第六周作业答案

罗曾宇

题目 1. 试用 $\boldsymbol{A}$ 表示一个沿 z 方向的均匀恒定磁场 B_0，写出 A 的两种不同表示式，证明两者之差为无旋场.

解答. 由于 $\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=B_0\boldsymbol{e_z}$，不妨设 $\boldsymbol{A_1}=B_0x\boldsymbol{e_y}$，$\boldsymbol{A_2}=-B_0y\boldsymbol{e_x}$，则

$$\nabla\times(\boldsymbol{A_1}-\boldsymbol{A_2})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e_x} & \boldsymbol{e_y} & \boldsymbol{e_z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ B_0y & B_0x & 0\end{vmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

两者之差为无旋场.

题目 2. 设 $x<0$ 半空间充满磁导率为 μ 的均匀介质，$x>0$ 空间为真空，今有线电流 I 沿 z 轴流动，求磁感应强度和磁化电流分布.

解答. 电流的磁场使介质磁化，记 $x<0$ 区域磁场为 $\boldsymbol{B_1}$，$x<0$ 区域磁场为 $\boldsymbol{B_2}$，在柱坐标系中，全部定解条件为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\nabla\times\boldsymbol{H}=0,(x<0,x>0,r\neq 0)$$

$$r=0,\boldsymbol{H_1},\boldsymbol{H_2}\to\infty,$$

$$r\to\infty,\boldsymbol{H_1},\boldsymbol{H_2}\to 0,$$

$$x=0\text{处}, B_{2x}=B_{1x}, \boldsymbol{e_x}\times(\boldsymbol{H_2}-\boldsymbol{H_1})=\boldsymbol{0},$$

因为电流线无穷长，而介质是均匀的，假设两区域的 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是离开线电流的距离 r 的函数，而且只有 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 分量.

由安培环路定理，对围绕着电流线，任意半径 r 的圆，有

$$\int_{L_1}\boldsymbol{H_1}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{L_2}\boldsymbol{H_2}\cdot d\boldsymbol{l}=I,$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 的 x 分量在边界处连续，有 $\boldsymbol{B_1}=\boldsymbol{B_2}$，而且 $\boldsymbol{B_1}=\mu\boldsymbol{H_1}, \boldsymbol{B_2}=\mu_0\boldsymbol{H_2}$，可得到尝试解

$$\boldsymbol{B_1}=\boldsymbol{B_2}=\frac{\mu\mu_0}{\mu+\mu_0}\frac{I}{\pi r}\boldsymbol{e}_\varphi,$$

$$\boldsymbol{H_1}=\frac{\mu_0}{\mu+\mu_0}\frac{I}{\pi r}\boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{H_2}=\frac{\mu}{\mu+\mu_0}\frac{I}{\pi r}\boldsymbol{e}_\varphi,$$

此解显然满足所有定解条件，说明此前的假设是合理的.

由 $\boldsymbol{M_2}=0, \boldsymbol{M_1}=(\dfrac{\mu}{\mu_0}-1)\boldsymbol{H_1}$，在电流线周围作 $r\to 0$ 的无限小圆圈 L，得电流线与介质分界面出现的“线磁化电流”

$$I_M=\int_L\boldsymbol{M}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{L_1}\boldsymbol{M_1}\cdot d\boldsymbol{l}=\frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}I.$$

题目 3. 某空间区域内有轴对称磁场，在柱坐标原点附近已知 $B_z\approx B_0-C(z^2-\dfrac{1}{2}\rho^2)$，其中 B_0 为常量，试求该处的 B_ρ.

解答. 空间磁场有轴对称性，意味着其分量 $B_\theta=0$，于是在柱坐标系中，由

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\rho)+\frac{\partial B_z}{\partial z}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\rho)-2Cz=0,$$

得 $B_\rho=Cz\rho+\dfrac{f(\theta,z)}{\rho}$，因为磁场轴对称，也就是说 $\boldsymbol{B}(\theta)=\boldsymbol{B}(\theta+\alpha)$，$\alpha$ 为任意角度，所以 $\boldsymbol{B}$ 不显含 θ，$f(\theta,z)=f(z)$，作一半径为 a，高为 $2h$ 的圆柱形高斯面，由

$$\int_S\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0,$$

有 $\int_{-h}^{h} f(z)dz = f(\xi)2h = 0, \xi \in (-h, h)$，因为在原点附近，$h \to 0$，$f(z) = f(\xi) = 0$，综上所述，

$$B_\rho = Cz\rho.$$

题目 4. 假设存在磁单极子，其磁荷为 Q_m，它的磁场强度为

$$\boldsymbol{H} = \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3},$$

给出它的矢势的一个可能的表达式，并讨论它的奇异性.

解答. 以磁荷所在点为坐标原点，由 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$，通过任一半径 r 的球冠的磁通量为

$$\phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_L \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l},$$

其中球面元矢量 $d\boldsymbol{S} = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \boldsymbol{e_r}$，球冠底面边界 L 的线元矢量 $d\boldsymbol{l} = r\sin\theta d\varphi \boldsymbol{e_\varphi}$. 矢势 $\boldsymbol{A} = A_r\boldsymbol{e_r} + A_\theta\boldsymbol{e_\theta} + A_\varphi\boldsymbol{e_\varphi}$ 的三个分量中，只有 A_φ 对磁通量有贡献，故可令 $A_r = A_\theta = 0$，且 A_φ 与坐标 φ 无关，

$$\int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{q_m}{4\pi}\int_0^\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{q_m}{4\pi}(1-\cos\theta)2\pi,$$

$$\oint_L \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} = A_\varphi r\sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi A_\varphi r\sin\theta,$$

由此得矢势的一个可能的表达式为

$$\boldsymbol{A} = A_\varphi\boldsymbol{e_\varphi} = \frac{q_m}{4\pi r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\boldsymbol{e_\varphi},$$

可以看到，$\boldsymbol{A}$ 有一个奇点 $r = 0$，并且在 $\theta = 0$ 这条弦上是没有定义的，这与磁矢势全空间连续矛盾.

题目 5. 将一磁导率为 μ，半径为 R_0 的球体，放入均匀磁场 $\boldsymbol{H_0}$ 内，求总磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 和诱导磁矩 $\boldsymbol{m}$。

解答. 球内球外两区域的定解条件为

$$\nabla^2\varphi_1 = 0, (r < R_0)$$

$$\nabla^2\varphi_2 = 0, (r > R_0)$$

$$r = 0, \varphi_1\text{有限},$$

$$r \to \infty, \varphi_2 \to -H_0 r\cos\theta,$$

$$r = R_0, \varphi_1 = \varphi_2, \mu\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \mu_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial r},$$

设 $\varphi_1 = A_0 + A_1 r\cos\theta, \varphi_2 = -H_0 r\cos\theta + \dfrac{B_0}{r} + \dfrac{B_1}{r^2}\cos\theta$, 由边界条件可知，

$$\begin{cases} A_0 = \dfrac{B_0}{R_0}, \\ A_1 R_0 = -H_0 R_0 + \dfrac{B_1}{R_0^2}, \\ B_0 = 0, \\ \mu A_1 = -\mu_0 H_0 - \dfrac{2\mu_0 B_1}{R_0^3}, \end{cases}$$

解得

$$A_0 = B_0 = 0, A_1 = -\frac{3\mu_0}{\mu + 2\mu_0}H_0, B_1 = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0}H_0 R_0^3,$$

综上所述，

$$\varphi_1 = -\frac{3\mu_0}{\mu + 2\mu_0}H_0 r\cos\theta, (r < R_0)$$

$$\varphi_2 = -H_0 r\cos\theta + \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0}\frac{H_0 R_0^3}{r^2}\cos\theta, (r > R_0),$$

所以，球内外磁场为

$$\boldsymbol{B_1} = -\mu\nabla\varphi_1 = \frac{3\mu\mu_0}{\mu + 2\mu_0}\boldsymbol{H_0},$$

$$\boldsymbol{B_2} = -\mu_0 \nabla \varphi_2 = \mu_0 \boldsymbol{H_0} + \frac{(\mu-\mu_0)\mu_0 R_0^3}{\mu+2\mu_0}[\frac{3(\boldsymbol{H_0}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{H_0}}{r^3}],$$

介质球的磁化强度

$$\boldsymbol{M_1} = \frac{\boldsymbol{B_1}}{\mu_0} - \boldsymbol{H_1} = \frac{3(\mu-\mu_0)}{\mu+2\mu_0}\boldsymbol{H_0},$$

它的磁矩为

$$\boldsymbol{m} = \frac{4\pi R_0^3}{3}\boldsymbol{M_1} = \frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}4\pi R_0^3 \boldsymbol{H_0}.$$

题目 6. 有一个内外半径为 R_1 和 R_2 的空心球，位于均匀外磁场 $\boldsymbol{H_0}$ 内，球的磁导率为 μ，求空腔内的场 $\boldsymbol{B}$，讨论 $\mu \geq \mu_0$ 时的磁屏蔽作用.

解答. 球内，球内部及其球外三区域的定解条件为

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0, (r < R_1)$$

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0, (R_1 < r < R_2)$$

$$\nabla^2 \varphi_3 = 0, (r > R_2)$$

$$r = 0, \varphi_1 \text{有限},$$

$$r \to \infty, \varphi_3 \to -H_0 r\cos\theta,$$

$$r = R_1, \varphi_1 = \varphi_2, \mu_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \mu \frac{\partial \varphi_2}{\partial r},$$

$$r = R_2, \varphi_2 = \varphi_3, \mu \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \mu_0 \frac{\partial \varphi_3}{\partial r},$$

由之前的经验，不妨设 $\varphi_1 = A_1 r\cos\theta, \varphi_2 = B_1 r\cos\theta + \frac{C_1}{r^2}\cos\theta, \varphi_3 = -H_0 r\cos\theta + \frac{D_1}{r^2}\cos\theta$, 由边界条件可知，

$$\begin{cases} A_1 R_1 = B_1 R_1 + \dfrac{C_1}{R_1^2}, \\ \mu_0 A_1 = \mu B_1 - \dfrac{2\mu C_1}{R_1^2}, \\ B_1 R_2 + \dfrac{C_1}{R_2^2} = -H_0 R_2 + \dfrac{D_1}{R_2^2}, \\ \mu B_1 - \dfrac{2\mu C_1}{R_2^2} = -\mu_0 H_0 - \mu_0 \dfrac{2D_1}{R_2^2}, \end{cases}$$

解得

$$\boldsymbol{B_1}=-\mu_0\nabla\varphi_1=-\mu_0A_1\boldsymbol{e_z}=[1-\frac{1-(\dfrac{R_1}{R_2})^3}{\dfrac{(\mu+2\mu_0)(2\mu+\mu_0)}{2(\mu-\mu_0)^2}-(\dfrac{R_1}{R_2})^3}]\mu_0\boldsymbol{H_0},$$

可以看出，μ 越大，$\boldsymbol{B_1}$ 越弱，球壳对外部磁场的屏蔽作用越显著，当 $\mu\geq\mu_0$ 时，$\boldsymbol{B_1}\to\boldsymbol{0}$.