((na_n)^2+(nb_n)^2)\geqslant \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2),$$

显然成立.

其中等号成立当且仅当

$$a_k=b_k=0\ (k=2,3,\cdots)\implies f(x)=\alpha\cos x+\beta\sin x,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

□

12.6 第 12 章补充习题

12.6.1 (反常积分下的 Parseval 等式) 设 $f\in L^2[-\pi,\pi]$ 且 $-\pi$ 是 $f(x)$ 的唯一瑕点, 证明对于这样的函数, Parseval 等式

$$\lim_{n\to\infty}\|f(x)-S_n(x)\|^2=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n(x))^2\,\mathrm{d}x=0$$

也成立.

证明 对 $\forall\varepsilon>0$, 由 f^2 反常可积知, $\exists\xi\in(0,2\pi)$, 使得

$$\int_{-\pi}^{-\pi+\xi} f^2(x)\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4},$$

记

$$f_1(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x\leqslant-\pi+\xi,\\ f(x), & -\pi+\xi<x\leqslant\pi,\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}f(x), & -\pi\leqslant x\leqslant-\pi+\xi,\\ 0, & -\pi+\xi<x\leqslant\pi,\end{cases}$$

满足 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ 且 $f_1(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积, 记其 Fourier 级数的前 n 项和为 $T_n(x)$, 由 Parseval 等式知, $\exists N\in\mathbb{N}^*$, 使得当 $n>N$ 时, 有

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f_1(x)-T_n(x))^2\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4},$$

故

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_n(x))^2\,\mathrm{d}x&=\int_{-\pi}^{\pi}(f_1(x)-T_n(x)+f_2(x))^2\,\mathrm{d}x\\&\leqslant 2\int_{-\pi}^{\pi}(f_1(x)-T_n(x))^2\,\mathrm{d}x+2\int_{-\pi}^{\pi}f_2^2(x)\,\mathrm{d}x\\&<\frac{\varepsilon}{2}+2\int_{-\pi}^{-\pi+\xi}f^2(x)\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

记 $f(x)$ 的 Fourier 级数的前 n 项和为 $S_n(x)$, 从而

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n(x))^2\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_n(x))^2\,\mathrm{d}x<\varepsilon,\quad\forall n>N,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\|f(x)-S_n(x)\|^2=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n(x))^2\,\mathrm{d}x=0.$$

□

说明 对于 $f(x)$ 有多个瑕点的情形, 只需重复上述讨论, 可知 Parseval 等式

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\|f(x)-S_n(x)\|^2=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n(x))^2\,\mathrm{d}x=0\\\Longleftrightarrow\ &\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

对所有 $f\in L^2[-\pi,\pi]$ 成立.

第 13 章　反常积分和含参变量的积分

13.1　反常积分

13.1.1　判断下列反常积分的敛散性:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$;

(3)

(4) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}^2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln\ln x}$;

(5) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$;

(6)

(7)

(8)

(9)

(10)

(11)

(12) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^{\mu}}\,\mathrm{d}x$.

解　(1)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{\ln(x^2+1)}{x}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}\,\mathrm{d}x,$$

而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0,$$

从而 $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\ln(x^2+1)}{x}\,\mathrm{d}x$ 是 Riemann 可积的, 又

$$\frac{\ln(x^2+1)}{x}>\frac{1}{x}>0,\quad x>2,$$

$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散, 由比较判别法知积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散, 故原积分发散.

(2)

(3)

(4)

$$\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln\ln x}=\int_{e^2}^{+\infty}\frac{d\ln x}{\ln\ln x}\xlongequal{\ln x\to t}\int_2^{+\infty}\frac{dt}{\ln t},$$

注意到

$$\frac{\frac{1}{\ln t}}{\frac{1}{t}}=\frac{t}{\ln t}\to+\infty,\quad t\to+\infty,$$

由 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{t}dt$ 发散及比较判别法知, 原积分发散.

(5) 注意到,

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to1}\frac{-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=0,$$

因此 $x=1$ 不是瑕点,

$$\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx\xlongequal{x\to\frac{1}{t}}\int_{+\infty}^1\frac{-\ln t}{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t\sqrt{t^2-1}}dt,$$

而

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{\ln t}{t\sqrt{t^2-1}}}{\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{\sqrt{t}}=0,$$

由 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}dt$ 收敛及比较判别法知, $\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t\sqrt{t^2-1}}dt$ 收敛, 从而原积分收敛.

(6)

(7)

(8)

(9)

(10)

(11)

(12)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^\mu}dx=\int_0^1\frac{\arctan x}{x^\mu}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^\mu}dx,$$

而

$$\frac{\arctan x}{x^\mu}\sim\frac{1}{x^{\mu-1}},\quad x\to0,$$

(I) 当 $\mu-1\leqslant0\iff\mu\leqslant1$ 时, $\int_0^1\frac{\arctan x}{x^\mu}dx$ 是 Riemann 可积的;

(II) 当 $0<\mu-1<1\iff1<\mu<2$ 时, $\int_0^1\frac{1}{x^{\mu-1}}dx$ 收敛, 由比较判别法知, $\int_0^1\frac{\arctan x}{x^\mu}dx$ 收敛;

(III) 当 $\mu-1\geqslant1\iff\mu\geqslant2$ 时, $\int_0^1\frac{1}{x^{\mu-1}}dx$ 发散, 由比较判别法知, $\int_0^1\frac{\arctan x}{x^\mu}dx$ 发散;

又

$$\frac{\arctan x}{x^\mu}\sim\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^\mu},\quad x\to+\infty,$$

(I) 当 $\mu>1$ 时, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\mu}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 由比较判别法知, $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^\mu}\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(II) 当 $\mu\leqslant 1$ 时, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\mu}\,\mathrm{d}x$ 发散, 由比较判别法知, $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^\mu}\,\mathrm{d}x$ 发散.

从而原积分当且仅当 $1<\mu<2$ 时收敛, 其余情况均发散. □

13.1.2 研究下列积分的条件收敛与绝对收敛性:

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(1-2x)}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$;

(2)

(3) $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)}\,\mathrm{d}x\ (p>0)$;

(5)

(6)

解 (1) 注意到,

$$\frac{|\cos(1-2x)|}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2+1}}\sim\frac{|\cos(1-2x)|}{x},\quad x\to+\infty,$$

而

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{|\cos(1-2x)|}{x}\,\mathrm{d}x&\geqslant\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2(1-2x)}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_1^{+\infty}\frac{1+\cos(2-4x)}{2x}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\cos(2-4x)}{2x}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散, 又

$$\left|\int_1^{a}\cos(2-4x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{1}{4}\sin(4x-2)\Big|_1^a\right|\leqslant\frac{1}{2},\quad\forall a>1$$

有界且 $\frac{1}{x}$ 单调递减趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(2-4x)}{2x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 从而积分 $\int_1^{+\infty}\frac{|\cos(1-2x)|}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散, 由比较判别法知, $\int_1^{+\infty}\frac{|\cos(1-2x)|}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$ 发散.

另一方面,

$$\frac{\cos(1-2x)}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2+1}}\sim\frac{\cos(1-2x)}{x},\quad x\to+\infty,$$

由 $\int_1^{a}\cos(1-2x)\,\mathrm{d}x\ (a>1)$ 有界且 $\frac{1}{x}$ 单调递减趋于 0 及 Dirichlet 判别法知, $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(1-2x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 由比较判别法知, $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(1-2x)}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

综上, 原积分条件收敛.

(2)

(3) 一方面,

$$\int_2^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x\ln x}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_2^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty}\frac{1}{2x\ln x}\,\mathrm{d}x - \int_2^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x\ln x}\,\mathrm{d}x,$$

$\int_2^{+\infty}\frac{1}{2x\ln x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\ln x\Big|_2^{+\infty}$ 发散, 又 $\int_2^{a}\cos 2x\,\mathrm{d}x$ $(a>2)$ 有界且 $\frac{1}{2x\ln x}$ 单调递减趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知, $\int_2^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x\ln x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 从而 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$ 发散, 由比较判别法知, $\int_2^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$ 发散.

另一方面, $\int_2^{a}\sin x\,\mathrm{d}x$ $(a>2)$ 有界且 $\frac{1}{x\ln x}$ 单调递减趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知, $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

综上, 原积分条件收敛.

(4)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1}\frac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)}\,\mathrm{d}x,$$

注意到

$$0<\frac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)}<\frac{\ln(1+x)}{x^2}<\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},\quad x\to+\infty,$$

由比较判别法知, $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)}\,\mathrm{d}x$ 收敛;

又

$$\frac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)}\sim\frac{x}{x^2(1+x^p)}\sim\frac{1}{x},\quad x\to 0,$$

由 $\int_0^{1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散及比较判别法知, $\int_0^{1}\frac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)}\,\mathrm{d}x$ 发散, 从而原积分发散.

(5)

(6)

□

13.1.3 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调、连续, $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 求证: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证明 不妨设 $f(x)$ 单调递减.

先证: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ 存在.

只需证 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界. 用反证法. 假设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上无界, 则 $\exists X>a$, 使得当 $x>X$ 时, 有 $f(x)<-1$, 从而 $\int_X^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x<\int_X^{+\infty}(-1)\,\mathrm{d}x$, 原积分发散, 与题设矛盾. 故 $f(x)$ 有界. 又 $f(x)$ 单调, 从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ 存在.

下证: $b=0$.

用反证法. 假设 $b\neq 0$, 不妨 $b>0$, 从而对 $\varepsilon=\frac{b}{2}$, $\exists X'>a$, 使得当 $x>X'$ 时, 有

$$|f(x)-b|<\frac{b}{2}\iff\frac{b}{2}<f(x)<\frac{3}{2}b,$$

从而

$$\int_{X'}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x > \int_{X'}^{+\infty} \frac{b}{2}\,\mathrm{d}x \to +\infty,$$

故原积分发散, 与题设矛盾. 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b = 0$. □

说明 此处的 "连续" 条件并不是必需的.

13.1.4 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上非负, $\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 且当 $0 < x < y$ 时, 有

$$f(y) \leqslant f(x) + \int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t.$$

求证: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

证明 先证: $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界.

取 $x = 1$, 对 $\forall y > x = 1$, 有

$$0 \leqslant f(y) \leqslant f(1) + \int_1^y g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(1) + \int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t,$$

由 $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ 收敛知, $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界, 又 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界, 从而 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界.

再证: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

由 $f(x)$ 有界及 Bolzano-Weierstrass 定理知, 存在数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n \to +\infty\ (n\to\infty)$ 且 $\{f(a_n)\}$ 收敛. 记 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l(\geqslant 0)$.

对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N_1$ 时, 有

$$|f(a_n) - l| < \frac{\varepsilon}{2},$$

由 $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ 收敛及 Cauchy 收敛准则知, $\exists X > 0$, 使得当 $x, y > X$ 时, 有

$$\left|\int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2},$$

又 $a_n \to +\infty\ (n\to\infty)$, 从而 $\exists N_2 \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N_2$ 时, 有 $a_n > X$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $x > a_{N+1}(> X)$ 时, $\exists n_1, n_2 > N$, 满足 $a_{n_1} \leqslant x \leqslant a_{n_2}$, 从而

$$\begin{cases} f(x) \leqslant f(a_{n_1}) + \displaystyle\int_{a_{n_1}}^x g(t)\,\mathrm{d}t < l + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \\ l - \dfrac{\varepsilon}{2} < f(a_{n_2}) \leqslant f(x) + \displaystyle\int_x^{a_{n_2}} g(t)\,\mathrm{d}t < f(x) + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon,$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ 存在. □

13.1.5 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上非负, $g(x)$ 单调递减趋于 0, 且 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 求证: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

提示 考虑 Cauchy 收敛准则.

证明 由 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛及 Cauchy 收敛准则知, 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists X_1>0$, 使得当 $x>A>X_1$ 时, 有

$$\int_A^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2},$$

又 $g(x)$ 单调递减, 从而

$$g(x)\int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_A^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2},$$

由 $g(x)\to 0$ $(x\to+\infty)$ 知, $\exists X_2>A$, 使得当 $x>X_2$ 时, 有

$$g(x) < \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t} \implies g(x)\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2},$$

从而当 $x>X_2$ 时, 有

$$g(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = g(x)\left(\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t + \int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

13.1.6 设 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 且 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$. 求证: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t = 0$.

证明 由 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$ 知, $g(x)$ 有界, 即 $\exists M>0$, 使得 $|g(x)|\leqslant M$ 对 $\forall x\in[0,+\infty)$ 成立.

对 $\forall\varepsilon>0$, 由 $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t := l$ 收敛及 Cauchy 收敛准则知, $\exists X_1>0$, 使得当 $y>X_1$ 时, 有

$$\int_y^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2M},$$

对上述取定的 y, 由 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$ 知, $\exists X_2>y$, 使得当 $x>X_2$ 时, 有

$$|g(x-y)| < \frac{\varepsilon}{2l},$$

从而

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^y f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t + \int_y^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_0^y |f(t)|\,|g(x-t)|\,\mathrm{d}t + \int_y^x |f(t)|\,|g(x-t)|\,\mathrm{d}t \\
&< \frac{\varepsilon}{2l}\int_0^y |f(t)|\,\mathrm{d}t + M\int_y^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \\
&< \frac{\varepsilon}{2l}\cdot l + M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

此即
$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t=0.$$

□

13.2 反常多重积分

13.2.1 计算反常积分:

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是单位圆内部;

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x+y)^\alpha}$, 其中 D 是第一象限, $\alpha>2$ 为常数;

(3) $\displaystyle\iint_D \max\{x,y\}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是第一象限;

(4) $\displaystyle\iint_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2-2xy\cos\alpha}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

解 (1)

(2) 注意到, $f(x,y)=\dfrac{1}{(1+x+y)^\alpha}>0$, 记 $x+y=t$,
$$S(t)=\{(x,y)|x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant t\},$$
选取 D 的竭尽递增列 $\{S(n)\}$, 由于 $\sigma(S(t))=\dfrac{1}{2}t^2\implies \mathrm{d}\sigma=t\,\mathrm{d}t$, 从而
$$\begin{aligned}
&\iint_{D_n}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x+y)^\alpha}=\int_0^n\frac{t\,\mathrm{d}t}{(1+t)^\alpha}=\int_0^n t\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1-\alpha}(1+t)^{1-\alpha}\right)\\
&=t\cdot\frac{1}{1-\alpha}(1+t)^{1-\alpha}\bigg|_0^n-\int_0^n\frac{1}{1-\alpha}(1+t)^{1-\alpha}\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{1-\alpha}\frac{n}{(1+n)^{\alpha-1}}-\frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{2-\alpha}(1+t)^{2-\alpha}\bigg|_0^n\\
&=\frac{1}{1-\alpha}\frac{n}{(1+n)^{\alpha-1}}-\frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)(1+n)^{\alpha-2}}+\frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)},
\end{aligned}$$
从而
$$\iint_D\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x+y)^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x+y)^\alpha}=\frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}$$

(3) 由对称性知,
$$\iint_D\max\{x,y\}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint_{D'}x\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
其中 $D'=\{(x,y)|x,y\geqslant 0,y\leqslant x\}$.

由 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\geqslant 0$, 取 D' 的竭尽递增列
$$D_n=B_n(\boldsymbol{O})\cap D',$$
其中 $B_n(\boldsymbol{O})=\{(x,y)\big|x^2+y^2\leqslant n^2\}$.

记 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 则 $D_n = \left\{(r,\theta)\middle|0 \leqslant r \leqslant n, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}\right\}$, 从而

$$\begin{aligned}\iint_{D_n} x\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^n r\cos\theta\cdot\mathrm{e}^{-r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^n r^2\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{2}r\mathrm{e}^{-r^2}\bigg|_0^n + \frac{1}{2}\int_0^n \mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\right),\end{aligned}$$

由 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 知,

$$\iint_{D'} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2\pi}}{8},$$

从而

$$\iint_D \max\{x,y\}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

(4) 注意到,

$$-(x^2+y^2+2xy\cos\alpha) = -[(x+y\cos\alpha)^2+(y\sin\alpha)^2],$$

记

$$\begin{cases}u = x+y\cos\alpha,\\ v = y\sin\alpha\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x = u - v\cot\alpha \geqslant 0,\\ y = v\csc\alpha \geqslant 0,\end{cases}$$

从而积分区域化为 $D' = \{(u,v)|v \geqslant 0, u \geqslant v\cot\alpha\}$, 且

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix}1 & -\cot\alpha\\ 0 & \csc\alpha\end{vmatrix} = \csc\alpha,$$

从而

$$\iint_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2-2xy\cos\alpha}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D'}\mathrm{e}^{-(u^2+v^2)}\cdot\csc\alpha\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \csc\alpha\iint_{D'}\mathrm{e}^{-(u^2+v^2)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

注意到 $f(u,v) = \mathrm{e}^{-(u^2+v^2)} > 0$, 取 D' 的竭尽递增列

$$D_n = B_n(\boldsymbol{O})\cap D',$$

记 $u = r\cos\theta, v = r\sin\theta$, 从而 D_n 等价于 $D_n' = \{(r,\theta)|0 \leqslant r \leqslant n, 0 \leqslant \theta \leqslant \alpha\}$, 故

$$\begin{aligned}\iint_{D_n}\mathrm{e}^{-(u^2+v^2)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v &= \int_0^\alpha\mathrm{d}\theta\int_0^n \mathrm{e}^{-r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r\\ &= \alpha\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\bigg|_0^n\right)\\ &= \frac{\alpha}{2}(1-\mathrm{e}^{-n^2}),\end{aligned}$$

因此

$$\csc\alpha\iint_{D'}\mathrm{e}^{-(u^2+v^2)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \csc\alpha\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\mathrm{e}^{-(u^2+v^2)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{\alpha\csc\alpha}{2}.$$

□

13.2.2 利用 Fresnel 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x^2\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 验证下列累次积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y=\pi.$$

并证明函数 $\sin(x^2+y^2)$ 在**定义 13.14**意义下在 $\mathbb{R}^2$ 上的反常二重积分发散.

提示 分别考虑 $\mathbb{R}^2$ 的两个竭尽递增列 $D_n=\{(x,y)||x|\leqslant n,|y|\leqslant n\}$ 和 $B_n=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant 2n\pi\right\}$

证明

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}(\sin x^2\cos y^2+\cos x^2\sin y^2)\,\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\left(\cos y^2\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x+\sin y^2\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x^2\,\mathrm{d}x\right)\\&=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\cos y^2\,\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}\sin y^2\,\mathrm{d}y\right)=\pi,\end{aligned}$$

同理可证得:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y=\pi.$$

另一方面, 取 $\mathbb{R}^2$ 的竭尽递增列

$$D_n=\left\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant n^2\right\},\quad n=1,2,\cdots$$

记 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$, 则

$$D_n=\{(r,\theta)|0\leqslant r\leqslant n,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\},$$

则

$$\iint_{D_n}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^n\sin r^2\cdot r\,\mathrm{d}r=2\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos r^2\Big|_0^n\right)=\pi(1-\cos n^2),$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\iint_{D_n}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 不存在, 从而 $\iint_{\mathbb{R}^2}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 发散. □

13.3 含参变量的积分

13.3.1 试用两种方法计算以下极限:

(1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x$;

(2)

解 (1) 由于 $f(x,\alpha)=\sqrt{x^2+\alpha^2}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 因此 $\varphi(\alpha)=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x$ 在 $\alpha=0$ 处连续, 从而

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x=\varphi(0)=\int_{-1}^{1}|x|\,\mathrm{d}x=2\cdot\left(\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1\right)=1.$$

另一方面,

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\alpha^2\ln(x+\sqrt{x^2+\alpha^2})+x\sqrt{x^2+\alpha^2})\Big|_{-1}^{1}$$
$$=\frac{1}{2}\alpha^2\ln\frac{1+\sqrt{\alpha^2+1}}{-1+\sqrt{\alpha^2+1}}+\sqrt{\alpha^2+1}\to 1,\quad \alpha\to 0,$$

其中已用到

$$0<\alpha^2\ln\frac{1+\sqrt{\alpha^2+1}}{-1+\sqrt{\alpha^2+1}}\leqslant\alpha^2\ln\frac{1+\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha^2}\sim\alpha^2\ln\frac{2}{\alpha^2}\to 0,\quad \alpha\to 0.$$

因此

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x=1.$$

(2)

□

13.3.2 求 $F'(\alpha)$:

(1)

(2)

(3) $F(\alpha)=\displaystyle\int_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\,\mathrm{d}x$;

(4) $F(\alpha)=f(x+\alpha,x-\alpha)\,\mathrm{d}x$ ($f(u,v)$ 有连续偏导数).

解 (1)

(2)

(3)

$$F'(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{1+\alpha x}\,\mathrm{d}x+\frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}\ln(1+\alpha x)\Big|_0^{\alpha}+\frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha}=\frac{2\ln(1+\alpha^2)}{\alpha}.$$

(4)

$$F'(\alpha)=\int_0^{\alpha}(f_1'(x+\alpha,x-\alpha)-f_2'(x+\alpha,x-\alpha))\,\mathrm{d}x+f(2\alpha,0).$$

□

13.3.3 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明:

$$y(x)=\frac{1}{k}\int_c^x f(t)\sin k(x-t)\,\mathrm{d}t,\quad c,x\in[a,b)$$

满足常微分方程

$$y''+k^2y=f(x),$$

其中 c 与 k 为常数.

证明

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{k}\int_c^x f(t)\sin k(x-t)\,\mathrm{d}t,\\
y'(x) &= \int_c^x f(t)\cos k(x-t)\,\mathrm{d}t,\\
y''(x) &= -k\int_c^x f(t)\sin k(x-t)\,\mathrm{d}t + f(x),\\
&\Longrightarrow y''+k^2y=f(x).
\end{aligned}
$$

□

13.3.4 应用对参数进行微分或积分的方法, 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\,\mathrm{d}x\ (a>0, b>0)$;

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1-2a\cos x + a^2)\,\mathrm{d}x\ (0\leqslant a<1)$;

(3)

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}\ (0\leqslant a<1)$.

解 (1) 显然 $f(x,a,b)=\ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\times\mathbb{R}^2$ 上连续, 因此 $\varphi(a,b)=$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\,\mathrm{d}x\ (a>0, b>0)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 且

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial a} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a\tan^2 x}{a^2\tan^2 x + b^2}\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\tan x\to t} \int_0^{+\infty} \frac{2at^2}{a^2t^2+b^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2a}{a^2-b^2}\int_0^{+\infty} \frac{(a^2t^2+b^2)-b^2(1+t^2)}{(a^2t^2+b^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2a}{a^2-b^2}\left(\arctan t\Big|_0^{+\infty} - \frac{b}{a}\arctan\left(\frac{a}{b}t\right)\Big|_0^{+\infty}\right) \\
&= \frac{2a}{a^2-b^2}\cdot\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{b}{a}\right) = \frac{\pi}{a+b}, \\
\frac{\partial\varphi}{\partial b} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2b\cos^2 x}{a^2\sin^2 + b^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2b}{a^2\tan^2 x + b^2}\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\tan x\to t} \int_0^{+\infty} \frac{2b}{a^2t^2+b^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2b}{b^2-a^2}\int_0^{+\infty} \frac{(a^2t^2+b^2)-a^2(1+t^2)}{(a^2t^2+b^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2b}{b^2-a^2}\left(\arctan t\Big|_0^{+\infty} - \frac{a}{b}\arctan\left(\frac{a}{b}t\right)\Big|_0^{+\infty}\right) \\
&= \frac{2b}{b^2-a^2}\cdot\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{a}{b}\right) = \frac{\pi}{a+b}, \\
&\Longrightarrow \varphi(a,b) = \pi\ln(a+b) + C,
\end{aligned}$$

$$\varphi(1,1) = 0 \Longrightarrow C = -\pi\ln 2 \Longrightarrow \varphi(a,b) = \pi\ln\frac{a+b}{2}.$$

(2)

$$\begin{aligned}
\varphi(a) &:= \int_0^{\pi} \ln(1-2a\cos x + a^2)\,\mathrm{d}x, \quad 0 \leqslant a < 1, \\
\varphi'(a) &= \int_0^{\pi} \frac{-2\cos x + 2a}{1-2a\cos x + a^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1-a^2}{a}\cdot\frac{1}{1-2a\cos x+a^2}\right)\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{1}{1-2a\cos x+a^2}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{\tan\frac{x}{2}\to t} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-2a\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+a^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{(a+1)^2t^2+(a-1)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{a^2-1}\arctan\frac{a+1}{a-1}t\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{1-a^2}, \\
&\Longrightarrow \varphi'(a) = 0 \Longrightarrow \varphi(a) = \varphi(0) = 0.
\end{aligned}$$

(3)

(4)

$$
\begin{aligned}
\varphi(a) &:= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}, \quad 0\leqslant a<1,\\
\varphi'(a) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-a^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^2 x-a^2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{\tan x\to t} 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2-a}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{1-a^2}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}},\\
&\Longrightarrow \varphi(a)=\pi\arcsin a+C,\\
\varphi(0)=0 &\Longrightarrow C=0 \Longrightarrow \varphi(a)=\pi\arcsin a.
\end{aligned}
$$

□

13.4 含参变量的反常积分

13.4.1 确定下列含参变量反常积分的收敛域:

(1)

(2)

(3)

(4)

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)}\,\mathrm{d}x$;

(6) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$.

解 (1)

(2)

(3)

(4)

(5) 当 $\alpha\leqslant 2$ 时,

$$
\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)}\sim\frac{x^2}{x^\alpha}=x^{2-\alpha}\to 0,\quad x\to 0,
$$

此时 $x=0$ 不是瑕点.

$$
\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x^\alpha(1+x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2x^\alpha(1+x)}\,\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^\alpha(1+x)}\,\mathrm{d}x,
$$

注意到, 当 $\alpha\geqslant 0$ 时, $\displaystyle\int_1^A\cos 2x\,\mathrm{d}x$ 有界, $\displaystyle\frac{1}{x^\alpha(1+x)}$ 单调递减趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^\alpha(1+x)}\,\mathrm{d}x$ 收敛;

当 $\alpha > 0$ 时, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^\alpha(1+x)}\mathrm{d}x$ 收敛, 因此 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)}\mathrm{d}x$ 收敛.

(I) 当 $0 < \alpha \leqslant 2$ 时, $x = 0$ 不是瑕点, 原积分与 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)}\mathrm{d}x$ 同收敛;

(II) 当 $\alpha > 2$ 时,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)}\mathrm{d}x,$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)}\mathrm{d}x$ 收敛, 而

$$\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)} \sim \frac{1}{x^{\alpha-2}}, \quad x \to 0,$$

(i) $\alpha - 2 \in (0,1) \iff \alpha \in (2,3)$ 时, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)}\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-2}}\mathrm{d}x$ 同收敛, 因此原积分收敛;

(ii) $\alpha - 2 \in [1,+\infty) \iff \alpha \in [3,+\infty)$ 时, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)}\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-2}}\mathrm{d}x$ 同发散, 因此原积分发散;

(III) 当 $\alpha = 0$ 时, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+x)}\mathrm{d}x$ 发散, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2(1+x)}\mathrm{d}x$ 收敛, 由此 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+x)}\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2(1+x)}\mathrm{d}x$ 发散;

(IV) 当 $\alpha < 0$ 时,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)}\mathrm{d}x \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x}\mathrm{d}x \to +\infty,$$

因此原积分发散.

综上, 原积分的收敛域为 $(0,3)$.

(6) 当 $\alpha \leqslant 2$ 时,

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} \sim \frac{x^2}{x^\alpha} = x^{2-\alpha} \to 0, \quad x \to 0,$$

因此 $x = 0$ 不是瑕点.

注意到, 当 $\alpha > 1$ 时, 对充分大的 x, 有

$$0 < \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} \leqslant \frac{x^{\frac{\alpha-1}{2}}}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}},$$

由 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}\mathrm{d}x$ 收敛及比较判别法知, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 收敛.

(I) $\alpha \in (1,2]$, 此时 $x = 0$ 不是瑕点, 原积分与 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 同收敛;

(II) $\alpha \in (2,+\infty)$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}\mathrm{d}x,$$

而

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} \sim \frac{x^2}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-2}},$$

(i) 当 $\alpha - 2 \in (0,1) \iff \alpha \in (2,3)$ 时, $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-2}}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 从而 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 原积分收敛;

(ii) 当 $\alpha - 2 \in [1,+\infty) \iff \alpha \in [3,+\infty)$ 时, $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-2}}\,\mathrm{d}x$ 发散, 从而 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 发散, 原积分发散;

(III) $\alpha \in (-\infty,1]$, 对充分大的 x, 有

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} \geqslant \frac{1}{x^\alpha} > 0,$$

由 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 发散及比较判别法知, 原积分发散.

综上, 原积分的收敛域为 $(1,3)$. □

13.4.2 研究下列积分在指定区间上的一致收敛性:

(1)

(2) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{d}x$,

(a) $0 < \alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty$;

(b) $0 < \alpha < +\infty$.

(3)

(4) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \ (1 < \alpha < +\infty)$;

(5)

(6)

解 (1)

(2) (a) 当 $0 < \alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty$ 时,

$$|\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x| \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha_0 x},$$

由 $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha_0 x}\,\mathrm{d}x$ 收敛及 Weierstrass 判别法知, 原积分在 $[\alpha_0,+\infty)$ 上一致收敛.

(b) 当 $\beta = 0$ 时, 原积分 $= 0$, 固然在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛;

当 $\beta \neq 0$ 时, 由于 $\alpha = 0$ 时,

$$\int_0^{+\infty} \sin\beta x\,\mathrm{d}x$$

发散, 由**习题 13.4.3**的结论知, 原积分在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

(3)

(4) 由于 $\alpha = 1$ 时,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x}\,\mathrm{d}x$$

发散, 由**习题 13.4.3**的结论知, 原积分不一致收敛.

(5)

(6)

□

13.4.3 设 $f(x,u)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$, $\alpha\leqslant u\leqslant\beta$ 上连续, 又对于 $[\alpha,\beta)$ 上每一 u, 积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 而当 $u=\beta$ 时, $\int_a^{+\infty}f(x,\beta)\,\mathrm{d}x$ 发散, 试证: 积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta)$ 上必不一致收敛.

证明 用反证法. 假设其在 $[\alpha,\beta)$ 上一致收敛, 从而对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists X>a$, 使得当 $A_1,A_2>X$ 时, 有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x,u)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \forall u\in[\alpha,\beta),$$

令 $u\to\beta^-$, 又由 $f(x,u)$ 在 $u\in[\alpha,\beta]$ 上连续知,

$$\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x,\beta)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

这与 $\int_a^{+\infty}f(x,\beta)\,\mathrm{d}x$ 发散矛盾. 因此积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta)$ 上必不一致收敛. □

13.4.4

13.4.5 验证:

$$\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^{+\infty}(2-xu)xu\mathrm{e}^{-xu}\,\mathrm{d}x\neq\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^1(2-xu)xu\mathrm{e}^{-xu}\,\mathrm{d}u,$$

并说明理由.

证明

$$\begin{aligned}
LHS&=\int_0^1\mathrm{d}u\cdot\frac{1}{u}\int_0^{+\infty}(2t-t^2)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^1\mathrm{d}u\cdot\frac{1}{u}\left(t^2\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{+\infty}\right)=0,\\
RHS&=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\cdot\frac{1}{x}\int_0^{x}(2-t)t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\cdot\frac{1}{x}\left(t^2\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{x}\right)\\
&=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\
&=-(1+x)\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1,
\end{aligned}$$

其原因是 $\int_0^{+\infty}f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛, 其中 $f(x,u)=(2-xu)xu\mathrm{e}^{-xu}$.

事实上,

$$\int_A^{+\infty}f(x,u)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{u}(xu)^2\mathrm{e}^{-xu}\Big|_{x=A}^{+\infty}=-A^2u\mathrm{e}^{-Au},$$

则

$$\begin{aligned}\beta(A) &= \sup_{u\in[0,1]}\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x\right| = \sup_{u\in[0,1]}\left|A^2u\mathrm{e}^{-Au}\right| \\ &\geqslant \sup_{u\in[0,1]}\left|A^2u(1-Au)\right| = \sup_{u\in[0,1]}\left|-A^3u^2+A^2u\right| = \frac{A}{4} \to +\infty, \quad A\to+\infty,\end{aligned}$$

其中已用到 $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$ 及 $g(u) = -A^3u^2 + A^2u$ 当且仅当 $u = \dfrac{1}{2A}$ 时取得最大值 $\dfrac{A}{4}$.

因此 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛. □

13.4.6 证明: $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\,\mathrm{d}x$ 在 $0 \leqslant \alpha < +\infty$ 上连续且可微的函数.

证明 注意到,

$$\left|\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2}, \quad x,\alpha \geqslant 0,$$

由 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛及 Weierstrass 判别法知, $F(\alpha)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, 从而 $F(\alpha)$ 连续.

又

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right) &= \cos x\left(-\frac{2(x+\alpha)}{(1+(x+\alpha)^2)^2}\right), \\ \Longrightarrow \left|\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right)\right| &\leqslant \frac{2(x+\alpha)}{1+(x+\alpha)^4} \leqslant \frac{3}{1+(x+\alpha)^3} \leqslant \frac{3}{1+x^3},\end{aligned}$$

其中已用到

$$3+3(x+\alpha)^4 \geqslant 2(x+\alpha)^4 + 4(x+\alpha) \geqslant 2(x+\alpha)^4 + 2(x+\alpha) = 2(x+\alpha)(1+(x+\alpha)^3).$$

由 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{3}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ 收敛及 Weierstrass 判别法知, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right)\mathrm{d}x$ 一致收敛, 因此 $F'(\alpha)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微, 且

$$F'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{-2\cos x(x+\alpha)}{(1+(x+\alpha)^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

□

13.4.7 计算下列积分:

(1)

(2)

(3)

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2} - \mathrm{e}^{-\beta x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$;

(6)

解 (1)

(2)

(3)

(4) 注意到,

$$\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2}-\mathrm{e}^{-\beta x^2}}{x}=-\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-ux^2}\Big|_{\alpha}^{\beta}=\int_{\alpha}^{\beta}x\mathrm{e}^{-ux^2}\,\mathrm{d}u,$$

考虑 $\varphi(u)=\displaystyle\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2u}\,\mathrm{d}x$.

$$x\mathrm{e}^{-x^2u}\leqslant x\mathrm{e}^{-\alpha x^2},$$

由 $\displaystyle\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛及 Weierstrass 判别法知, $\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛, 从而

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{\alpha}^{\beta}x\mathrm{e}^{-x^2u}\,\mathrm{d}u&=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}u\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2u}\,\mathrm{d}x=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}u\left(-\frac{1}{2u}\mathrm{e}^{-x^2u}\Big|_0^{+\infty}\right)\\&=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}.\end{aligned}$$

(5) 注意到,

$$\frac{\arctan ax}{x(1+x^2)}=\frac{1}{x(1+x^2)}\arctan xu\Big|_{u=0}^{a}=\int_0^a\frac{1}{(1+u^2x^2)(1+x^2)}\,\mathrm{d}u,$$

考虑 $\varphi(u)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+u^2x^2)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$.

$$\frac{1}{(1+u^2x^2)(1+x^2)}\leqslant\frac{1}{1+x^2},$$

由 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛及 Weierstrass 判别法知, $\varphi(u)$ 在 $[0,a]$ 上一致收敛, 从而

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^a\frac{1}{(1+u^2x^2)(1+x^2)}\,\mathrm{d}u=\int_0^a\mathrm{d}u\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+u^2x^2)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x,$$

而

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+u^2x^2)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x&=-\frac{u^2}{1-u^2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^2x^2}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{1-u^2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{u}{1-u^2}\arctan ux\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{1-u^2}\arctan x\Big|_0^{+\infty}\\&=\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{u}{1-u^2}+\frac{1}{1-u^2}\right)\\&=\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+u},\end{aligned}$$

因此原积分

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^a\frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}\ln(a+1).$$

(6)

□

13.4.8 利用 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 及 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ 计算:

(1)

(2)

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,\mathrm{d}x\ (a > 0, b > 0)$;

(4)

(5) $\int_0^{+\infty} x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\ (n \in \mathbb{N}^*)$;

(6) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 (1)

(2)

(3)

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(a+b)x + \sin(a-b)x}{2x}\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\dagger}{=} \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, & a \neq b, \\ \frac{\pi}{4}, & a = b. \end{cases}\end{aligned}$$

其中 † 处已用到 Dirichlet 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin Ax}{x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \frac{\sin Ax}{Ax}\,\mathrm{d}(Ax) = \frac{\pi}{2}, & A \neq 0, \\ 0, & A = 0. \end{cases}$$

(4)

(5) 记 $I_n = \int_0^{+\infty} x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\ (n \in \mathbb{N})$, 则有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{2n-1}\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x^2}) \\ &= -\frac{1}{2}\left[x^{2n-1}\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (2n-1)x^{2n-2}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{2n-1}{2} I_{n-1}, n \in \mathbb{N}^*,\end{aligned}$$

因此

$$I_n = \frac{(2n-1)!!}{2^n} I_0 = \frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

(6)

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\left(\sin^2 x-\frac{1}{4}\sin^2 2x\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}-\frac{\sin^2 2x}{(2x)^2}\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 2x}{(2x)^2}\,\mathrm{d}(2x)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sin^2 x\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{\sin^2 x}{x}\bigg|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\cdot 2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x\right]\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}\,\mathrm{d}(2x)=\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

□

13.5 Euler 积分

13.5.1

(1)

(2)

(1)

(2)

13.5.2

13.5.3 利用 Euler 积分计算:

(1)

(2) $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$;

(3)

(4) $\displaystyle\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{q-1}\,\mathrm{d}x\ (n,m,q>0)$;

(5)

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^\alpha x\,\mathrm{d}x\ (|\alpha|<1)$;

(7)

(8) $\displaystyle\int_a^b\left(\frac{b-x}{x-a}\right)^p\mathrm{d}x\ (0<p<1)$;

(9)

(10) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

解 (1)

(2) 记 $x=a\sin\theta$, 从而

$$\begin{aligned}\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\sin^2\theta\cdot a\cos\theta\cdot a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2}a^4\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}a^4\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)}\\&=\frac{1}{2}a^4\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{2\Gamma(1)}=\frac{a^4\pi}{16}.\end{aligned}$$

(3)

(4)

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{q-1}\,\mathrm{d}x&\xlongequal{x^m=t}\int_0^1 t^{\frac{n-1}{m}}(1-t)^{q-1}\cdot\frac{1}{m}t^{\frac{1-m}{m}}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{m}\int_0^1 t^{\frac{n}{m}-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{m}\mathrm{B}\left(\frac{n}{m},q\right).\end{aligned}$$

(5)

(6)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^\alpha x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha\cos^{-\alpha}x\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1+\alpha}{2},\frac{1-\alpha}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{\pi}{2\sin\frac{1+\alpha}{2}\pi}=\frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha}{2}\pi},\end{aligned}$$

其中已用到余元公式

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin s\pi},\quad 0<s<1.$$

(7)

(8) 当 $a=b$ 时,

$$\int_a^b\left(\frac{b-x}{x-a}\right)^p\mathrm{d}x=0,$$

当 $a\neq b$ 时,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b\left(\frac{b-x}{x-a}\right)^p\mathrm{d}x &\xlongequal{x-a=t}\int_0^{b-a}(b-a-t)^pt^{-p}\,\mathrm{d}t\\
&\xlongequal{\frac{1}{b-a}t=u}\int_0^1(b-a)^p(1-u)^p(b-a)^{-p}u^{-p}(b-a)\,\mathrm{d}u\\
&=(b-a)\int_0^1u^{-p}(1-u)^p\,\mathrm{d}u=(b-a)\mathrm{B}(1-p,1+p)\\
&=(b-a)\frac{\Gamma(1-p)\Gamma(1+p)}{\Gamma(2)}\\
&=\frac{p(b-a)}{2}\Gamma(1-p)\Gamma(p)\\
&=\frac{p(b-a)\pi}{2\sin p\pi},\quad a\neq b.
\end{aligned}
$$

(9)

(10) 记 $\dfrac{1}{1+x^n}=t$, 则有

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x&=\int_1^0t\cdot\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\left(\frac{1}{t}(1-t)\right)^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{n}\int_0^1t^{-\frac{1}{n}}(1-t)^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{n}\mathrm{B}\left(1-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)}\\
&=\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)}\to\Gamma(1)=1,\quad n\to\infty,
\end{aligned}
$$

其中已用到 Γ 函数的连续性. □

13.5.4 计算极限

$$
\lim_{\alpha\to+\infty}\sqrt{\alpha}\int_0^1x^{\frac{3}{2}}(1-x^5)^\alpha\,\mathrm{d}x.
$$

解

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\alpha}\int_0^1x^{\frac{3}{2}}(1-x^5)^\alpha\,\mathrm{d}x\xlongequal{x^5=t}\sqrt{\alpha}\int_0^1t^{\frac{3}{10}}(1-t)^\alpha\cdot\frac{1}{5}t^{-\frac{4}{5}}\,\mathrm{d}t\\
=&\frac{1}{5}\sqrt{\alpha}\int_0^1t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^\alpha\,\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\sqrt{\alpha}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},1+\alpha\right)=\frac{1}{5}\sqrt{\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\alpha\right)}\\
=&\frac{\sqrt{\pi}}{5}\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\alpha\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{5}\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{(1+\alpha)^{\frac{1}{2}}}\frac{(1+\alpha)^{\frac{1}{2}}\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\alpha\right)}\to\frac{\sqrt{\pi}}{5},\quad\alpha\to+\infty,
\end{aligned}
$$

其中已用到

$$
\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)}=1,\quad\forall a\in\mathbb{R}.
$$

□

13.5.5

13.5.6

(1)

(2)

(3)

(4)

(1)

(2)

(3)

(4)

13.6 第 13 章综合习题

13.6.1 设函数 $f(x) \geqslant 0$ 并在 $[a, +\infty)$ 的任何有限区间上可积, 数列 $\{a_n\}$ 单调递增并且 $a_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$. 证明: 积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛于 l 当且仅当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛于 l.

证明 充分性.

对 $\forall A > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$, 使得 $a_n \leqslant A < a_{n+1}$, 又 $f(x) \geqslant 0$, 因此

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

上式令 $A \to +\infty$, 从而 $a_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$, 由两边夹法则知,

$$\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x \to l, \quad A \to +\infty.$$

必要性.

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a_0}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x \to l, \quad a_n \to +\infty\ (n \to \infty).$$

□

13.6.2

13.6.3 设 φ 有二阶导数, ψ 由一阶导数. 证明:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\,\mathrm{d}s$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

证明

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2}[\varphi'(x-at)\cdot(-a)+\varphi'(x+at)\cdot a]+\frac{1}{2a}[\psi(x+at)\cdot a-\psi(x-at)\cdot(-a)],\\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{1}{2}a^2[\varphi''(x-at)+\varphi''(x+at)]+\frac{1}{2a}a^2[\psi'(x+at)-\psi'(x-at)],\\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2}[\varphi'(x-at)+\varphi'(x+at)]+\frac{1}{2a}[\psi(x+at)-\psi(x-at)],\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{2}[\varphi''(x-at)+\varphi''(x+at)]+\frac{1}{2a}[\psi'(x+at)-\psi'(x-at)],
\end{aligned}$$

因此

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

□

13.6.4

13.6.5 证明: 对任意实数 u, 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x)\,\mathrm{d}x=1.$$

证明 (1) 记 $\varphi(u)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x)\,\mathrm{d}x$, 往证 $\varphi'(u)=0$.

$$\begin{aligned}
\varphi'(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}(\cos x\cos(u\sin x)-\sin(u\sin x)\sin x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{u}\sin(u\sin x)\right)-\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}\sin(u\sin x)\sin x\,\mathrm{d}x\right]\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{u}\sin(u\sin x)\mathrm{e}^{u\cos x}\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\sin(u\sin x)\sin x\cdot\mathrm{e}^{u\cos x}\,\mathrm{d}x\right.\\
&\qquad\left.-\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}\sin(u\sin x)\sin x\,\mathrm{d}x\right]\\
&= 0,
\end{aligned}$$

因此

$$\varphi(u)\equiv\varphi(0)=1,\quad u\in\mathbb{R}.$$

□

提示 (2) 考虑 $\varphi(u)$ 在 $u=0$ 处的 Taylor 展开.

证明 (2) 仿照上述证明, 易得:

$$\varphi^{(n)}(u)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x+nx)\,\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N}^*,$$

则对 $\forall u$, $\exists M>0$, 使得 $|u|\leqslant M$, 从而

$$\varphi^{(n)}(u)\leqslant\mathrm{e}^M,$$

有界, 因此在 $(-M,M)$ 上, 有

$$\varphi(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}u^n=1,\quad u\in(-M,M),$$

由 M 的任意性知, 上式在 $\mathbb{R}$ 上成立. □

13.6.6 证明: 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x+u}\mathrm{e}^{-ux}\,\mathrm{d}x$ 关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

证明 注意到,

$$\frac{1}{x+u}\leqslant\frac{1}{x}\to 0,\quad x\to+\infty,$$

因此 $\dfrac{1}{x+u}$ 单调递减且一致趋于 0, 又

$$\int_0^A \sin 3x\mathrm{e}^{-ux}\,\mathrm{d}x=\frac{-u\mathrm{e}^{-ux}\sin 3x-3\mathrm{e}^{-ux}\cos 3x}{u^2+9}\Bigg|_0^A\leqslant\frac{u+3}{u^2+6+3}\leqslant\frac{u+3}{2\sqrt{6}u+3}\leqslant 1,$$

一致有界, 由 Dirichlet 一致收敛判别法知, 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x+u}\mathrm{e}^{-ux}\,\mathrm{d}x$ 关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. □

13.6.7

13.6.8

13.6.9

13.6.10

13.6.11 证明: $\displaystyle\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x=\ln\sqrt{2\pi}.$

提示 考虑余元公式.

证明

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x &= \left(\int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1\right)\ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} \ln\Gamma(1-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \ln\frac{\pi}{\sin x\pi}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln\pi - \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(\sin\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin u\,\mathrm{d}u \\ &\overset{\dagger}{=} \frac{1}{2}(\ln\pi + \ln 2) = \ln\sqrt{2\pi},\end{aligned}$$

其中 † 处已用到**引理 12.1**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

□

13.6.12

13.6.13

13.6.14

13.6.15

13.6.16

13.7　第 13 章补充习题

13.7.1　设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty]$ 上连续可导, 且 $f(0)>0$, $f'(x)\geqslant 0$ $(x>0)$. 若无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)+f'(x)}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ 也收敛.

出处　第四届大学生数学竞赛预赛数学类.

13.7.2　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 讨论

$$F(t)=\int_0^1 \frac{tf(x)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$$

的连续性.

13.7.3 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递减趋于 0, 且 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

分析 即, 对 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists A > a$, 使得当 $x > A$ 时, 有

$$f(x) < \varepsilon g(x).$$

引理 设 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递减趋于 0, 且 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散. 求证: 对于任意单调递增且趋于 $+\infty$ 的数列 $\{x_n\}$, 有

$$\sum_{k=1}^{+\infty} g(x_{k+1})(x_{k+1} - x_k)$$

发散.

13.7.4 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递减趋于 0, 且 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散. 证明或证伪: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. 若为伪命题, 请对连续函数 $f(x), g(x)$ 再次讨论.

13.7.5 设 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递减趋于 0, 且 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散. 证明或证伪: 对于任意单调递增且趋于 $+\infty$ 的数列 $\{x_n\}$, 有

$$\sum_{k=1}^{+\infty} g(x_{k+1})(x_{k+1} - x_k)$$

发散. 若为伪命题, 请对连续函数 $g(x)$ 再次讨论.

证明 上述命题为伪命题, 对连续函数存在反例.

取 $g(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ $(x > 1)$, $x_k = \mathrm{e}^{k^2}$, 则 $\int_2^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散, 而

$$\sum_{k=1}^{\infty} g(x_{k+1})(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{(k+1)^2} - \mathrm{e}^{k^2}}{\mathrm{e}^{(k+1)^2}\cdot(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2k+1} - 1}{\mathrm{e}^{2k+1}(k+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2},$$

因此上式收敛. □

13.7.6

13.7.7

13.7.8

13.7.9

13.7.10

13.7.11

13.7.12

13.7.13