Functional Analysis

Yibooo

2025 年 1 月 15 日

前言

距 2024FA 泛函分析期中考试还有 16 天, 为了巩固已学知识、督促自己学习, 也为了方便日后的检索需求, 遂将课堂笔记进行整理.

笔记来源于我的课堂记录, 课程为中国科学技术大学本科生课程“泛函分析”, 使用教材为张恭庆《泛函分析讲义》(第二版), 授课老师为刘聪文教授, 课程编号为 MATH3004.01.

2024 年 10 月 18 日

目录

第一章 度量空间 **1**

1.1 压缩映射原理 1

1.2 完备化 8

1.3 列紧集 10

1.4 赋范线性空间 15

1.5 内积空间 22

第二章 线性算子与线性泛函 **33**

2.1 线性算子的概念 33

2.2 Riesz 表示定理及其应用 35

2.3 纲与开映射定理 36

2.4 Hahn-Banach 定理 46

2.5 共轭空间、弱收敛、自反空间 56

2.6 线性算子的谱 68

第三章 紧算子与 Fredholm 算子 **75**

3.1 紧算子的定义和基本性质 75

3.2 Riesz-Fredholm 理论 77

3.3 紧算子的谱理论 80

第一章　度量空间

1.1　压缩映射原理

定义 1.1.1. $\mathcal{X} \neq \phi$, 如果 $\mathcal{X}$ 上函数 $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, 满足:

- (非负性) $d(x, y) \geqslant 0,\ \forall x, y \in \mathcal{X}, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- (对称性) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (三角不等式) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y),\ \forall x, y \in \mathcal{X}$.

则称 d 是 $\mathcal{X}$ 上一个度量 (metric) 或距离 (distance), $(\mathcal{X}, d)$ 称为一个度量空间或距离空间.

注. 非负性可由后两条推出: $2d(x, y) = d(x, y) + d(y, x) \geqslant d(x, x) = 0$.

定义 1.1.2. 度量子空间: $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$, $(\mathcal{Y}, d|_{\mathcal{Y}})$ 是 $(\mathcal{X}, d)$ 的子空间.

例 1.1.1. $\mathbb{R}^n$:

- $d_2(x, y) \triangleq (\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2)^{\frac{1}{2}}$ (欧氏度量);
- $d_p(x, y) \triangleq (\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p)^{\frac{1}{p}}$;
- $d_1(x, y) \triangleq |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$;
- $d_\infty(x, y) \triangleq \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k - y_k|$.

例 1.1.2. $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$:

- $l^p(\mathbb{F}) \triangleq \{\{x_k\}_{k=1}^\infty \mid x_k \in \mathbb{F}, \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\}$ p 次可和的数列, $d_p(x,y) \triangleq (\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p)^{\frac{1}{p}}$, $d_p(x,y) \leqslant d_p(x,z) + d_p(z,y)$ (Minkowski 不等式);
- $l^\infty(\mathbb{F}) \triangleq \{\{x_k\}_{k=1}^\infty \mid \sup\limits_k |x_k| < \infty\}$ 有界数列, $d_\infty(x,y) \triangleq \sup\limits_k |x_k - y_k|$.

例 1.1.3. 离散度量: $d(x,y) \triangleq \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}.$

例 1.1.4. $C[0,1]$, $d(f,g) \triangleq \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - g(x)|$.

定义 1.1.3. $A \subset \mathscr{X}$, $\mathrm{diam}(A) \triangleq \sup\limits_{x,y \in A} d(x,y)$ 称为 A 的直径. 如果 $\mathrm{diam(A)} < \infty$, 则称 A 有界.

定义 1.1.4. $(\mathscr{X}, d)$, 称序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{X}$ 收敛, 是指

$$\exists x_0 \in \mathscr{X},\ s.t.\ d(x_n, x_0) \to 0\ as\ n \to \infty,$$

记为 $x_n \to x_0\ as\ n \to \infty$.

作业. 1° 收敛极限唯一; 2° 收敛列有界.

证明. 假设 $\exists \tilde{x}_0 \in \mathscr{X}$, $\tilde{x}_0 \neq x_0$, $s.t.\ x_n \to \tilde{x}_0\ as\ n \to \infty$, 记 $d \triangleq \frac{1}{2} d(x_0, \tilde{x}_0) > 0$.

$$d(x_0, \tilde{x}_0) \leqslant d(x_0, x_n) + d(x_n, \tilde{x}_0) \Rightarrow d(x_0, x_n) \geqslant d(x_0, \tilde{x}_0) - d(x_n, \tilde{x}_0).$$

对上述 d, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geqslant N$, $d(x_n, \tilde{x}_0) < d$

$$\Rightarrow d(x_0, x_n) > d(x_0, \tilde{x}_0) - d = d > 0,$$

与 $x_n \to x_0\ as\ n \to \infty$ 矛盾, 这证明了 1°.

固定 $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geqslant N$, $d(x_n, x_0) < \varepsilon$

$$\Rightarrow d(x_n, x_0) \leqslant \max\{d(x_1, x_0), \ldots, d(x_N, x_0), \varepsilon\} = M$$

$$\Rightarrow \sup_{n,m \in \mathbb{N}^*} d(x_n, x_m) \leqslant \sup_{n,m \in \mathbb{N}^*} [d(x_n, x_0) + d(x_m + x_0)] \leqslant 2M,$$

这证明了 2°. □

例 1.1.5. $C[0,1] \triangleq \{[0,1]\text{上连续函数}\}$, $d(f,g) \triangleq \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)-g(x)|$,
$d(f_n,f) \to 0 \Leftrightarrow f_n \rightrightarrows f$ (一致收敛), $\rho_1(f,g) \triangleq \int_0^1 |f(t)-g(t)|\, dt$ (L^1 度量).

$$f_n \triangleq \begin{cases} -n^3(t-\frac{1}{n^2}), & t\in[0,\frac{1}{n^2}] \\ 0, & t\in[\frac{1}{n^2},1] \end{cases},$$

则 $\rho_1(f_n,0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot n \to 0\ as\ n\to\infty$, 但 $d(f_n,0)=n$.

定义 1.1.5. $(\mathcal{X},d)$, $x_0\in\mathcal{X}$, $r>0$, 开球 $B(x_0,r) \triangleq \{x\in\mathcal{X} \mid d(x,x_0)<r\}$, 闭球 $\bar{B}(x_0,r) \triangleq \{x\in\mathcal{X} \mid d(x,x_0)\leqslant r\}$, 球面 $S(x_0,r) \triangleq \{x\in\mathcal{X} \mid d(x,x_0)=r\}$.

$A\subset\mathcal{X}$, $x_0\in A$, 如果 $\exists r>0$, $s.t.\ B(x_0,r)\subset A$, 则称 x_0 为 A 的内点, 如果 A 中每个点都是内点, 则称 A 为开集, 闭集 $\triangleq$ 开集的余集.

命题 1.1.1. 设 $\tau \triangleq \{(\mathcal{X},d)\text{中开集}\}$: (1) $\mathcal{X}$, $\phi\in\tau$; (2) τ 对任意并封闭; (3) τ 对有限交封闭.

定义 1.1.6. $(\mathcal{X},d)$, $A\subset\mathcal{X}$, $x_0\in\mathcal{X}$:

- 如果 $\forall\varepsilon>0$, $B(x_0,\varepsilon)\cap A\neq\phi$, 则称 x_0 为 A 的接触点, $\bar{A}\triangleq\{A\text{的接触点}\}$ 称为 A 的闭包;
- 如果 $\forall\varepsilon>0$, $B(x_0,\varepsilon)\cap A\backslash\{x_0\}\neq\phi$, 则称 x_0 为 A 的聚点或极限点 $\Leftrightarrow \exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A\backslash\{x_0\}$, $s.t.\ x_n\to x_0\ as\ n\to\infty$.

注. $\forall x\in\bar{A}$, $\exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A$, $s.t.\ x_n\to x\ as\ n\to\infty$.

作业. A 是闭集 $\Leftrightarrow \bar{A}=A \Leftrightarrow \forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A$, $x_n\to x_0\ implies\ x_0\in A$.

证明. □

定义 1.1.7. 如果 $\bar{A}=\mathcal{X}$, 称 A 在 $\mathcal{X}$ 中稠密, 记 $A\overset{dense}{\subset}\mathcal{X}$.

注. $A\overset{dense}{\subset}\mathcal{X}\Leftrightarrow\forall x\in\mathcal{X},\ \exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A,\ s.t.\ x_n\to x\ as\ n\to\infty.$

定义 1.1.8. 如果 $\mathcal{X}$ 有可数的稠密子集, 则称 $\mathcal{X}$ 可分.

例 1.1.6. (Weierstrass 一致逼近定理) $P[0,1]$ ($[0,1]$ 上多项式全体)$\overset{dense}{\subset} C[0,1]$.

作业. $C[0,1]$ 可分.

证明. 由 Weierstrass 一致逼近定理, $P[0,1]\overset{dense}{\subset}C[0,1]$,
令 $[0,1]$ 上有理系数多项式全体为 $Q[0,1]$, 下证 $Q[0,1]\overset{dense}{\subset}P[0,1]\overset{dense}{\subset}C[0,1]$.
$\forall f_1(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in P[0,1]$, $\forall\varepsilon>0$, 由有理数稠密性,
$\exists b_0,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{Q},\ f_2(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n,\ s.t.$

$$d(f_1,f_2)=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|f_1(t)-f_2(t)|\leqslant\sum_{i=0}^{n}|a_i-b_i|<\varepsilon.$$

$\Rightarrow Q[0,1]\overset{dense}{\subset}P[0,1]\overset{dense}{\subset}C[0,1]$.
因为可数集的有限次直积与可数并可数, 故 $Q[0,1]$ 可数. □

定义 1.1.9. $(\mathcal{X},d)$, $(\mathcal{Y},\rho)$, 称映射 $T:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 在 $x_0\in\mathcal{X}$ 连续是指

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ s.t.\ d(x,x_0)<\delta\Rightarrow\rho(T(x),T(x_0))<\varepsilon.$$

如果 T 在 $\mathcal{X}$ 中每一点都连续, 则称 $T:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 连续.

注. 上式等价于 $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in B_{\mathcal{X}}(x_0,\delta),\ T(x)\in B_{\mathcal{Y}}(T(x_0),\varepsilon)$.

定理 1.1.1. $T:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 连续 $\Leftrightarrow \forall U \overset{open}{\subset} \mathcal{Y},\ T^{-1}(U)\triangleq\{x\in\mathcal{X}\mid Tx\in U\}\overset{open}{\subset}\mathcal{X}$.

证明. "$\Rightarrow$" $\forall U \overset{open}{\subset} \mathcal{Y}$, 若 $T^{-1}(U)=\phi$, 显然.

若 $T^{-1}(U)\neq\phi,\ \forall x_0\in T^{-1}(U),\ Tx_0\in U$.

由 U 开, $\exists\varepsilon>0,\ s.t.\ B(Tx_0,\varepsilon)\subset U$,

由 T 连续, $\exists\delta>0,\ \forall x\in B(x_0,\delta),\ Tx\in B(Tx_0,\varepsilon)\subset U$,

$\Rightarrow B(x_0,\delta)\subset T^{-1}(U)\Rightarrow T^{-1}(U)\overset{open}{\subset}\mathcal{X}$.

"$\Leftarrow$" $\forall x_0\in\mathcal{X},\ \forall\varepsilon>0,\ B(Tx_0,\varepsilon)\overset{open}{\subset}\mathcal{Y}\Rightarrow T^{-1}(B(Tx_0,\varepsilon))\overset{open}{\subset}\mathcal{X}$.

由 $x_0\in T^{-1}(B(Tx_0,\varepsilon)),\ \exists\delta>0,\ s.t.\ B(x_0,\delta)\subset T^{-1}(B(Tx_0,\varepsilon))$,

$\Rightarrow\forall x\in B(x_0,\delta),\ Tx\in B(Tx_0,\varepsilon)\Leftrightarrow T$ 连续. □

定理 1.1.2. (Heine) T 在 x_0 连续 $\Leftrightarrow\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ x_n\to x_0\ implies\ Tx_n\to Tx_0$.

证明. "$\Rightarrow$" $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in\mathcal{X},\ d(x,x_0)<\delta$, 有 $\rho(T(x),T(x_0))<\varepsilon$.

对上述 δ, $\exists N\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\geqslant N$, 有 $d(x_n,x_0)<\delta\Rightarrow\rho(T(x_n),T(x_0))<\varepsilon,\ \forall n\geqslant N$.

"$\Leftarrow$" 假设 T 在 x_0 不连续,

则 $\exists\varepsilon_0>0,\ \forall n>0,\ \exists x_n,\ d(x_n,x_0)<\frac{1}{n},\ s.t.\ \rho(T(x_n),T(x_0))\geqslant\varepsilon_0$,

得到 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{X},\ x_n\to x_0\ as\ n\to\infty$, 但 $T(x_n)\nrightarrow T(x_0)$, 矛盾. □

定义 1.1.10. $(\mathcal{X},d)$, 称 $\{x_n\}_{x=1}^{\infty}\subset\mathcal{X}$ 是 Cauchy 列或基本列是指:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}^*,\ s.t.\ d(x_m,x_n)<\varepsilon,\forall m,n\geqslant N\ (\Leftrightarrow\lim_{m,n\to\infty}d(x_m,x_n)=0).$$

如果 $(\mathcal{X},d)$ 中每个 Cauchy 列都收敛, 则称 $(\mathcal{X},d)$ 完备.

例 1.1.7. $(\mathbb{R},d)$ 完备, $(\mathbb{Q},d)$ 不完备, d 是欧式度量.

$x_n\triangleq\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2},\ |x_m-x_n|=\sum\limits_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k^2}\to 0\ as\ n\to\infty$,

$\Rightarrow\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{Q}$ 中 Cauchy 列, 但 $x_n\to\frac{\pi^2}{6}\notin\mathbb{Q}$.

例 1.1.8. $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 可测集, $L^p(\Omega)\triangleq\{f$可测 $\mid\int_\Omega|f(x)|^p\,dx<\infty\},\ 1\leqslant p<\infty$,

$d(f,g)\triangleq(\int_\Omega|f(x)-g(x)|^p)^{\frac{1}{p}},\ L^p(\Omega)$ 完备 (Riesz-Fischer Thm).

定理 1.1.3. $C([0,1],d)$ 完备.

证明. 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $C[0,1]$ 中任一 Cauchy 列,
$\Rightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}^*,\ s.t.\ \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon,\ \forall m,n\geqslant N\ (*)$,
$\Rightarrow \forall t\in[0,1],\ |f_m(t)-f_n(t)|<\varepsilon,\ \forall m,n\geqslant N$,
$\Rightarrow \{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}$ 中 Cauchy 列, 故收敛, 令 $f(t)\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)$.
在 $(*)$ 中令 $m\to\infty\Rightarrow\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|f(t)-f_n(t)|\leqslant\varepsilon,\ \forall n\geqslant N\Leftrightarrow f_n\rightrightarrows f$,
$\Rightarrow f\in C[0,1]$, 且 $d(f_n,f)\to 0$. □

例 1.1.9. $(C[0,1],\rho_1)$, $\rho_1(f,g)\triangleq\int_0^1|f(t)-g(t)|\,dt$ 不完备.

证明. 令 $f_n(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\\ nt-\frac{n}{2}+1, & \frac{1}{2}-\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ 1, & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$

$$\rho_1(f_m,f_n)=\int_0^1|f_m(t)-f_n(t)|\,dt=\frac{1}{2}|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}|\to 0\ as\ m,n\to\infty,$$

$\Rightarrow\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $(C[0,1],\rho_1)$ 中 Cauchy 列. Claim $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不收敛.
假设 $\exists f\in C[0,1],\ s.t.\ \rho_1(f,f_n)\to 0$,

$$\rho_1(f_n,f)=\int_0^1|f_n(t)-f(t)|\,dt=\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}|f(t)|\,dt+\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}}|f_n(t)-f(t)|\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1|1-f(t)|\,dt.$$

$$\overset{令 n\to\infty}{\Rightarrow}\int_0^{\frac{1}{2}}|f(t)|\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1|1-f(t)|\,dt=0,$$

$\Rightarrow f(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<\frac{1}{2}\\ 1, & \frac{1}{2}<t\leqslant 1\end{cases}$, 这与 f 连续矛盾. □

定义 1.1.11. 对映射 $T:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$, 如果 $\exists x^*\in\mathcal{X},\ s.t.\ Tx^*=x^*$, 称 x^* 是映射 T 的一个不动点.

定义 1.1.12. $(\mathscr{X},d)$, 对映射 $T:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$, 如果存在常数 $\alpha\in(0,1)$, $s.t.\ d(Tx,Ty)\leqslant\alpha d(x,y)$, $\forall x,y\in\mathscr{X}$, 称 T 是一个压缩映射.

定理 1.1.4. (压缩映射原理, Banach 不动点定理) 完备度量空间到自身的压缩映射一定有不动点, 且不动点唯一.

证明. 任取 $x_0\in\mathscr{X}$, 定义迭代序列 $x_{n+1}=Tx_n,\ n=0,1,2,\ldots$

$$d(x_{n+1},x_n)=d(Tx_n,Tx_{n-1})\leqslant\alpha d(x_n,x_{n-1})\leqslant\cdots\leqslant\alpha^n d(x_1,x_0),$$

$$d(x_{n+p},x_n)\leqslant\sum_{k=1}^{p}d(x_{n+k},x_{n+k-1})\leqslant\sum_{k=1}^{p}\alpha^{n+k-1}d(x_1,x_0)\leqslant\frac{\alpha^n}{1-\alpha}d(x_1,x_0).$$

$\Rightarrow\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列 $\overset{\mathscr{X}\text{完备}}{\Rightarrow}$ $\exists x^*\in\mathscr{X},\ s.t.\ d(x_n,x^*)\to0\ as\ n\to\infty$.

$$\begin{aligned}d(Tx^*,x^*)&\leqslant d(Tx^*,Tx_n)+d(Tx_n,x_n)+d(x_n,x^*)\\&\leqslant\alpha d(x^*,x_n)+d(x_{n+1},x_n)+d(x_n,x^*)\to0\ as\ n\to\infty.\end{aligned}$$

$\Rightarrow d(Tx^*,x^*)=0\Rightarrow Tx^*=x^*$.

假设 $y\in\mathscr{X},\ s.t.\ Ty=y$,

$$d(x^*,y)=d(Tx^*,Ty)\leqslant\alpha d(x^*,y).$$

$\Rightarrow d(x^*,y)=0\Rightarrow y=x^*$. □

注. 完备性不可去.

例 1.1.10. $\mathscr{X}=(0,1)$, $Tx=\frac{1}{2}x$, 没有不动点.

作业. (EX1.1.1)(1) 完备空间的闭子空间一定是完备子空间;

(2) 任意度量空间的完备子空间一定是闭的.

证明. $\forall(\mathscr{X}_0,d)\subset\forall(\mathscr{X},d)$, 其中 $(\mathscr{X}_0,d)$ 闭, $(\mathscr{X},d)$ 完备.

$\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $(\mathscr{X}_0,d)$ 中 Cauchy 列, 则 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也是 $(\mathscr{X},d)$ 中 Cauchy 列,

由 $(\mathcal{X},d)$ 完备,$\exists\tilde{x}\in\mathcal{X},\ s.t.\ x_n\to\tilde{x}\ as\ n\to\infty$,

由 $(\mathcal{X}_0,d)$ 闭, 有 $\tilde{x}\in(\mathcal{X}_0,d)$, 故 $(\mathcal{X}_0,d)$ 是完备子空间, 这证明了 (1).

$\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是完备子空间 $(\mathcal{X}_1,d)\subset(\mathcal{X},d)$ 中 Cauchy 列,

由完备性, $\exists\bar{x}\in\mathcal{X}_1,\ s.t.\ x_n\to\bar{x}\ as\ n\to\infty\Rightarrow(\mathcal{X}_1,d)$ 闭, 这证明了 (2). □

1.2 完备化

定义 1.2.1. $(\mathcal{X}_1,d_1)$, $(\mathcal{X}_2,d_2)$:

- 如果映射 $T:\mathcal{X}_1\to\mathcal{X}_2,\ s.t.\ d_2(Tx,Ty)=d_1(x,y),\ \forall x,y\in\mathcal{X}_1$, 则称 T 是 $\mathcal{X}_1$ 到 $\mathcal{X}_2$ 的等距;
- 如果 $\exists T:\mathcal{X}_1\to\mathcal{X}_2$ 等距且双射, 则称 $(\mathcal{X}_1,d_1)$ 与 $(\mathcal{X}_2,d_2)$ 等距同构, T 称为 $\mathcal{X}_1$ 到 $\mathcal{X}_2$ 的等距同构映射;
- 如果 $(\mathcal{X}_1,d_1)$ 与 $(\mathcal{X}_2,d_2)$ 的某子空间 $(\mathcal{X}_0,d_2)$ 等距同构, 则称 $(\mathcal{X}_1,d_1)$ 可等距嵌入 $(\mathcal{X}_2,d_2)$, 记 $(\mathcal{X}_1,d_1)\hookrightarrow(\mathcal{X}_2,d_2)$.

定义 1.2.2. $(\mathcal{X},d)$, 如果 $\exists(\tilde{\mathcal{X}},\tilde{d})$ 完备, $s.t.$ $(\mathcal{X},d)$ 和它的某个稠子空间 $(\mathcal{X}_0,\tilde{d})$ 等距同构, 则称 $(\tilde{\mathcal{X}},\tilde{d})$ 是 $(\mathcal{X},d)$ 的一个完备化.

例 1.2.1. 1. $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的完备化; 2. $C[0,1]$ 是 $P[0,1]$ 的完备化; 3. $L^1[0,1]$ 是 $(C[0,1],\rho_1)$ 的完备化.

定理 1.2.1. 任一度量空间都有完备化, 且完备化在等距同构意义下唯一.

证明. Idea of Pf. (Cantor 实数)

1° 构造 $(\tilde{\mathcal{X}},\tilde{d})$; 2° 构造稠子空间 $(\mathcal{X}_0,\tilde{d})$; 3° 证明 $(\tilde{\mathcal{X}},\tilde{d})$ 完备; 4° 唯一性.

1° 令 $\mathcal{F}\triangleq\{(\mathcal{X},d)$ 中 Cauchy 列全体 $\}$, 引入等价关系

$$\xi=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\sim\{y_n\}_{n=1}^{\infty}=\eta\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=0.$$

令 $\tilde{\mathcal{X}} \triangleq \mathcal{F}/\sim$, 定义度量

$$\tilde{d}([\xi],[\eta]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n),$$

其中 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $[\xi],[\eta]$ 中代表元.

Claim 1. $\tilde{d}$ 是良定的:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ 存在:

$$|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \leqslant d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n) \to 0 \ as \ m, n \to \infty.$$

(2) $\tilde{d}$ 的定义不依赖于 $[\xi],[\eta]$ 中代表元的选取: 平凡.

Claim 2. $\tilde{d}$ 是度量: 平凡.

2° 对 $x \in \mathcal{X}$, 定义 $\xi_x \triangleq \{x, x, \dots\}$ (常驻点列), $\mathcal{X}_0 \triangleq \{[\xi_x] \mid x \in \mathcal{X}\}$.

定义 $T: \mathcal{X} \to \mathcal{X}_0$, $x \mapsto [\xi_x] \Rightarrow T$ 是等距同构.

Claim 3. $\overline{\mathcal{X}_0} = \tilde{\mathcal{X}}$ (稠密): $\forall [\xi] \in \tilde{\mathcal{X}}$, 任取 $[\xi]$ 的一个代表元 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{d}([\xi_{x_n}],[\xi]) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

3° 设 $\{[\xi^{(k)}]\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $(\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{d})$ 中 Cauchy 列

$$\overset{Claim\ 3}{\Rightarrow} \forall k,\ \exists n_k,\ s.t.\ \tilde{d}([\xi^{(k)}],[\xi_{x^{(k)}_{n_k}}]) < \frac{1}{k}.$$

$$\tilde{d}([\xi_{x^{(k)}_{n_k}}],[\xi_{x^{(j)}_{n_j}}]) \leqslant \tilde{d}([\xi_{x^{(k)}_{n_k}}],[\xi^{(k)}]) + \tilde{d}([\xi^{(k)}],[\xi^{(j)}]) + \tilde{d}([\xi^{(j)}],[\xi_{x^{(j)}_{n_j}}]) \to 0 \ as \ k, j \to \infty$$

$\Rightarrow \{[\xi_{x^{(k)}_{n_k}}]\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $(\mathcal{X}_0, \tilde{d})$ 中 Cauchy 列 $\overset{T\text{是等距}}{\Rightarrow} \{x^{(k)}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $(\mathcal{X}, d)$ 中 Cauchy 列
$\Rightarrow \xi' \triangleq \{x^{(k)}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{F} \Rightarrow [\xi'] \in \tilde{\mathcal{X}}$.

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{d}([\xi_{x^{(k)}_{n_k}}],[\xi']) = \lim_{k\to\infty}\lim_{m\to\infty} d(x^{(k)}_{n_k}, x^{(m)}_{n_m}) = 0,$$

$$\tilde{d}([\xi^{(k)}],[\xi']) \leqslant \tilde{d}([\xi^{(k)}],[\xi_{x^{(k)}_{n_k}}]) + \tilde{d}([\xi_{x^{(k)}_{n_k}}],[\xi']) \to 0 \ as \ k \to \infty.$$

4° 假设 $(\mathcal{X}', d')$ 也是 $(\mathcal{X}, d)$ 的完备化,

$$(\mathcal{X}, d) \xrightarrow{T} (\mathcal{X}_0, \tilde{d}) \overset{dense}{\subset} (\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{d}),$$

$$(\mathcal{X}, d) \xrightarrow{T'} (\mathcal{X}'_0, d') \overset{dense}{\subset} (\mathcal{X}', d').$$

令 $\varphi \triangleq T' \circ T^{-1} \Rightarrow \varphi$ 是从 $(\mathcal{X}_0, \tilde{d})$ 到 $(\mathcal{X}'_0, d')$ 的等距同构映射.

延拓 φ 到 $\Phi: (\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{d}) \to (\mathcal{X}', d')$:

$\forall x \triangleq [\xi] \in \tilde{\mathcal{X}},\ \exists\{[\xi^{(k)}]\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}_0,\ s.t.\ \tilde{d}([\xi^{(k)}],[\xi]) \to 0\ as\ k \to \infty$
$\overset{\varphi\text{等距}}{\Rightarrow} \{\varphi([\xi^{(k)}])\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $(\mathcal{X}', d')$ 的 Cauchy 列.

$$y \triangleq \lim_{k\to\infty} \varphi([\xi^{(k)}]),\ \Phi : \tilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}',\ x \mapsto y.$$

□

1.3 列紧集

定义 1.3.1. $(\mathcal{X}, d)$, $A \subset \mathcal{X}$:

- 如果一族开集 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$, $s.t.\ A \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$, 则称之为 A 的一个开覆盖;
- 如果 A 的任一开覆盖 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 都有有限子覆盖, $i.e.\ \exists\alpha_1,\dots,\alpha_N \in I,\ s.t.\ A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} G_{\alpha_k}$, 则称 A 为紧集 (compact);
- 如果 A 中任一点列都有 (在 $\mathcal{X}$ 中) 收敛的子列, 则称 A 列紧 (sequencly compact);
- 如果 A 中任一点列都有在 A 中收敛的子列, 则称 A 自列紧;
- 如果 $\mathcal{X}$ 本身列紧, 则称之为列紧空间.

例 1.3.1. $\mathbb{R}^n$ 中列紧 $\Leftrightarrow$ 有界 (Bolzano-Weierstrass);
$\mathbb{R}^n$ 中自列紧 $\Leftrightarrow$ 有界闭 $\Leftrightarrow$ 紧集.

例 1.3.2. (l^2, ρ_2), $\rho_2(x,y) \triangleq (\sum\limits_{k=1}^{\infty}(|x_k - y_k|^2))^{\frac{1}{2}}$:
$e_n \triangleq (0,\dots,0,1,0,\dots)$ (第 n 个等于 1), $n = 1,2,\cdots \Rightarrow \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界.
$\rho_2(e_n, e_m) = \sqrt{2},\ \forall n \neq m \Rightarrow \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 没有收敛子列.

命题 1.3.1. 列紧空间中的任一子集都是列紧的, 任一闭集都是自列紧的.

命题 1.3.2. 列紧空间一定完备.

证明. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $(\mathcal{X}, d)$ 中 Cauchy 列 $\overset{\text{列紧}}{\Rightarrow}$ 有收敛子列 $x_{n_k} \to x_0\ as\ k \to \infty$
$\Rightarrow d(x_n, x_0) \leqslant d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) \to 0\ as\ n,k \to \infty.$ □

定义 1.3.2. $(\mathscr{X},d)$, $A\subset\mathscr{X}$, $\varepsilon>0$：

- 称 $N_\varepsilon\subset A$ 是 A 的一个 ε-网, 是指 $A\subset\bigcup\limits_{y\in N_\varepsilon}B(y,\varepsilon)$ ($\Leftrightarrow$ $\forall x\in A$, $\exists y\in N_\varepsilon$, $s.t.$ $d(x,y)<\varepsilon$).
- 如果 $\forall\varepsilon>0$, A 都有一个有穷 ε-网 N_ε, $i.e.$ $\#N_\varepsilon<\infty$, 则称 A 完全有界.

注. 完全有界 $\Rightarrow$ 有界.

例 1.3.3. 有界 $\not\Rightarrow$ 完全有界: l^2 中 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 有界, 由于每个 e_n, e_m, $n\neq m$ 的距离为 $\sqrt{2}$, 它的每一个 $\frac{1}{2}$-网都不是有限集, 故不是完全有界的.

定理 1.3.1. (Hausdorff)(1) 列紧 $\Rightarrow$ 完全有界; (2) 完备空间中列紧 $\Leftrightarrow$ 完全有界.

证明. (1) 假设 A 列紧但不完全有界, 则 $\exists\varepsilon_0>0$, $s.t.$ 任意有限个 ε_0 球都不能覆盖 A. 以此构造 A 中没有收敛子列的点列:

$$\forall x_1\in A,\ \exists x_2\in A\backslash B(x_1,\varepsilon_0),\ \exists x_3\in A\backslash\bigcup_{k=1}^{2}B(x_k,\varepsilon_0),\ldots$$

$\Rightarrow$ 序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset A$, $s.t.$ $x_n\notin\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}B(x_k,\varepsilon_0)$, $n=2,3,\ldots$

$\Rightarrow d(x_n,x_m)\geqslant\varepsilon_0$, $\forall n\neq m\Rightarrow\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 没有收敛子列, 这与 A 列紧矛盾.

(2) 只要证 "$\Leftarrow$", 设 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset A$, 来构造它的一个收敛子列:

取 $\varepsilon=1$, $\exists N_1=\{y_1^{(1)},\ldots,y_{m_1}^{(1)}\}$, $A\subset\bigcup\limits_{k=1}^{m_1}B(y_k^{(1)},1)$

$\Rightarrow\exists y_1\in N_1$, $s.t.$ $B(y_1,1)$ 包含 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的无穷多项 $\Rightarrow\exists$ 子列 $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty\subset B(y_1,1)$.

同理, $\exists y_2\in N_{\frac{1}{2}}$, $\exists\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty$ 的子列 $\{x_n^{(2)}\}_{n=1}^\infty\subset B(y_2,\frac{1}{2}),\ldots$

$$\begin{array}{llll}
x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & \ldots\ \subset B(y_1,1)\\
x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & \ldots\ \subset B(y_2,\dfrac{1}{2})\\
x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} & \ldots\ \subset B(y_3,\dfrac{1}{3})\\
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

$\Rightarrow$ 对角线子列 $\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^\infty$, 满足 $x_n^{(n)} \in \bigcap\limits_{k=1}^{n}(y_k, \frac{1}{k})$

$\Rightarrow d(x_{n+p}^{(n+p)}, x_n^{(n)}) < \frac{2}{n}, \ \forall n, p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \{x_n^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ 是 Cauchy 列 $\overset{\mathcal{X}\text{完备}}{\Rightarrow} \{x_n^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ 收敛. □

定理 1.3.2. 度量空间中紧 $\Leftrightarrow$ 自列紧.

证明. "$\Rightarrow$" Step 1. 紧 $\Rightarrow$ 闭:

设 A 紧, 来证明 $\mathcal{X}\backslash A$ 开. $\forall x \in \mathcal{X}\backslash A$, $\{B(y, \frac{1}{3}d(x,y))\}_{y\in A}$ 是 A 的一个开覆盖

$\Rightarrow \exists y_1, \ldots, y_N \in A, \ s.t. \ A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} B(y_k, \frac{1}{3}d(x, y_k))$, 令 $\delta \triangleq \frac{1}{3}\min\limits_{1\leqslant k\leqslant N} d(x, y_k)$

$\Rightarrow B(x,\delta)\bigcap(\bigcup\limits_{k=1}^{N} B(y_k, \frac{1}{3}d(x,y_k))) = \phi \Rightarrow B(x,\delta) \subset \mathcal{X}\backslash A$.

Step 2. 紧 $\Rightarrow$ 列紧:

假设不列紧, $\exists\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A$ 没有收敛子列, 令 $S_n \triangleq \{x_k\}_{k=1}^\infty \backslash \{x_n\}$

$\Rightarrow S_n$ 闭 (没有聚点)$\Rightarrow \mathcal{X}\backslash S_n$ 开.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathcal{X}\backslash S_n) = \mathcal{X}\backslash\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \mathcal{X}\backslash\phi = \mathcal{X}$$

$\Rightarrow \{\mathcal{X}\backslash S_n\}_{n=1}^\infty$ 是 A 的一个开覆盖

$$\overset{A\text{紧}}{\Rightarrow} \exists N, \ s.t. \ A \subset \bigcup_{n=1}^{N}(\mathcal{X}\backslash S_n) = \mathcal{X}\backslash\bigcap_{n=1}^{N} S_n = \mathcal{X}\backslash\{x_n\}_{n=N+1}^\infty,$$

又 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A \subset \mathcal{X}\backslash\{x_n\}_{n=N+1}^\infty$, 故矛盾.

"$\Leftarrow$" 假设 A 自列紧但不紧,

则存在 A 的一个开覆盖 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$, $s.t.$ 任意有限个 G_α 都不能覆盖 A.

A 自列紧 $\Rightarrow \forall n, \ \exists N_{\frac{1}{n}} = \{y_1^{(n)}, \ldots, y_{m_n}^{(n)}\}, \ s.t. \ A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m_n} B(y_k^{(n)}, \frac{1}{n})$

$\Rightarrow \forall n, \ \exists y_n \in N_{\frac{1}{n}}, \ s.t. \ B(y_n, \frac{1}{n})$ 不能被有限个 G_α 覆盖

$\overset{A\text{自列紧}}{\Rightarrow} \exists$ 子列 $y_{n_k} \to y_0 \in A$, 设 $y_0 \in G_{\alpha_0} \Rightarrow \exists\delta > 0, \ s.t. \ B(y_0, \delta) \subset G_{\alpha_0}$

$\overset{y_{n_k}\to y_0}{\Rightarrow}$ 当 k 充分大, $d(y_{n_k}, y_0) < \frac{1}{2}\delta$ 且 $n_k > \frac{2}{\delta}$

$$\Rightarrow B(y_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subset B(y_0, \delta) \subset G_{\alpha_0},$$

这与 $B(y_{n_k}, \frac{1}{n_k})$ 不能被有限个 G_α 覆盖矛盾. □

注. $(\mathscr{X},d)$ 中, 有界闭 $\overset{\mathscr{X}=\mathbb{R}^n}{\Leftrightarrow}$ 紧 $\Leftrightarrow$ 自列紧 $\overset{\text{闭}}{\leftrightarrows}$ 列紧 $\overset{\mathscr{X}\text{完备}}{\leftrightarrows}$ 完全有界 $\overset{\mathscr{X}=\mathbb{R}^n}{\leftrightarrows}$ 有界.

定理 1.3.3. 列紧空间可分 (有可数的稠密子集).

证明. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_{\frac{1}{n}} \overset{dense}{\subset} X$ (由 $\frac{1}{n}$-网的定义), $\#N_{\frac{1}{n}} < \infty$, 故 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_{\frac{1}{n}}$ 可数. □

(M,ρ) 列紧空间, $C(M) \triangleq \{M$ 上连续函数 $\}$, $d(f,g) \triangleq \max\limits_{x\in M}|f(x)-g(x)|$.

作业. $(C(M),d)$ 完备.

证明. $\forall\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $C(M)$ 上 Cauchy 列, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$, $s.t.$

$$d(f_n,f_m)=\max_{x\in M}|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\varepsilon,\ \forall n,m\geqslant N\ (*)$$

$$\Rightarrow \forall x\in M,\ |f_n(x)-f_m(x)|\leqslant d(f_n,f_m)\leqslant\varepsilon,\ \forall n,m\geqslant N$$

$\Rightarrow \forall x\in M$, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}$ 上 Cauchy 列, 故 $\exists f(x)$, $s.t.$ $f_n(x)\to f(x)\ as\ n\to\infty$.
在 $(*)$ 中令 $m\to\infty$, 有

$$\max_{x\in M}|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon,\ \forall n\geqslant N$$

$\Rightarrow f_n(x)\rightrightarrows f(x) \overset{f_n\text{连续}}{\Rightarrow} f\in C(M)$, 且 $d(f_n,f)\to 0\ as\ n\to\infty$. □

定义 1.3.3. 称 $C(M)$ 中一族函数 $\mathscr{F}$ 等度连续, 是指:

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $s.t.$ $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$, $\forall x',x''\in M\ with\ \rho(x',x'')<\delta$, $\forall f\in\mathscr{F}$.

定理 1.3.4. (Arzela-Ascoli) $\mathscr{F}\subset C(M)$ 列紧 $\Leftrightarrow$ $\mathscr{F}$ 作为函数族一致有界且等度连续.

证明. "$\Rightarrow$" $\mathscr{F}$ 列紧 $\Rightarrow\mathscr{F}$ 有界 $\Rightarrow d(f,0)<R$, $\forall f\in\mathscr{F}$

$$\Leftrightarrow \sup_{f\in\mathscr{F}}\max_{x\in M}|f(x)|\leqslant R\ (i.e.\ \mathscr{F}\ \text{作为函数族一致有界}).$$

下证等度连续. $\mathscr{F}$ 列紧 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_{\frac{\varepsilon}{3}} = \{f_1, \dots, f_m\},\ s.t.\ \mathscr{F} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} B(f_k, \frac{\varepsilon}{3})$.
对每个 $k \in \{1, \dots, m\}$, 由 f_k 一致连续 (由连续 + 一致有界), $\exists \delta_k > 0,\ s.t.$

$$|f_k(x') - f_k(x'')| < \frac{\varepsilon}{3},\ \forall x', x'' \in M\ with\ \rho(x', x'') < \delta_k.$$

令 $\delta \triangleq \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} \delta_k$

$$\Rightarrow |f_k(x') - f_k(x'')| < \frac{\varepsilon}{3},\ \forall x', x'' \in M\ with\ \rho(x', x'') < \delta,\ \forall k \in \{1, \dots, m\}.$$

由 $\frac{\varepsilon}{3}$-网定义, $\forall f \in \mathscr{F},\ \exists k \in \{1, \dots, m\},\ s.t.\ d(f, f_k) < \frac{\varepsilon}{3}$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow |f(x') - f(x'')| &\leqslant |f(x') - f_k(x')| + |f_k(x') - f_k(x'')| + |f_k(x'') - f(x'')| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,\ \forall x', x'' \in M\ with\ \rho(x', x'') < \delta,\ \forall f \in \mathscr{F}.\end{aligned}$$

"$\Leftarrow$" $\mathscr{F}$ 等度连续

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ s.t.\ |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{4},\ \forall x', x'' \in M\ with\ \rho(x', x'') < \delta,\ \forall f \in \mathscr{F}.$$

(M, ρ) 列紧 $\Rightarrow\ \exists N_\delta = \{x_1, \dots, x_n\} \subset M$ (δ-网).
定义映射 $T : C(M) \to \mathbb{R}^n,\ f \mapsto (f(x_1), \dots, f(x_n))$.
$\mathscr{F}$ 一致有界 $\Rightarrow R \triangleq \sup\limits_{f \in \mathscr{F}} \max\limits_{x \in M} |f(x)| < \infty \Rightarrow (\sum\limits_{k=1}^{n} |f(x_k)|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{n} R,\ \forall f \in \mathscr{F}$
$\Rightarrow T(\mathscr{F}) \subset \mathbb{R}^n$ 有界 $\overset{B-W}{\Rightarrow} T(\mathscr{F})$ 列紧, 设 $\tilde{N}_{\frac{\varepsilon}{4}} = \{Tf_1, \dots, Tf_m\}$ 是 $T(\mathscr{F})$ 的 $\frac{\varepsilon}{4}$-网.
Claim. $\{f_1, \dots, f_m\}$ 是 $\mathscr{F}$ 的 ε-网 (再由完备性即得列紧).
$\forall f \in \mathscr{F}$ (目标: $\exists k \in \{1, \dots, m\},\ s.t.\ d(f, f_k) < \varepsilon$),
$\exists k \in \{1, \dots, m\},\ s.t.\ d_{\mathbb{R}^n}(Tf, Tf_k) < \frac{\varepsilon}{4}$.
$\forall x \in M,\ \exists x_j \in N_\delta,\ s.t.\ \rho(x, x_j) < \delta$

$$\begin{aligned}\Rightarrow |f(x) - f_k(x)| &\leqslant |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f_k(x_j)| + |f_k(x_j) - f_k(x)| \\ &\leqslant |f(x) - f(x_j)| + d_{\mathbb{R}^n}(Tf, Tf_k) + |f_k(x_j) - f_k(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon,\ \forall x \in M,\ \forall f \in \mathscr{F}\end{aligned}$$

$\Rightarrow d(f, f_k) = \max\limits_{x \in M} |f(x) - f_k(x)| < \varepsilon,\ \forall f \in \mathscr{F}$. □

Q: L^p 中紧性判据?

定理 1.3.5. (Riesz-Fréchet-Kolmogorov) 设 $1 \leqslant p < \infty$, $\mathcal{F} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ 列紧当且仅当

(1) $\mathcal{F}$ 有界, *i.e.* $\sup\limits_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_p < \infty$;

(2) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists R > 0,\ s.t.\ \int_{|x|>R} |f(x)|^p\, dx < \varepsilon^p,\ \forall f \in \mathcal{F}$;

(3) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ s.t.\ \|\tau_h f - f\|_p < \varepsilon,\ \forall h \in \mathbb{R}^n,\ |h| < \delta,\ \forall f \in \mathcal{F}\ ((\tau_h f)(x) \triangleq f(x+h))$.

作业. $A \subset l^2$ 列紧 $\Leftrightarrow$ (1) A 有界; (2) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ s.t.\ \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^2 < \varepsilon,\ \forall x \in A$.

证明. □

作业. Hilbert cube $A \triangleq \{x \in l^2 \mid |x_k| < 2^{-k},\ \forall k \in \mathbb{N}^*\}$ 是 l^2 中列紧集.

证明. 由上一个作业即得. □

1.4 赋范线性空间

定义 1.4.1. $\mathbb{K} - \mathbb{C}\ or\ \mathbb{R}$, $\mathcal{X} - \mathbb{K}$ 上向量空间, 如果 $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ 在 $\mathcal{X}$ 中的加法和数乘下构成一个向量空间 ($\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathcal{Y},\ \forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{K},\ \alpha x + \beta y \in \mathcal{Y}$), 则称之为 $\mathcal{X}$ 的向量子空间.

定义 1.4.2. $x + A \triangleq \{x + y \mid y \in A\}$, $\lambda A \triangleq \{\lambda y \mid y \in A\}$, $A + B \triangleq \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\}$,

定义 1.4.3. $\mathrm{span}(A) \triangleq \{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \mid x_k \in A,\ \lambda_k \in \mathbb{K},\ k = 1, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$, 称为 A 张成的向量子空间.

定义 1.4.4. 如果 $A \subset \mathcal{X}$ 线性无关, 且 $\mathrm{span}(A) = \mathcal{X}$, 则称 A 是 $\mathcal{X}$ 的一个 Hamel 基 (代数基、线性基). 如果 $\mathcal{X}$ 的 Hamel 基 A 是一个有限集, 则定义 $\dim \mathcal{X} \triangleq \#A$, 否则, 记 $\dim \mathcal{X} = \infty$.

定理 1.4.1. 任一向量空间都有 Hamel 基.

定义 1.4.5. $\mathbb{K}-\mathbb{C}$ *or* $\mathbb{R}$, $\mathcal{X}-\mathbb{K}$ 上向量空间, 如果 $\mathcal{X}$ 上函数 $\|\cdot\|:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ 满足:

- (正定性) $\|x\|\geqslant 0$, $\forall x\in\mathcal{X}$, 且 $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$;
- (齐次性) $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$, $\forall x\in\mathcal{X}$, $\forall\lambda\in\mathbb{K}$;
- (三角不等式) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$, $\forall x,y\in\mathcal{X}$.

则称 $\|\cdot\|$ 是 $\mathcal{X}$ 上一个范数, $(\mathcal{X},\|\cdot\|)$ 称为赋范空间, $d(x,y)\triangleq\|x-y\|$ 是 $\mathcal{X}$ 上一个度量, 称为 $\mathcal{X}$ 上的范数诱导度量或典则度量, 如果 $(\mathcal{X},\|\cdot\|)$ 在典则度量下完备, 则称 $(\mathcal{X},\|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间.

作业. 在典则度量下向量运算 (加法、数乘) 是连续的.

证明. □

例 1.4.1. Banach 空间的例子:

- 函数空间 L^p $(1\leqslant p<\infty)$, $\|f\|_p=(\int|f|^p)^{\frac{1}{p}}$;
- 数列空间 l^p $(1\leqslant p<\infty)$, $\|x\|_p=(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$;
- $L^\infty=\{$本性有界可测函数 (去掉一个零测集后有界)$\}$, $\|f\|_\infty=\operatorname*{esssup}\limits_{x\in\Omega}|f(x)|=\inf\{M>0\mid\mu\{|f|>M\}=0\}$ (本性上确界);
- $l^\infty=\{$有界数列$\}$, $\|x\|_\infty=\sup\limits_k|x_k|$;
- $C(M)$, M 紧空间, $\|f\|=\max\limits_{x\in M}|f(x)|$;
- $c=\{$收敛数列$\}$, $\|x\|=\sup\limits_k|x_k|$;
- $c_0=\{$收敛于 0 的数列$\}$, $\|x\|=\sup\limits_k|x_k|$.

注. $l^p\subset c_0\overset{\text{闭子空间}}{\subset}c\overset{\text{闭子空间}}{\subset}l^\infty$.

例 1.4.2. $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 有界域, $C^k(\bar\Omega)\triangleq\{\bar\Omega$ 上 k 次连续可微函数$\}$.

多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n$, $\partial^\alpha\triangleq\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$.

$\|u\| \triangleq \max\limits_{|\alpha|\leqslant k}\max\limits_{x\in\bar{\Omega}} |\partial^\alpha u(x)|,\ \|u\|_{k,p} \triangleq \big(\sum\limits_{|\alpha|\leqslant k}\int_\Omega |\partial^\alpha u|^p\,dx\big)^{\frac{1}{p}},$

$S \triangleq \{u \in C^k(\bar{\Omega}) \mid \|u\|_{k,p} < \infty\},\ H^{k,p}(\Omega) \triangleq S$ 的完备化, 称为 Soblev 空间.

定义 1.4.6. $\mathscr{X}-$ 向量空间, $\|\cdot\|_1,\ \|\cdot\|_2 - \mathscr{X}$ 上两个范数, 如果 $\forall\{x_n\}_{n=1}^\infty,\ \|x_k\|_2 \to 0$ *implies* $\|x_k\|_1 \to 0$, 则称 $\|\cdot\|_2$ 强于 $\|\cdot\|_1$, 记为 $\|\cdot\|_1 \lesssim \|\cdot\|_2$.

如果 $\|\cdot\|_1 \lesssim \|\cdot\|_2$, 同时 $\|\cdot\|_2 \lesssim \|\cdot\|_1$, 则称二者是等价范数, 记为 $\|\cdot\|_1 \simeq \|\cdot\|_2$.

命题 1.4.1. $\|\cdot\|_1 \lesssim \|\cdot\|_2 \Leftrightarrow \exists c > 0,\ s.t.\ \|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2,\ \forall x \in \mathscr{X}.$

证明. "$\Leftarrow$" 平凡.

"$\Rightarrow$" 假设不然 $\Rightarrow \forall n,\ \exists x_n \in \mathscr{X},\ s.t.\ \|x_n\|_1 > n\|x_n\|_2$, 令 $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|_1}$, 则

$$\|y_n\|_2 = \frac{\|x_n\|_2}{\|x_n\|_1} < \frac{1}{n} \to 0\ as\ n \to \infty,$$

但 $\|y_n\|_1 = 1$, 矛盾. □

推论 1.4.2. $\|\cdot\|_1 \simeq \|\cdot\|_2 \Leftrightarrow \exists c_1,\ c_2 > 0,\ s.t.\ c_1\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant c_2\|x\|_2,\ \forall x \in \mathscr{X}.$

例 1.4.3. $\mathbb{R}^n$ 上所有 l^p 范数都等价.

证明. $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k|,\ \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p = (\sum\limits_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant n^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty.$ □

定理 1.4.3. 有限维空间上所有范数都彼此等价.

证明. 设 $\dim\mathscr{X} = n$, 设 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 是 x 的一个 Hamel 基

$\Rightarrow \forall x \in \mathscr{X}$, 有唯一表示 $x = \sum\limits_{k=1}^n \xi_k e_k,\ \xi_k \in \mathbb{K},\ k = 1, 2, \ldots, n.$

映射 $T: \mathscr{X} \to \mathbb{K}^n,\ x = \sum\limits_{k=1}^n \xi_k e_k \mapsto \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 是 $\mathscr{X}$ 到 $\mathbb{K}^n$ 的代数同构.

设 $|\xi| \triangleq (\sum\limits_{k=1}^n |\xi_k|^2)^{\frac{1}{2}},\ \xi \in \mathbb{K}^n,\ \|x\|_T \triangleq |Tx|,\ x \in \mathscr{X}$ 是 $\mathscr{X}$ 上一个范数.

Claim. $\mathscr{X}$ 上任一范数 $\|\cdot\|$ 都与 $\|\cdot\|_T$ 等价:

定义 $\rho: \mathbb{K}^n \to \mathbb{R},\ \xi \mapsto \|\sum\limits_{k=1}^n \xi_k e_k\|$, 满足 (1) $\rho(\xi) = |\xi|\rho(\frac{\xi}{|\xi|}),\ \forall \xi \in \mathbb{K}\backslash\{0\};$

(2) ρ 在 $\mathbb{K}^n$ 上连续,

$$|\rho(\xi)-\rho(\eta)| = |\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\| - \|\sum_{k=1}^{n}\eta_k e_k\|| \leqslant \|\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\eta_k)e_k\|$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|\|e_k\| \overset{C-S}{\leqslant} (\sum_{k=1}^{n}\|e_k\|^2)^{\frac{1}{2}}|\xi-\eta|.$$

令 $S_1 \triangleq \{\xi\in\mathbb{K}^n \mid |\xi|=1\} \Rightarrow S_1$ 紧.

$C_1 \triangleq \min\limits_{\xi\in S_1}\rho(\xi),\ C_2 \triangleq \max\limits_{\xi\in S_1}\rho(\xi) \Rightarrow C_1 \leqslant \rho(\frac{\xi}{|\xi|}) \leqslant C_2,\ \forall \xi\in\mathbb{K}^n\backslash\{0\}$

$$\Rightarrow C_1|\xi| \leqslant \rho(\xi) \leqslant C_2|\xi|,\ \forall \xi\in\mathbb{K}^n \Rightarrow C_1|Tx| \leqslant \rho(Tx) \leqslant C_2|Tx|,\ \forall x\in\mathcal{X}$$

$$\Leftrightarrow C_1\|x\|_T \leqslant \|x\| \leqslant C_2\|x\|_T,\ \forall x\in\mathcal{X}.$$

只需证 $C_1>0$. 假设 $C_1=0,\ \exists \xi^*\in S_1,\ s.t.\ \rho(\xi^*)=0=\|\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k^* e_k\|$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k^* e_k = 0 \Rightarrow \xi^*=0$, 与 $|\xi^*|=1$ 矛盾. □

定义 1.4.7. $(\mathcal{X},\|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y},\|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$, 如果 $\exists T:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 线性双射连续, 且 T^{-1} 也连续, 则称 $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{Y}$ 同构.

推论 1.4.4. 同维数的有限维赋范空间彼此同构.

证明. 映射 $T:\mathcal{X}\to\mathbb{K}^n,\ x=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k e_k \mapsto \xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ 是 $\mathcal{X}$ 到 $\mathbb{K}^n$ 的代数同构, 且 $C_1\|x\|_T \leqslant \|x\| \leqslant C_2\|x\|_T,\ \forall x\in\mathcal{X}$.

T 连续可由前一个不等号得到, T^{-1} 连续可由后一个不等号得到. 故均与 $\mathbb{K}^n$ 同构. □

命题 1.4.2. 有限维赋范空间一定是 Banach 空间, 任意赋范空间的有限维子空间一定是闭子空间.

证明. $C_1|Tx| \leqslant \|x\| \leqslant C_2|Tx|,\ \forall x\in\mathcal{X}$, 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{X}$ 中任一 Cauchy 列,

$|Tx_n-Tx_m| \leqslant \frac{1}{C_1}\|x_n-x_m\| \to 0\ as\ n,m\to\infty \Rightarrow \{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{K}^n$ 中 Cauchy 列.

由 $\mathbb{K}^n$ 完备, 设 $Tx_n\to\xi\in\mathbb{K}^n \Rightarrow \|x_n-T^{-1}\xi\| \leqslant C_2|Tx_n-\xi| \to 0\ as\ n\to\infty$. □

引理 1.4.5. (Riesz Lem) $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, $\mathcal{Y} \overset{\text{闭子空间}}{\subset} \mathcal{X}$, $\mathcal{Y} \neq \mathcal{X}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists e \in \mathcal{X}$ *with* $\|e\| = 1$, *s.t.* $\operatorname{dist}(e, \mathcal{Y}) \geqslant 1 - \varepsilon$.

证明. $\mathcal{Y} \neq \mathcal{X} \Rightarrow \exists x \in \mathcal{X} \backslash \mathcal{Y}$, 令 $d \triangleq \operatorname{dist}(x, \mathcal{Y}) = \inf\limits_{y \in \mathcal{Y}} \|x - y\| \Rightarrow d > 0$.

否则, 如果 $d = 0$, 则 $\exists y_n \in \mathcal{Y}$, $n = 1, 2, \ldots$,

s.t. $\|x - y_n\| \to d = 0 \Rightarrow y_n \to x \overset{\mathcal{Y}\text{闭}}{\Rightarrow} x \in \mathcal{Y}$, 矛盾.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists y_0 \in \mathcal{Y}$, *s.t.* $d \leqslant \|x - y_0\| \leqslant \frac{d}{1-\varepsilon}$, 令 $e \triangleq \frac{x - y_0}{\|x - y_0\|} \notin \mathcal{Y}$, 且 $\|e\| = 1$.

$$\forall z \in \mathcal{Y},\ \|e - z\| = \|\frac{x - y_0}{\|x - y_0\|} - z\| = \frac{1}{\|x - y_0\|}\|x - (y_0 + \|x - y_0\| z)\| \geqslant \frac{1 - \varepsilon}{d} d = 1 - \varepsilon$$

$\Rightarrow \operatorname{dist}(e, \mathcal{Y}) \geqslant 1 - \varepsilon$. □

定理 1.4.6. $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, $\mathcal{X}$ 中单位球面列紧 $\Leftrightarrow \dim \mathcal{X} < \infty$.

证明. "$\Leftarrow$" 代数同构 $T : \mathcal{X} \to \mathbb{K}^n$, $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k \mapsto \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$,

满足 $C_1 |Tx| \leqslant \|x\| \leqslant C_2 |Tx|$, $\forall x \in \mathcal{X}$.

$|Tx| \leqslant \frac{1}{C_1}$, $\forall x \in S_1 \triangleq \{x \in \mathcal{X} \mid \|x\| = 1\} \Rightarrow T(S_1) \subset \mathbb{K}^n$ 有界, 故列紧 (B-W).

$\forall \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset S_1$, $\exists T x_{k_j} \to \xi \in \mathbb{K}^n \Rightarrow x_{k_j} \to T^{-1}\xi$ (由 $\|x\| \leqslant C_2 \|Tx\|$) $\Rightarrow S_1$ 列紧.

"$\Rightarrow$" 假设 $\dim \mathcal{X} = \infty \Rightarrow \exists \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}$ 线性无关.

令 $X_n \triangleq \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\} \Rightarrow X_{n-1} \overset{\text{闭子空间}}{\subsetneqq} X_n$ (因为 $\dim X_{n-1} < \infty$)

$$\overset{Riesz\ Lem}{\underset{\varepsilon = \frac{1}{2}}{\Rightarrow}} \forall n,\ \exists x_n \in X_n,\ \|x_n\| = 1,\ s.t.\ \operatorname{dist}(x_n, X_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \|x_n - x_m\| \geqslant \frac{1}{2}$, $\forall n \neq m \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S_1$ 没有收敛子列, 这与 S_1 列紧矛盾. □

最佳逼近论, 逼近论的基本问题, 给定一个函数, 用给定的关于函数的线性组合去逼近, 得到最佳逼近元 $\overset{\text{抽象}}{\to}$ 给定 $x \in \mathcal{X}$, 给定 $e_1, \ldots, e_n \in \mathcal{X}$, 是否存在 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, *s.t.* $\|x - \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\| = \min\limits_{\xi \in \mathbb{K}^n} \|x - \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k\|$.

定理 1.4.7. 给定 $x \in \mathcal{X}$, 给定 $e_1, \ldots, e_n \in \mathcal{X}$ 线性无关, $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, *s.t.* $\|x - \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\| = \min\limits_{\xi \in \mathbb{K}^n} \|x - \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k\|$.

证明. 给定 $x \in \mathcal{X}$, 定义函数 $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R},\ \xi \mapsto \|x - \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k\|$,

(1) f 连续; (2) $f(\xi) \geqslant \|\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k\| - \|x\|$;

(3) $\rho(\xi) \triangleq \|\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k\|$ 是 $\mathbb{K}^n$ 上一个范数, 这与 $\mathbb{K}^n$ 上欧式范数 $|\cdot|$ 等价.

$\Rightarrow \exists c > 0,\ s.t.\ \rho(\xi) \geqslant c|\xi|,\ \forall \xi \in \mathbb{K}^n$

$$\Rightarrow f(\xi) \geqslant c|\xi| - \|x\| \to +\infty \ as\ |\xi| \to \infty$$

$\Rightarrow f$ 在 $\mathbb{K}^n$ 上可取到最小值, 最小值点即为最佳逼近元. □

推论 1.4.8. 令 $M \triangleq \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_n\},\ \forall x \in \mathcal{X},\ \exists y \in M,\ s.t.\ \|x - y\| = \mathrm{dist}(x, M)$.

Q: (1) “M 是有限向量空间” 换成 “M 是闭子空间” 是否仍成立? 反例: EX1.4.14 (HW);

(2) 唯一性?

定义 1.4.8. 称 $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ 严格凸是指,

$$\forall x, y \in \mathcal{X},\ \|x\| = \|y\| = 1,\ x \neq y \Rightarrow \|tx + (1-t)y\| < 1,\ \forall t \in (0,1).$$

例 1.4.4. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ 严格凸, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ 非严格凸 (画单位球的图易得).

例 1.4.5. $L^p(1 < p < \infty)$ 严格凸.

证明. 假设 $\exists u, v \in L^p,\ \|u\|_p = \|v\|_p = 1,\ u \neq v,\ s.t.\ \|tu + (1-t)v\|_p = 1,\ t \in (0,1)$

$\Rightarrow \|tu + (1-t)v\|_p = 1 = t + (1-t) = t\|u\|_p + (1-t)\|v\|_p = \|tu\|_p + \|(1-t)v\|_p$.

由 $\|f + g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p \Leftrightarrow \exists \lambda_1,\ \lambda_2 \geqslant 0,\ (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0),\ s.t.\ \lambda_1 f = \lambda_2 g\ a.e.$

$$\Rightarrow \exists \lambda_1,\ \lambda_2 \geqslant 0,\ (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0),\ s.t.\ \lambda_1 tu = \lambda_2 (1-t) v\ a.e.$$

$\Rightarrow \|\lambda_1 tu\|_p = \|\lambda_2(1-t)v\|_p \Rightarrow \lambda_1 t = \lambda_2(1-t) \Rightarrow u = v\ a.e.$, 矛盾. □

例 1.4.6. $L^1,\ L^\infty$ 不严格凸.

证明. $L^1[0,1]$ 中, $u(t) \equiv 1,\ v(t) = 2t,\ t \in [0,1] \Rightarrow \|u\|_1 = \|v\|_1 = 1 = \|\frac{u+v}{2}\|_1$.

$L^\infty[0,1]$ 中, $u(t) \equiv 1,\ v(t) = t,\ t \in [0,1] \Rightarrow \|u\|_\infty = \|v\|_\infty = 1 = \|\frac{u+v}{2}\|_\infty$. □

定理 1.4.9. 严格凸赋范空间中给定向量列到有限子空间的最佳逼近元存在唯一.

证明. 给定 $x \in \mathscr{X}$, $M \overset{\text{闭子空间}}{\subset} \mathscr{X}$, $\dim(M) < \infty$,

假设 $\exists y, z \in M$, *s.t.* $\|x-y\| = \|x-z\| = d \triangleq \mathrm{dist}(x, M)$.

如果 $d = 0$, 平凡;

如果 $d > 0$, $\forall t \in [0,1]$, 由 $\|\frac{x-y}{d}\| = \|\frac{x-z}{d}\| = 1$ 和严格凸, 有

$$\frac{1}{d}\|x - [ty + (1-t)z]\| = \frac{1}{d}\|t(x-y) + (1-t)(x-z)\| = \|t\frac{x-y}{d} + (1-t)\frac{x-z}{d}\| < 1$$

$\Rightarrow \|x - [ty + (1-t)z]\| < d$, 矛盾. □

定义 1.4.9. $(\mathscr{X}, \|\cdot\|)$, $\mathscr{X}_0 \overset{\text{闭子空间}}{\subset} \mathscr{X}$, 定义 $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathscr{X}_0$, $[x] \triangleq x$ 所在等价类, $\mathscr{X}/\mathscr{X}_0 \triangleq \{[x] \mid x \in \mathscr{X}\}$, $[x] + [y] \triangleq [x+y]$, $\lambda[x] \triangleq [\lambda x] \Rightarrow \mathscr{X}/\mathscr{X}_0$ 是向量空间, 称为 $\mathscr{X}$ *mod* $\mathscr{X}_0$ 的商空间.

定理 1.4.10. $\|[x]\|_* \triangleq \inf\limits_{y\in[x]} \|y\|$, $1°$ $\|\cdot\|_*$ 是 $\mathscr{X}/\mathscr{X}_0$ 上范数; $2°$ $(\mathscr{X}, \|\cdot\|)$ *Banach* $\Rightarrow (\mathscr{X}/\mathscr{X}_0, \|\cdot\|_*)$ *Banach*.

证明. $1°$ (1) (正定性) $\|[x]\|_* \geqslant 0$, $\forall [x] \in \mathscr{X}/\mathscr{X}_0$ 显然. 设 $\|[x]\|_* = 0$

$$\Rightarrow \exists \{y_n\}_{n=1}^\infty \in [x],\ s.t.\ \|y_n\| \to 0\ as\ n \to \infty \Rightarrow y_n \to 0\ as\ n \to \infty.$$

由 $[x] = x + \mathscr{X}_0$ 闭 $\Rightarrow 0 \in [x] \Rightarrow [x] = [0]$.

(2) (齐次性) 平凡.

(3) (三角不等式) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x' \in [x]$, $y' \in [y]$, *s.t.* $\|x'\| \leqslant \|[x]\|_* + \frac{\varepsilon}{2}$, $\|y'\| \leqslant \|[y]\|_* + \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \|x' + y'\| \leqslant \|x'\| + \|y'\| \leqslant \|[x]\|_* + \|[y]\|_* + \varepsilon$, 由 $x' + y' \in [x+y]$

$$\Rightarrow \|[x+y]\|_* \leqslant \|x' + y'\| \leqslant \|[x]\|_* + \|[y]\|_* + \varepsilon.$$

由 ε 任意性, $\|[x+y]\|_* = \|[x] + [y]\|_* \leqslant \|[x]\|_* + \|[y]\|_*$.

$2°$ 设 $\{[x_n]\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathscr{X}/\mathscr{X}_0$ 中 Cauchy 列 $\Rightarrow \|[x_n] - [x_m]\|_* \to 0\ as\ n, m \to \infty$.

只需证它有子列收敛. $\forall k$, $\exists n_k$, *s.t.* $\|[x_{n_k}] - [x_m]\|_* < \frac{1}{2^{k+1}}$, $\forall m \geqslant n_k$

$\Rightarrow$ 子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $s.t.$ $\|[x_{n_k}]-[x_{n_{k+1}}]\|_* < \frac{1}{2^{k+1}}$,

由定义, $\exists y_{n_k} \in [x_{n_k} - x_{n_{k+1}}]$, $s.t.$ $\|y_{n_k}\| \leqslant \|[x_{n_k} - x_{n_{k+1}}]\|_* + \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k}$.

令 $z_1 \triangleq x_{n_1}$, $z_2 \triangleq z_1 - y_{n_1}, \cdots$, $z_k \triangleq z_{k-1} - y_{n_{k-1}}$

$\Rightarrow z_k = x_{n_1} - y_{n_1} - \cdots - y_{n_{k-1}} \in [x_{n_k}]$.

$$\begin{aligned}\|z_k - z_{k+p}\| &\leqslant \|z_k - z_{k+1}\| + \cdots + \|z_{k+p-1} - z_{k+p}\| = \|y_{n_k}\| + \cdots + \|y_{n+p-1}\| \\ &< \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^{k+p-1}} < \frac{1}{2^{k-1}}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{X}$ 中 Cauchy 列, 由完备性, $\exists z \in \mathcal{X}$, $s.t.$ $\|z_k - z\| \to 0\ as\ n \to \infty$.

$$\|[x_{n_k}] - [z]\|_* = \|[z_k] - [z]\|_* = \|[z_k - z]\|_* \leqslant \|z_k - z\| \to 0\ as\ k \to \infty$$

$\Rightarrow \{[x_{n_k}]\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛. □

1.5 内积空间

定义 1.5.1. $\mathcal{X} - \mathbb{K}$ 上向量空间, 如果函数 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{K}$ 满足

- (对第一个变元线性) $\forall x_1, x_2, y \in \mathcal{X}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, 有 $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y\rangle = \alpha\langle x_1, y\rangle + \beta\langle x_2, y\rangle$;
- (对第二个变元共轭线性) $\forall x, y_1, y_2 \in \mathcal{X}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, 有 $\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y_1\rangle + \bar{\beta}\langle x, y_2\rangle$;
- (共轭对称) $\forall x, y \in \mathcal{X}, \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;
- (二次型正定) $\forall x \in \mathcal{X}$, $\langle x, x\rangle \geqslant 0$, 且 $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

则称 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $\mathcal{X}$ 上一个内积, $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 称为内积空间.

例 1.5.1. 实欧式空间 $\mathbb{R}^n$, $x \cdot y \triangleq \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$; 复欧式空间 (酉空间) $\mathbb{C}^n$, $\langle x, y\rangle \triangleq \sum\limits_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k}$.

引理 1.5.1. (Cauchy-Schwarz 不等式) $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle), \|x\| \triangleq \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$, $x \in \mathcal{X}$

$$\Rightarrow |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|, \forall x, y \in \mathcal{X},$$

等号成立 $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}$, $s.t.$ $x = \lambda y$.

证明. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + \bar{\lambda}\langle x, y\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle y, y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\{\bar{\lambda}\langle x, y\rangle\} + |\lambda|^2\|y\|^2.\end{aligned}$$

不妨设 $y \neq 0$, 取 $\lambda = -\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\{-\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}\} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^4}\|y\|^2 = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}$$

$\Rightarrow |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$. □

命题 1.5.1. $\|x\| \triangleq \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ 是 $\mathcal{X}$ 上一个范数, 称为内积诱导范数.

证明. $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$
$\Rightarrow \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in \mathcal{X}$. □

定义 1.5.2. 如果内积空间在其内积诱导范数下是 Banach 空间, 则称为 Hilbert 空间.

例 1.5.2. l^2, $\langle x, y\rangle \triangleq \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k\overline{y_k}$

定理 1.5.2. $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $\|x\| \triangleq \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$:

- (极化恒等式) (1) 如果 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$;
  (2) 如果 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\sum\limits_{k=0}^{3}\|x+i^k y\|^2$.
- (平行四边形等式) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

证明. □

定理 1.5.3. (Fréchet-von Neumann) $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, $\|\cdot\|$ 由某个内积给出 $\Leftrightarrow$ $\|\cdot\|$ 满足平行四边形等式.

证明. □

定义 1.5.3. $(\mathscr{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$:

- 如果 $\langle x, y\rangle = 0$, 则称 x 与 y 正交, 记为 $x \perp y$;
- 对 $M \subset \mathscr{X}$, 如果 $\forall y \in M,\ x \perp y$, 则称 $x \perp M$;
- $M^{\perp} \triangleq \{x \in \mathscr{X} \mid x \perp M\}$, 称为 x 的正交补.

命题 1.5.2. (勾股定理) $x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

命题 1.5.3. $M \overset{dense}{\subset} \mathscr{X},\ x \perp M \Rightarrow x = 0$.

证明. $\forall y \in \mathscr{X},\ \exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty},\ s.t.\ y_n \to y\ as\ n \to \infty$.

由 $x \perp M$, 有 $\langle x, y_n\rangle = 0$, 由 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 连续, $\langle x, y\rangle = 0$, 取 $y = x$ 即得. □

引理 1.5.4. (最近点) $H-$Hilbert 空间, 闭凸集 $M \neq \phi$, $\forall x \in H,\ \exists! y \in M,\ s.t.\ \|x - y\| = \operatorname{dist}(x, M)$.

证明. 令 $d \triangleq \operatorname{dist}(x, M) = \inf\limits_{z \in M} \|x - z\|$

$\Rightarrow \exists y_n \in M,\ n = 1, 2, \ldots,\ s.t.\ \|x - y_n\| \to d$ (极小化序列).

Claim. $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛:

$\|(y_m - x) - (y_n - x)\|^2 + \|(y_m - x) + (y_n - x)\|^2 = 2(\|y_m - x\|^2 + \|y_n - x\|^2)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \|y_m - y_n\|^2 &= 2(\|y_m - x\|^2 + \|y_n - x\|^2) - 4\|\frac{y_m + y_n}{2} - x\|^2 \\ &\leqslant 2(\|y_m - x\|^2 + \|y_n - x\|^2) - 4d^2 \to 4d^2 - 4d^2 = 0\ as\ n, m \to \infty\end{aligned}$$

$\Rightarrow \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列 $\overset{H\text{完备}}{\Rightarrow} \exists y \in H,\ s.t.\ \|y_n - y\| \to 0\ as\ n \to \infty \overset{M\text{闭}}{\Rightarrow} y \in M$

$\Rightarrow d \leqslant \|x - y\| \leqslant \|x - y_n\| + \|y_n - y\| \to d \Rightarrow \|x - y\| = d$. □

定理 1.5.5. (正交分解) H—Hilbert 空间, $M \overset{\text{闭子空间}}{\subset} \mathcal{X}$

$$\Rightarrow H = M \oplus M^{\perp}\ (\forall x \in H,\ \exists ! y \in M,\ \exists ! z \in M^{\perp},\ s.t.\ x = y + z).$$

证明. $\forall x \in H$, 由最近点 Lem, $\exists ! y \in M,\ s.t.\ \|x - y\| = \mathrm{dist}(x, M) = d$.

Claim. $z \triangleq x - y \in M^{\perp}$:

$\forall 0 \neq w \in M,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ y + \lambda w \in M$,

$$d^2 \leqslant \|x - (y + \lambda w)\|^2 = \|x - y\|^2 - 2\mathrm{Re}\{\bar{\lambda}\langle x - y, w\rangle\} + |\lambda|^2\|w\|^2.$$

特别地, 取 $\lambda = \frac{\langle x-y,w\rangle}{\|w\|^2} \Rightarrow d^2 \leqslant d^2 - \frac{|\langle x-y,w\rangle|^2}{\|w\|^2} \Rightarrow \langle x - y, w\rangle = 0 \Rightarrow x - y \perp M$. □

定义 1.5.4. H—Hilbert 空间, $M \overset{\text{闭子空间}}{\subset} \mathcal{X}$, 映射 $P_M : H \to M,\ x \mapsto y$ (最近点), 称为 H 到 M 的正交投影.

定理 1.5.6. (1) $P_M x \in M,\ x - P_M x \in M^{\perp}$; (2) $\mathrm{Ran}\{P_M\} = M,\ \mathrm{Ker}\{P_M\} = M^{\perp}$; (3) $\|x - P_M x\| = \mathrm{dist}(x, M)$; (4) $P_M^2 = P_M$ (幂等); (5) $\|P_M x\| \leqslant \|x\|,\ \forall x \in H$; (6) $I - P_M = P_M^{\perp}$.

定义 1.5.5. $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, 如果 $S \triangleq \{e_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \mathcal{X}$ 满足 $e_\alpha \perp e_\beta,\ \forall \alpha, \beta \in I,\ \alpha \neq \beta$, 则称 S 为 $\mathcal{X}$ 中的一个正交集. 如果 S 还满足: $\forall \alpha \in I,\ \|e_\alpha\| = 1$, 则称之为规范正交集 (orthonormal set, O.N.S.).

定义 1.5.6. 如果一个正交集 S 满足 $S^{\perp} = \{0\}$, 则称它完备.

定义 1.5.7. $\mathcal{X} \neq \phi$, $\mathcal{X}$ 上的一个偏序 "$\leqslant$" 是满足如下条件的一个关系

- (传递性) $x \leqslant y,\ y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$;

- (反身性) $x \leqslant x$;
- $x \leqslant y,\ y \leqslant x \Rightarrow x = y$.

$(\mathscr{X}, \leqslant)$ 称为偏序集. 如果 $\forall x, y \in \mathscr{X}$, “$x \leqslant y$” 和 “$y \leqslant x$” 二者必居其一, 则称 “$\leqslant$” 是一个全序. 设 $\mathscr{Y} \subset \mathscr{X}$, 如果 $\exists p \in \mathscr{X},\ s.t.\ y \leqslant p,\ \forall y \in \mathscr{Y}$, 则称 p 是 $\mathscr{Y}$ 的一个上界. 如果 $\exists m \in \mathscr{X},\ s.t.\ m \leqslant x \Rightarrow m = x$, 则称 m 是 $\mathscr{X}$ 的一个极大元.

引理 1.5.7. (Zorn) 如果一个偏序集的每个全序子集都有上界, 则它一定有极大元.

定理 1.5.8. 非平凡内积空间中一定有完备正交集.

证明. 令 $\mathscr{F} \triangleq \{\mathscr{X}\text{中的正交集}\}$, $(\mathscr{F}, \subset)$ 是一个偏序集 (集合的包含).
对 $\mathscr{F}$ 的任一全序子集 C, 令 $P \triangleq \bigcup\limits_{A \subset C} A$, $\forall x, y \in P,\ \exists A, B \subset C,\ s.t.\ x \in A,\ y \in B$,
由全序, 不妨设 $A \subset B$, 则 $x, y \in B \Rightarrow x \perp y \Rightarrow P$ 仍是正交集
$\Rightarrow P \in \mathscr{F},\ P$ 是 C 的一个上界 $\overset{Zorn\ Lem}{\Rightarrow}$ $\mathscr{F}$ 有极大元 S.
Claim. S 完备:
假设不然 $\Rightarrow \exists x_0 \neq 0,\ s.t.\ x_0 \perp S \Rightarrow S \cup \{x_0\} \in \mathscr{F}$, 这与 S 的极大性矛盾. □

定义 1.5.8. $(\mathscr{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $S \triangleq \{e_\alpha\}_{\alpha \in I} - O.N.S.$, 如果 $\forall x \in \mathscr{X}$ 都可表示为 $x = \sum\limits_{\alpha \in I} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha$, 则 S 称为 $\mathscr{X}$ 中的一个规范正交基 (O.N.B.), $\{\langle x, e_\alpha \rangle\}_{\alpha \in I}$ 称为 x 的 Fourier 系数.

定理 1.5.9. (Bessel 不等式) $\forall x \in \mathscr{X},\ \sum\limits_{\alpha \in I} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$.

证明. Step 1 $\forall\{\alpha_1,\dots,\alpha_N\}\subset I$, $\sum\limits_{k=1}^{N}|\langle x,e_{\alpha_k}\rangle|^2\leqslant\|x\|^2$:

$$\begin{aligned}&\langle x-\sum_{k=1}^{N}\langle x,e_{\alpha_k}\rangle e_{\alpha_k},x-\sum_{j=1}^{N}\langle x,e_{\alpha_j}\rangle e_{\alpha_j}\rangle\\ =&\|x\|^2-\sum_{k=1}^{N}\langle x,e_{\alpha_k}\rangle\langle e_{\alpha_k},x\rangle-\sum_{j=1}^{N}\overline{\langle x,e_{\alpha_j}\rangle}\langle x,e_{\alpha_j}\rangle+\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\langle x,e_{\alpha_k}\rangle\overline{\langle x,e_{\alpha_j}\rangle}\langle e_{\alpha_k},e_{\alpha_j}\rangle\\ =&\|x\|^2-\sum_{k=1}^{N}|\langle x,e_{\alpha_k}\rangle|^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

移项即得.

Step 2 $\tilde{I}\triangleq\{\alpha\in I\mid\langle x,e_\alpha\rangle\neq 0\}$ 至多可数:

令 $I_n\triangleq\{\alpha\in I\mid|\langle x,e_\alpha\rangle|>\frac{1}{n}\}$, $n=1,2,\dots$.

Claim. $\forall n$, $\#I_n<\infty$.

假设 $\exists n_0$, $s.t.\ \#I_{n_0}=\infty$, 取 N 充分大, $s.t.\frac{N}{n_0^2}>\|x\|^2$.

在 I_{n_0} 中任取 N 个指标 $\alpha_1,\dots,\alpha_N$, $\sum\limits_{k=1}^{N}|\langle x,e_{\alpha_k}\rangle|^2>\frac{N}{n_0^2}>\|x\|^2$, 与 Step 1 矛盾.

Step 3:

给定 $\tilde{I}$ 一个排列, 令 $\tilde{I}=\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\forall N$, 由 Step 1, $\sum\limits_{k=1}^{N}|\langle x,e_{\alpha_k}\rangle|^2\leqslant\|x\|^2$

$\Rightarrow\sum\limits_{\alpha\in I}|\langle x,e_{\alpha_k}\rangle|^2\triangleq\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_{\alpha_k}\rangle|^2\leqslant\|x\|^2$ (正项级数可重排). □

Q: $\sum\limits_{\alpha\in I}\langle x,e_\alpha\rangle$ 是否重排不变?

引理 1.5.10. $H-$Hilbert 空间, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}-O.N.S.$, $M\triangleq\overline{\mathrm{span}\{e_k\}_{k=1}^{\infty}}$ 为 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 张成的闭子空间, 则 $\forall x\in H$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k\in M$, 且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k=P_Mx$.

证明. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle|^2\leqslant\|x\|^2$ (Bessel)

$$\Rightarrow\|\sum_{k=n}^{m}\langle x,e_k\rangle e_k\|^2\overset{\text{勾股}}{=}\sum_{k=n}^{m}|\langle x,e_k\rangle|^2\to 0\ as\ n,m\to 0$$

$\Rightarrow\{\sum\limits_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 中 Cauchy 列

$\overset{H\text{完备}}{\Rightarrow}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\in H\overset{M\text{闭}}{\Rightarrow}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k\in M$.

$$\langle x-\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k,e_j\rangle=\langle x,e_j\rangle-\langle x,e_j\rangle=0,\ \forall j$$

$$\Rightarrow x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k \perp M \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k = P_M x \text{ (由定义)}.$$ □

推论 1.5.11. 设 $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是任一双射 ($\mathbb{N}$的置换), $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_{\sigma(k)} \rangle e_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$.

证明. 令 $M \triangleq \overline{\operatorname{span}\{e_k\}_{k=1}^{\infty}}$, $\tilde{M} \triangleq \overline{\operatorname{span}\{e_{\sigma(k)}\}_{k=1}^{\infty}} \Rightarrow M = \tilde{M}$

$\Rightarrow LHS = P_{\tilde{M}} x = P_M x = RHS.$ □

定理 1.5.12. H−Hilbert 空间, $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I} - O.N.S.$, $\forall x \in H$, $\sum_{\alpha \in I} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha \in H$, 且 $\|x - \sum_{\alpha \in I} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\alpha \in I} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2$.

证明. 令 $\{\alpha \in I \mid \langle \alpha, e_\alpha \rangle \neq 0\} = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \Rightarrow \sum_{\alpha \in I} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_{\alpha_k} \rangle e_{\alpha_k}$.

$\|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_{\alpha_k} \rangle e_{\alpha_k}\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle \alpha, e_{\alpha_k} \rangle|^2$

$\stackrel{n \to \infty}{\Rightarrow} \|x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_{\alpha_k} \rangle e_{\alpha_k}\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \alpha, e_{\alpha_k} \rangle|^2$ (Parseval Identity, P.I.). □

定理 1.5.13. H−Hilbert 空间, $S = \{e_\alpha\}_{\alpha \in I} - O.N.S.$, 则 S 是 $O.N.B. \Leftrightarrow S^\perp = \{0\}$ (完备) $\Leftrightarrow \forall x \in H$, $\sum_{\alpha \in I} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2 = \|x\|^2$.

证明. (1) $O.N.B. \Rightarrow P.I.$ 由前一 Thm 显然.

(2) $P.I. \Rightarrow$ 完备. 假设 $S^\perp \neq \{0\} \Rightarrow \exists x_0 \neq 0$, $s.t.$ $\langle x_0, e_\alpha \rangle = 0$, $\forall \alpha \in I$

$\Rightarrow \sum_{\alpha \in I} |\langle x_0, e_\alpha \rangle|^2 = 0 \stackrel{P.I.}{\Rightarrow} \|x_0\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, 矛盾.

(3) 完备 $\Rightarrow O.N.B.$. 假设 $S^\perp = \{0\}$, 但 S 不是 O.N.B.

$\Rightarrow \exists x_0 \in H$, $s.t.$ $\sum_{\alpha \in I} \langle x_0, e_\alpha \rangle e_\alpha \neq x_0$.

$$\langle x_0 - \sum_{\alpha \in I} \langle x_0, e_\alpha \rangle e_\alpha, e_\beta \rangle = \langle x_0, e_\beta \rangle - \langle x_0, e_\beta \rangle = 0$$

$\Rightarrow x_0 - \sum_{\alpha \in I} \langle x_0, e_\alpha \rangle e_\alpha \perp S$, 这与 S 完备矛盾. □

推论 1.5.14. 任一 Hilbert 空间一定有 O.N.B..

例 1.5.3. l^2, $e_n=(0,\dots,0,1,0,\dots)$, $n=1,2,\dots$, $(\{e_n\}_{n=1}^{\infty})^{\perp}=\{0\}$ (由 $\forall x=(x_1,x_2,\dots)\in l^2$, $\langle x,e_n\rangle=x_n$) $\Rightarrow \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 l^2 的 O.N.B..

注. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是 l^2 的 Hamel 基. (不能写成有限的线性组合)

定理 1.5.15. (Gram-Schmidt 正交化) $(\mathcal{X},\langle\cdot,\cdot\rangle)$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 线性无关 $\Rightarrow \exists\{e_n\}_{n=1}^{\infty}O.N.S.$, $s.t.\ \forall n$, $\text{span}\{e_n\}_{n=1}^{n}=\text{span}\{x_k\}_{k=1}^{n}$.

证明. 令 $y_1\triangleq x_1$, $e_1\triangleq\frac{y_1}{\|y_1\|}$, $y_2\triangleq x_2-\langle x_2,e_1\rangle e_1$, $e_2\triangleq\frac{y_2}{\|y_2\|},\dots,$

$y_n\triangleq x_n-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\langle x_n,e_k\rangle e_k$, $e_n\triangleq\frac{y_n}{\|y_n\|}$, 则 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 即为所求. □

定理 1.5.16. $H-$Hilbert 空间, H 可分 $\Leftrightarrow H$ 有至多可数的 O.N.B..

证明. "$\Rightarrow$" Case 1 $\dim H<\infty$. 平凡 (Hamel $\overset{G-S}{\Rightarrow}$ O.N.B.).

Case 2 $\dim H=\infty$. H 可分 $\Rightarrow\exists A=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset H$, $s.t.\ \bar{A}=H$.

Claim. $\exists B=\{y_k\}_{k=1}^{\infty}\subset A$ 线性无关, $s.t.$ $\text{span}B=\text{span}A$:

取 $x_{n_1}=x_1$, $x_{n_2}\in A$, $s.t.\ x_{n_2}\notin\text{span}\{x_{n_1}\},\dots$, $x_{n_k}\in A$, $s.t.\ x_{n_k}\notin\text{span}\{x_{n_j}\}_{j=1}^{k-1}$.

令 $y_k=x_{n_k}$, $k=1,2,\cdots\Rightarrow\forall x_k\in A$, $x_k\in\text{span}\{y_1,\dots,y_k\}$

$\Rightarrow A\subset\text{span}B\Rightarrow\text{span}B=\text{span}A$.

下证 $\#B=\infty$. $\overline{\text{span}B}=\overline{\text{span}A}=H$, 如果 $\#B<\infty$

$\Rightarrow\text{span}B$ 是 H 的有限维子空间, 从而是闭子空间, 与 $\overline{\text{span}B}=H$ 矛盾.

对 B 做 G-S 正交化 $\Rightarrow$ O.N.S. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, $s.t.$ $\text{span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}=\text{span}A$

$\Rightarrow\overline{\text{span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}}=\overline{\text{span}A}=H\Rightarrow(\{e_k\}_{k=1}^{\infty})^{\perp}=\{0\}\Rightarrow\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 O.N.B..

"$\Leftarrow$" 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 的 O.N.B.,

令 $M\triangleq\text{span}^{\mathbb{Q}}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\triangleq\{\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\mid\lambda\in\mathbb{Q}+i\mathbb{Q},\ k=1,2,\dots,n,\ n\in\mathbb{N}^*\}$.

Claim 1. M 可数: 它与 $\bigcup\limits_{\substack{I\subset\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\\ \#I<\infty}}(\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})^{\#I}$ 一一对应.

Claim 2. $\overline{M}=H$: $\forall x\in H,\ x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n$,

$\forall\varepsilon>0,\ \forall n,\ \exists\alpha_n\in\mathbb{Q}+i\mathbb{Q},\ s.t.\ |\langle x,e_n\rangle-\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$

$\Rightarrow\|\sum\limits_{n=1}^{N}\langle x,e_n\rangle e_n-\sum\limits_{n=1}^{N}\alpha_ne_n\|^2=\sum\limits_{n=1}^{N}|\langle x,e_n\rangle-\alpha_n|^2<\frac{\varepsilon^2}{4},\ \forall N.$

当 N 充分大, $\|x-\sum\limits_{n=1}^{N}\langle x,e_n\rangle e_n\|<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow$ 当 N 充分大, $|x-\sum\limits_{n=1}^{N}\alpha_ne_n|\leqslant\varepsilon.$ □

例 1.5.4. (不可分的 Hilbert 空间) $\mu-$ 计数测度,

$L^2(\mathbb{R},\mu)\triangleq\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\mid f$在至多可数个点处非零, 且 $\int|f|^2\,d\mu=\sum\limits_{t\in\mathbb{R}}|f(t)|^2<\infty\}$,

$$\langle f,g\rangle\triangleq\sum_{t\in\mathbb{R}}f(t)\overline{g(t)},\ e_r\triangleq\begin{cases}1, & t=r\\ 0, & t\neq r\end{cases},\ \{e_r\}_{r\in\mathbb{R}}\text{ 是 }L^2(\mathbb{R},\mu)\text{ 的 O.N.B..}$$

Q: 分类可分的 Hilbert 空间.

定义 1.5.9. $(\mathcal{X}_1,\langle\cdot,\cdot\rangle_1)$, $(\mathcal{X}_2,\langle\cdot,\cdot\rangle_2)$, 如果存在代数同构 $T:\mathcal{X}_1\to\mathcal{X}_2$, $s.t.\ \langle Tx_1,Tx_2\rangle_2,=\langle x_1,x_2\rangle_1,\ \forall x,y\in\mathcal{X}_1$, 则称 $\mathcal{X}_1$ 和 $\mathcal{X}_2$ 作为内积空间同构, 记为 $\mathcal{X}_1\backsimeq\mathcal{X}_2$.

定理 1.5.17. (1) n 维 Hilbert 空间 $\backsimeq\mathbb{K}^n$; (2) 无穷维可分 Hilbert 空间 $\backsimeq l^2$.

证明. (2) 设 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 H 的 O.N.B., 定义 $T:H\to l^2,\ x\mapsto\{\langle x,e_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$,

1° 线性; 2° 等距, $\|Tx\|_2=(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle|^2)^{\frac{1}{2}}=\|x\|$;

3° 单射, by 2°, 只有零向量才能映成零向量;

4° 满射, $\forall a\in l^2$, $\|\sum\limits_{k=n}^{m}a_ke_k\|^2=\sum\limits_{k=n}^{m}|a_k|^2\to0\ as\ n,m\to\infty\overset{\text{完备}}{\Rightarrow}\sum\limits_{k=1}^{n}a_ke_k\to x\in H$,

$i.e.\ x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_ke_k,\ \langle x,e_k\rangle=a_k,\ k=1,2,\cdots\Rightarrow Tx=a.$

5° $\langle Tx,Ty\rangle=\langle x,y\rangle,\ \forall x,y\in H$,

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle&=\langle\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k,\sum_{j=1}^{\infty}\langle y,e_j\rangle e_j\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle\overline{\langle y,e_j\rangle}\delta_{kj}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle\overline{\langle y,e_k\rangle}=\langle Tx,Ty\rangle_2.\end{aligned}$$

□

例 1.5.5. 单位圆周 $\mathbb{T} \triangleq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, 对 $\mathbb{T}$ 上的函数 F, $f(t) \triangleq F(e^{2\pi it})$, $t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ 是 $\mathbb{R}$ 上以 1 为周期的周期函数, $F \leftrightarrow f$, $\mathbb{T} \leftrightarrow [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

令 $e_k(t) \triangleq e^{2\pi ikt}$, $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$, $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e_k(t)\overline{e_j(t)}\,dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i(k-j)t}\,dt = \delta_{kj}$,

$\Rightarrow \{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{T})$ 中 O.N.S..

对 $f \in L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$, $\hat{f}(k) \triangleq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)e^{-2\pi ikt}\,dt = \langle f, e_k\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$ (Fourier 系数),

$f(x) \backsim \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{2\pi ikx} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, e_k\rangle e_k$.

Q: f 的 Fourier 级数是否收敛于 f? 逐点收敛? a.e. 收敛?

定理 1.5.18. $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$, $S_Nf(x) \triangleq \sum\limits_{k=-N}^{N} \hat{f}(k)e^{2\pi ikx}$, $\|S_Nf - f\|_2 \to 0\ as\ N \to \infty$.

证明. Idea of Pf. Thm $\Leftrightarrow \{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{T})$ 的 O.N.B. $\Leftrightarrow (\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}})^\perp = \{0\}$

$\Leftrightarrow \overline{\mathrm{span}\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}} = L^2(\mathbb{T})$, 约化为三角多项式在 $L^2(\mathbb{T})$ 中稠密.

$$\begin{aligned} S_Nf(x) &= \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k)e^{2\pi ikx} = \sum_{k=-N}^{N} [\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)e^{-2\pi ikt}\,dt]e^{2\pi ikx} \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)[\sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi ik(x-t)}]\,dt = (f * D_N)(x). \end{aligned}$$

Dini 核 $D_N(t) \triangleq \sum\limits_{k=-N}^{N} e^{2\pi ikt} = \frac{sin[(2N+1)\pi t]}{sin(\pi t)}$, 不是好核 ($\|D_N\|_1 \to \infty\ as\ N \to \infty$).

令 $\sigma_Nf \triangleq \frac{1}{N+1}\sum\limits_{k=0}^{N} S_kf = f * F_N$,

Fejer 核 $F_N(t) \triangleq \frac{1}{N+1}\sum\limits_{k=0}^{N} D_k(t) = \frac{1}{N+1}\frac{sin^2[(N+1)\pi t]}{sin^2(\pi t)}$ (是好核).

Lem. (i) $\|F_N\|_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F_N(t)\,dt = 1$; (ii) $\forall\delta > 0$, $\lim\limits_{N\to\infty} \int_{\delta<|t|<\frac{1}{2}} F_N(t)\,dt = 0$.

Pf. (ii) $\forall\delta > 0$, $0 \leqslant F_N(t) \leqslant \frac{1}{sin^2(\pi\delta)}\frac{1}{N+1} \to 0\ as\ n \to \infty$.

Thm. $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$, $\|\sigma_Nf - f\|_2 \to 0\ as\ N \to \infty$.

Rmk. $\sigma_Nf(x) = \sum\limits_{k=-N}^{N}(1 - \frac{|k|}{N})\hat{f}(k)e^{2\pi ikx}$, 由上一 Thm 知三角多项式稠密.

Lem. (Minkowski 积分不等式) 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\|\int_Y f(\cdot, y)\,dy\|_p \leqslant \int_Y \|f(\cdot, y)\|_p\,dy$,

即 $(\int_X |\int_Y f(x, y)\,dy|^p\,dx)^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_Y[\int_X |f(x, y)|^p\,dx]^{\frac{1}{p}}\,dy$.

Pf of Thm. $\forall\varepsilon>0$,

$$\begin{aligned}
\|\sigma_N f-f\|_2 &= \{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}[f(x-t)-f(x)]F_N(t)\,dt|^2\,dx\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\|f(\cdot,t)-f(\cdot)\|_2 F_N(t)\,dt \\
&= (\int_{|t|\leqslant\delta}+\int_{\delta<|t|<\frac{1}{2}})\|f(\cdot,t)-f(\cdot)\|_2 F_N(t)\,dt \\
&< \frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon\ with\ \delta\text{充分小},\ N\text{充分大},
\end{aligned}$$

前一项因为积分的绝对连续性, 后一项因为 $\|f(\cdot,t)-f(\cdot)\|_2\leqslant 2\|f\|_2$ 和 Fejer 核性质. □

第二章　线性算子与线性泛函

2.1　线性算子的概念

线性算子 = 线性映射.

定义 2.1.1. $\mathcal{X},\mathcal{Y}-$ 向量空间, 如果 $T:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$, $s.t.$ $T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty$, $\forall x,y\in\mathcal{X}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, 则称 T 是线性算子. 特别地, 如果 $\mathcal{Y}=\mathbb{K}$, 则称 T 是 $\mathcal{X}$ 上一个线性泛函.

例 2.1.1. (微分算子) $\Omega\overset{open}{\subset}\mathbb{R}^n$, $\mathcal{X}=\mathcal{Y}=C^\infty(\Omega)$, $T=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant k}a_\alpha\partial^\alpha$, $\partial^\alpha\triangleq\frac{\alpha^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$.

例 2.1.2. (积分算子) $\mathcal{X}=L^p(\Omega)$, $\mathcal{Y}=\{\Omega\text{上可测函数}\}$, $K(\cdot,\cdot)-\Omega\times\Omega$ 上可测函数, $(Tf)(x)\triangleq\int_\Omega K(x,y)\,dxdy$, $(\mathcal{F}f)(\xi)\triangleq\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-2\pi ix\xi}\,dx$ (Fourier 变换).

例 2.1.3. (非线性泛函) $f(u)\triangleq\int_\Omega u^2(x)\,dx$.

定义 2.1.2. $(\mathcal{X},\|\cdot\|_\mathcal{X})$, $(\mathcal{Y},\|\cdot\|_y)$, $T:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}-$ 线性算子, 如果 $\exists c>0$, $s.t.$ $\|Tx\|_y\leqslant c\|x\|_\mathcal{X}$, $\forall x\in\mathcal{X}$, 则称 T 有界.

注. T 有界 $\Leftrightarrow T$ 把有界集映为有界集. (HW. EX 2.1.1)

定理 2.1.1. $(\mathcal{X},\|\cdot\|_\mathcal{X})$, $(\mathcal{Y},\|\cdot\|_y)$, $T:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 线性,
T 有界 $\Leftrightarrow T$ 连续 $\Leftrightarrow T$ 在 0 连续.

证明. "有界 $\Rightarrow$ 连续" $\|x_n-x\|_\mathcal{X}\to0\Rightarrow\|Tx_n-Tx\|_y\leqslant c\|x_n-x\|_\mathcal{X}\to0$ as $n\to\infty$.

"连续 $\Rightarrow$ 在 0 连续" 显然.

"在 0 连续 $\Rightarrow$ 有界" 假设 T 无界, 则 $\forall n$, $\exists x_n \in \mathcal{X}$, $s.t.\ \|Tx_n\|_{\mathcal{Y}} > n\|x_n\|_{\mathcal{X}}$,

不妨设 $x_n \neq 0$, $\forall n$, 令 $\tilde{x}_n = \frac{1}{n}\frac{x_n}{\|x_n\|_{\mathcal{X}}} \Rightarrow \tilde{x}_n \to 0\ as\ n \to \infty$

$\overset{\text{在0连续}}{\Rightarrow} T\tilde{x}_n \to 0\ as\ n \to \infty$, 但 $\|T\tilde{x}_n\|_{\mathcal{Y}} = \frac{\|Tx_n\|_{\mathcal{Y}}}{n\|x_n\|_{\mathcal{X}}} > 1$ 矛盾. □

定理 2.1.2. 有限维赋范空间之上的线性算子一定有界.

证明. (1) 设 $\mathcal{X} = \mathbb{K}^n$, $\mathcal{Y} = \mathbb{K}^m \Rightarrow Tx = Ax\ with\ A = (a_{ij})_{m\times n}$

$\Rightarrow \|Tx\|_{\mathbb{K}^m} = (\sum\limits_{i=1}^m |\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j|^2)^{\frac{1}{2}} \overset{C-S}{\leqslant} [\sum\limits_{i=1}^m(\sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|^2)(\sum\limits_{j=1}^n |x_j|^2)]^{\frac{1}{2}} = [\sum\limits_{i=1}^m\sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|^2]^{\frac{1}{2}}\|x\|_{\mathbb{K}^n}$.

(2) 一般情形, $\mathcal{X} \xrightarrow{T} \mathcal{Y}$, $\mathcal{X} \xrightarrow{\text{同构}\varphi} \mathbb{K}^n$, $\mathcal{Y} \xrightarrow{\text{同构}\psi} \mathbb{K}^m$, $\mathbb{K}^n \xrightarrow{\tilde{T}} \mathbb{K}^m \Rightarrow \tilde{T} = \psi \circ T \circ \varphi^{-1}$ 有界 □

作业. (1) $\dim \mathcal{X} < \infty \Rightarrow$ 线性算子 $T: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 有界;

(2) 如果 $\dim \mathcal{X} = \infty$, $\mathcal{Y} \neq \{0\}$, 则一定存在无界线性算子 $T: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.

例 2.1.4. $\mathcal{X} = C^1[0,1]$, $\mathcal{Y} = C[0,1]$, 都赋以一致范数, $T = \frac{d}{dt}$ 是无界的.

令 $u_n(t) = t^n$, $t \in [0,1]$, $n = 1, 2, \cdots \Rightarrow \|u_n\| = 1$, $\|Tu_n\| = n \Rightarrow \frac{\|Tu_n\|}{\|u_n\|} = n \to \infty$.

定义 2.1.3. $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \triangleq \{\mathcal{X}\text{到}\mathcal{Y}\text{的有界线性算子}\}$, $\mathcal{L}(\mathcal{X}) \triangleq \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{X})$,

$\mathcal{X}^* \triangleq \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathbb{K}) = \{\mathcal{X}\text{上连续线性泛函}\}$.

对 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, 令 $\|T\|_{\mathcal{X}\to\mathcal{Y}} \triangleq \sup\limits_{\substack{x\in\mathcal{X}\\x\neq 0}} \frac{\|Tx\|_{\mathcal{Y}}}{\|x\|_{\mathcal{X}}} = \sup\limits_{\substack{x\in\mathcal{X}\\\|x\|_{\mathcal{X}}=1}} \|Tx\|_{\mathcal{Y}}$, 称为 T 的算子范数.

例 2.1.5. $H-$Hilbert 空间, $M-$ 闭子空间, $P_M - H$ 到 M 的正交投影, $\|P_M\| = 1$.

$\|x\|^2 = \|P_M x\|^2 + \|x - P_M x\|^2 \Rightarrow \|P_M\| \leqslant 1$ (由定义),

又 $P_M x = x$, $\forall x \in M \Rightarrow \|P_M\| \geqslant \sup\limits_{\substack{x\in M\\x\neq 0}} \frac{\|Tx\|_{\mathcal{Y}}}{\|x\|_{\mathcal{X}}} = 1 \Rightarrow \|P_M\| = 1$.

定理 2.1.3. $(\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y}), \|\cdot\|_{\mathcal{X}\to\mathcal{Y}})$ 是赋范空间, 进而

1° 如果 $\mathcal{Y}$ 完备, 则 $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 完备; 2° $\mathcal{X}^*$ 是 Banach 空间.

证明. 1° 设 $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 中的 Cauchy 列

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $s.t.\ \|T_n - T_m\| < \varepsilon$, $\forall n, m \geqslant N$.

$\Rightarrow \forall x \in \mathcal{X},\ \|T_n x - T_m x\| \leqslant \|T_n - T_m\|\|x\| < \|x\|\varepsilon\ (*)$

$\Rightarrow \{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{Y}$ 中 Cauchy 列 $\overset{\mathcal{Y}\text{完备}}{\Rightarrow} \exists y \in \mathcal{Y},\ s.t.\ \|T_n x - y\| \to 0\ as\ n \to \infty.$

定义映射 $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y},\ x \mapsto y = \lim\limits_{n\to\infty} T_n x,$

(1) 线性; (2) 有界; (3) $\|T_n - T\| \to 0\ as\ n \to \infty.$

Pf of (2). 令 $(*)$ 中 $m \to \infty,\ \|T_n x - Tx\| \leqslant \varepsilon\|x\|,\ \forall x \in \mathcal{X},\ \forall n \geqslant N$

$\Rightarrow \|Tx\| \leqslant \|T_N x\| + \varepsilon\|x\| \leqslant (\|T_N\| + \varepsilon)\|x\|.$

Pf of (3). $\|T_n - T\| = \sup\limits_{\substack{x\in\mathcal{X}\\ x\neq 0}} \frac{\|T_n x - Tx\|}{\|x\|} \leqslant \varepsilon,\ \forall n \geqslant N.$ □

2.2 Riesz 表示定理及其应用

$H-$Hilbert 空间, 设 $y \in H$, 令 $f_y(x) \triangleq \langle x, y\rangle,\ x \in H \overset{C-S}{\Rightarrow} |f_y(x)| = |\langle x, y\rangle| \leqslant \|y\|\|x\| \Rightarrow f_y \in H^*$, 且 $\|f_y\| \leqslant \|y\|$. 另一方面, $|f_y(y)| = \|y\|^2 \Rightarrow \frac{|f_y(y)|}{\|y\|} = \|y\| \Rightarrow \|f_y\| = \|y\|$.

Q: 是否 $\forall f \in H^*,\ \exists y_f \in H,\ s.t.\ \langle x, y_f\rangle,\ x \in H$?

定理 2.2.1. (Riesz 表示定理) $H-$Hilbert 空间, $\forall f \in H^*,\ \exists! y_f \in H,\ s.t.\ f(x) = \langle x, y_f\rangle,\ x \in H$, 且 $\|y_f\| = \|f\|$.

证明. 如果 $f = 0$, 则 $y_f = 0$.

如果 $f \neq 0 \Rightarrow \ker(f) \neq H$, 且为闭子空间 (由 f 连续)

$\Rightarrow \exists y_0 \in \ker(f)^{\perp}\ with\ \|y_0\| = 1,\ f(x - \frac{f(x)}{f(y_0)}y_0) = f(x) - \frac{f(x)}{f(y_0)}f(y_0) = 0,\ \forall x \in H$

$\Rightarrow x - \frac{f(x)}{f(y_0)}y_0 \in \ker(f) \Rightarrow \langle x - \frac{f(x)}{f(y_0)}y_0, y_0\rangle = 0 \Rightarrow \langle x, y_0\rangle = \frac{f(x)}{f(y_0)}\|y_0\|^2 = \frac{f(x)}{f(y_0)}$

$\Rightarrow f(x) = f(y_0)\langle x, y_0\rangle = \langle x, \overline{f(y_0)}y_0\rangle,\ \forall x \in H$, 则 $y_f = \overline{f(y_0)}y_0$.

唯一性. 如果 $y, z \in H,\ s.t.\ f(x) = \langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle,\ \forall x \in H$

$\Rightarrow \langle x, y - z\rangle = 0,\ \forall x \in H \Rightarrow y - z = 0.$ □

推论 2.2.2. $J : H \to H^*,\ y \mapsto f_y,\ f_y(x) \triangleq \langle x, y\rangle,\ x \in H$ 是作为赋范空间的等距同构.

定理 2.2.3. H—Hilbert 空间, $a(\cdot,\cdot)-H$ 上共轭双线性函数,

如果 $\exists c>0,\ s.t.\ |a(x,y)|\leqslant c\|x\|\|y\|,\ \forall x,y\in H$,

则 $\exists! A\in\mathcal{L}(H),\ s.t.\ a(x,y)=\langle x,Ay\rangle,\ \forall x,y\in H$, 进而 $\|A\|=\sup\limits_{0\neq x,y\in H}\frac{|a(x,y)|}{\|x\|\|y\|}$.

证明. $\forall y\in H$, 令 $f_y(x)=a(x,y)\Rightarrow|f_y(x)|=|a(x,y)|\leqslant c\|y\|\|x\|,\ \forall x\in H$

$\Rightarrow f_y\in H^*$, 且 $\|f_y\|\leqslant c\|y\|\overset{Riesz}{\Rightarrow}\exists! z\in H,\ s.t.\ f_y(x)=\langle x,z\rangle,\ x\in H$, 且 $\|z\|=\|f_y\|$.

定义 $A:H\to H,\ y\mapsto z$, 1° 线性, 2° $\|Ay\|=\|z\|=\|f_y\|\leqslant c\|y\|$

$\Rightarrow A\in\mathcal{L}(H)$, 且 $\|A\|\leqslant c$, 特别地 $\|A\|\leqslant\sup\limits_{0\neq x,y\in H}\frac{|a(x,y)|}{\|x\|\|y\|}$.

另一方面, $|a(x,y)|=|\langle x,Ay\rangle|\overset{C-S}{\leqslant}\|x\|\|Ay\|\leqslant\|x\|\|A\|\|y\|$

$\Rightarrow\frac{|a(x,y)|}{\|x\|\|y\|}\leqslant\|A\|,\ \forall 0\neq x,y\in H\Rightarrow\|A\|\geqslant\sup\limits_{0\neq x,y\in H}\frac{|a(x,y)|}{\|x\|\|y\|}\Rightarrow\|A\|=\sup\limits_{0\neq x,y\in H}\frac{|a(x,y)|}{\|x\|\|y\|}$. □

2.3 纲与开映射定理

定义 2.3.1. $(\mathcal{X},d)$, $E\subset\mathcal{X}$, 如果 $\bar{E}$ 无内点, 则称 E 是疏集或无处稠密集 (nowhere dense).

例 2.3.1. $\mathbb{R}$ 中 $\mathbb{Q}$ 不是疏集, Cantor 集 $\mathcal{C}$ 是疏集.

定义 2.3.2. 第一纲集 $\triangleq$ 可数个疏集之并, 第二纲集 $\triangleq$ 非第一纲集, 剩余纲集 $\triangleq$ 第一纲集的余集.

引理 2.3.1. (闭球套定理) 设 $(\mathcal{X},d)$ 完备, 一列闭球 $\{B_n\}_{n=1}^\infty$, $s.t.$ (1) $B_{n+1}\subset B_n$, $n=1,2,\dots$, (2) $\operatorname{diam}B\to 0\ as\ n\to\infty$, 则 $\bigcap\limits_{n=1}^\infty B_n=\{x_0\}\ for\ some\ x_0\in\mathcal{X}$.

证明. 记 $B_n\triangleq\overline{B(x_n,r_n)}$, $n=1,2,\dots\forall n,m\in\mathbb{N}^*$, 不妨设 $n\geqslant m$, $x_n\in B_n\subset B_m$

$$\Rightarrow d(x_n,x_m)<r_m\to 0\ as\ n\to\infty$$

$\Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列 $\overset{\mathcal{X}\text{完备}}{\Rightarrow} \exists x_0 \in \mathcal{X},\ s.t.\ d(x_n, x_0) \to 0\ as\ n \to \infty$

$$\overset{B_m\text{闭}}{\Rightarrow}\ x_0 \in B_m,\ \forall m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

设 $y \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow d(x_0, y) \leqslant d(x_0, x_n) + d(x_n, y) < 2r_n \to 0\ as\ n \to \infty \Rightarrow y = x_0$. □

定理 2.3.2. (Baire 纲定理, BCT = Baire Category Thm) 完备度量空间是第二纲的.

证明. 设 $(\mathcal{X}, d)$ 完备, 假设 $\mathcal{X}$ 是第一纲的 $\Rightarrow \mathcal{X} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\ with\ E_n$ 疏.

任取 $B(x_0, r_0) \overset{E_1\text{疏}}{\Rightarrow} \mathrm{int}\overline{E_1} = \phi \Rightarrow \exists x_1 \in B(x_0, r_0) \backslash \overline{E_1} \Rightarrow \mathrm{dist}(x_1, \overline{E_1}) > 0$,

取 $r_1 < \min\{1, \frac{1}{3}\mathrm{dist}(x_1, \overline{E_1})\}$, 且满足 $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0)$

$$\Rightarrow B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0),\ r_1 < 1,\ s.t.\ \overline{B(x_1, r_1)} \cap \overline{E_1} = \phi$$

$\overset{E_2\text{疏}}{\Rightarrow}\ \exists B(x_2, r_2) \subset B(x_1, r_1),\ r_2 < \frac{1}{2},\ s.t.\ \overline{B(x_2, r_2)} \cap \overline{E_2} = \phi,\ \ldots$

$$\overset{Lem}{\Rightarrow} \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n, r_n)} = \{x\}\ for\ some\ x \in \mathcal{X},$$

而 $\overline{B(x_n, r_n)} \cap \overline{E_n} = \phi \Rightarrow x \notin \overline{E_n} \Rightarrow x \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = X$, 这与 $x \in \mathcal{X}$ 矛盾. □

例 2.3.2. l^2 的 Hamel 基不可数.

证明. 假设存在 l^2 的一个 Hamel 基可数, 记 $B = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,

令 $X_n = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_n\} \Rightarrow X_n$ 是闭子空间 (有限维), 且 $l^2 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$

$\overset{BCT}{\Rightarrow}\ \exists n_0,\ s.t.\ X_{n_0}$ 有内点, 但有限维空间没有内点, 矛盾. □

作业. 1° 多项式全体构成的向量空间上赋以任何范数都不是 Banach 空间;

2° (BCT,2) 设 $(\mathcal{X}, d)$ 完备, $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ 开集, $\overline{U_n} = \mathcal{X},\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n = \mathcal{X}$.

纲推理

Weierstrass 的例子: 处处连续处处不可微的函数.

定理 2.3.3. (Banach, 1931) $\{C[0,1]$ 中处处不可微的函数$\}$ 是第二纲集.

证明. $\mathcal{X} \triangleq C[0,1]$, $A \triangleq \{C[0,1]$ 中处处不可微的函数$\}$, 只需证 $\mathcal{X}\backslash A$ 是第一纲集,

$\mathcal{X}\backslash A = \{f \in C[0,1] \mid f$ 至少在一点可微$\}$, 否则若 A 第一纲, 则 $\mathcal{X}$ 第一纲, 矛盾.

$A_n \triangleq \{f \in C[0,1] \mid \exists t \in [0, 1-\frac{1}{n}],\ s.t.\ \sup\limits_{h\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} |\frac{f(t+h)-f(t)}{h}| \leqslant n\},\ n = 1, 2, \dots$

$\Rightarrow \mathcal{X}\backslash A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, 只要证每个 A_n 是疏集.

1° A_n 闭. 设 $A_n \ni f_k \to f$ (即 $f_k \rightrightarrows f$),

对每个 f_k, $\exists t_k \in [0, 1-\frac{1}{n}]$, $s.t.$ $f_k(t_k+h) - f_k(t_k) \leqslant n|h|$, $\forall h \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$.

$\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ 有收敛子列, $t_{k_j} \to t_0 \in [0, 1-\frac{1}{n}]$,

$$\begin{aligned}|f(t_0+h)-f(t_0)| &\leqslant |f(t_0+h)-f(t_{k_j}+h)| + |f(t_{k_j}+h) - f_{k_j}(t_{k_j}+h)| \\ &\quad + |f_{k_j}(t_{k_j}+h) - f_{k_j}(t_{k_j})| + |f_{k_j}(t_{k_j}) - f(t_{k_j})| + |f(t_{k_j}) - f(t_0)| = I_1+I_2+I_3+I_4+I_5,\end{aligned}$$

f 连续 $\Rightarrow I_1,\ I_5 < \frac{|h|}{4}\varepsilon$, 当 j 充分大; $f_{k_j} \rightrightarrows f \Rightarrow I_2, I_4 < \frac{|h|}{4}\varepsilon$, 当 j 充分大.

而 $I_3 < n|h|$ (由 $f_{k_j} \in A_n$) $\Rightarrow |f(t_0+h)-f(t_0)| \leqslant (n+\varepsilon)|h|$

$\Rightarrow |f(t_0+h)-f(t_0)| \leqslant n|h| \Rightarrow f \in A_n$.

2° A_n 没有内点. 只需证 $\forall f \in A_n$, $\forall \varepsilon > 0$, $B(f,\varepsilon)\backslash A_n \neq \phi$.

首先, $\exists p \in P[0,1]$, $s.t.$ $\|f-p\| < \frac{\varepsilon}{2}$ (by density), 令 $M \triangleq \max\limits_{t\in[0,1]} |p'(t)|$.

其次, $\exists g \in C[0,1]$, $s.t.$ (1) 分段仿射 (ax+b); (2) $\|g\| < \frac{\varepsilon}{2}$; (3) g 每段斜率绝对值 $> M+n$

$\Rightarrow \|(p+g)-f\| \leqslant \|f-p\| + \|g\| < \varepsilon \Rightarrow p+g \in B(f,\varepsilon)$,

但 $p+g \notin A_n$ (除有限点处, $|(p+g)'(t)| \geqslant |g'(t)| - |p'(t)| > M+n-M = n$). □

$$\textbf{Banach 空间三大定理}\begin{cases}\text{Hahn-Banach} \\ \text{开映射定理}(\Leftrightarrow \text{闭图像定理} \Leftrightarrow \text{等价范数定理}) \\ \text{一致有界原理 (共鸣定理)}\end{cases}$$

定理 2.3.4. (一致有界原理 (共鸣定理), UBP = Uniform Boundedness Principle) $\mathcal{X}-$ *Banach* 空间, $\mathcal{Y}-$ 赋范空间, $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$,

$$\forall x \in \mathcal{X},\ \sup_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| < \infty \text{ (逐点有界)} \Rightarrow \sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| < \infty \text{ (一致有界)},$$

等价地, $\sup\limits_{T\in\mathcal{F}} \|T\| = \infty \Rightarrow \exists x_0 \in \mathcal{X}$, $s.t.$ $\sup\limits_{T\in\mathcal{F}} \|Tx_0\| = \infty$.

证明. 令 $F_n \triangleq \{x \in \mathcal{X} \mid \sup\limits_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| \leqslant n\} = \bigcap\limits_{T\in\mathcal{F}} \{x \in \mathcal{X} \mid \|Tx\| \leqslant n\}$, $n = 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow F_n$ 闭. $\forall x \in \mathcal{X}$, $\sup\limits_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| < \infty \Rightarrow \mathcal{X} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n \overset{BCT}{\Rightarrow} \exists n_0$, $s.t.$ F_{n_0} 有内点

$\Rightarrow \exists B(x_0, r) \subset F_{n_0} \Rightarrow \|T(x_0 + rx)\| \leqslant n_0$, $\forall x \in B(0,1)$, $\forall T \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow \|T(rx)\| \leqslant n_0 + \|Tx_0\| \leqslant 2n_0 \Rightarrow \|Tx\| \leqslant \frac{2n_0}{r}$, $\forall x \in B(0,1)$, $\forall T \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow \sup\limits_{T\in\mathcal{F}} \sup\limits_{x\in B(0,1)} \|Tx\| = \sup\limits_{T\in\mathcal{F}} \|T\| \leqslant \frac{2n_0}{r}$ (由习题 2.1.2, $\sup\limits_{x\in B(0,1)} \|Tx\| = \|T\|$). □

定理 2.3.5. (Banach-Steinhauss) $\mathcal{X}$—Banach 空间, $\mathcal{Y}$— 赋范空间.
T, $T_n \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $n = 1, 2, \ldots$, $M \overset{dense}{\subset} \mathcal{X}$,

$$T_n x \to Tx,\ \forall x \in \mathcal{X} \Leftrightarrow \begin{cases} \sup\limits_n \|T_n\| < \infty \\ T_n x \to Tx,\ \forall x \in M \end{cases}.$$

证明. "$\Rightarrow$" $\forall x \in \mathcal{X}$, $T_n x \to Tx \Rightarrow \forall x \in \mathcal{X}$, $\sup\limits_n \|T_n x\| < \infty$ (收敛列有界)
$\overset{UBP}{\Rightarrow} \sup\limits_n \|T_n\| < \infty$. 另一个平凡.
"$\Leftarrow$" 记 $C \triangleq \sup\limits_n \|T_n\|$, $\forall x \in \mathcal{X}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y \in M$, $s.t.$ $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{4(\|T\|+C)}$.

$$\|T_n x - Tx\| \leqslant \|T_n x - T_n y\| + \|T_n y - Ty\| + \|Ty - Tx\| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,\ \text{当 } n \text{ 充分大},$$

上式成立是因为 $\|T_n x - T_n y\| \leqslant C\|x - y\|$, $T_n y \to Ty$, $\|Ty - Tx\| \leqslant \|T\|\|x - y\|$. □

定理 2.3.6. $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$—Banach 空间. $T_n \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $n = 1, 2, \ldots$, 如果 $\forall x \in \mathcal{X}$, $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ 存在, 定义 $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$, 则 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, 且 $\|T\| \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \|T_n\|$.

证明. (HW, EX2.3.7) □

$S_n f(x) \triangleq \sum\limits_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$, $\hat{f}(k) \triangleq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) e^{-2\pi i k t}\, dt$.

定理 2.3.7. (Du Bois-Reymond, 1876) $\exists f \in C(\mathbb{T})$, $s.t.$ $\{S_n f(0)\}_{n=1}^{\infty}$ 发散.

证明. Dini 核 $D_n(t) \triangleq \sum\limits_{k=-n}^{n} e^{2\pi ikt} = \frac{sin[(2n+1)\pi t]}{sin(\pi t)}$,

$S_nf(x) = (f * D_n)(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)D_n(x-t)\,dt$.

令 $T_n : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto S_nf(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)D_n(-t)\,dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)D_n(t)\,dt$

$\Rightarrow |T_nf| = |\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)D_n(t)\,dt| \leqslant \|D_n\|_1\|f\| \Rightarrow T_n \in C(\mathbb{T})^*$, 且 $\|T_n\| \leqslant \|D_n\|_1$.

Claim. $\|T_n\| = \|D_n\|_1$ (只要证 $\|T_n\| \geqslant \|D_n\|_1$).

D_n 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 内只有有限个零点 $\Rightarrow \mathrm{sgn}D_n$ 只有有限个间断点

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists g_\varepsilon \in C(\mathbb{T}),\ s.t.$ (1) 分段仿射, (2) $\|g\| = 1$,

(3) $g_\varepsilon = \mathrm{sgn}D_n\ on\ [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\backslash I_\varepsilon\ with\ m(I_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{4n+3}$.

$$|T_ng_\varepsilon| = |\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_n(t)g_\varepsilon(t)\,dt| \geqslant \int\limits_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\backslash I_\varepsilon} |D_n(t)|\,dt - \int\limits_{I_\varepsilon} |D_n(t)|\,dt$$

$$\geqslant \|D_n\|_1 - 2\int\limits_{I_\varepsilon} |D_n(t)|\,dt > \|D_n\|_1 - \varepsilon$$

$\Rightarrow \|T_n\| \geqslant \frac{|T_ng_\varepsilon|}{\|g_\varepsilon\|} > \|D_n\|_1 - \varepsilon \Rightarrow \|T_n\| \geqslant \|D_n\|_1$.

$$\|D_n\|_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\frac{sin[(2n+1)\pi t]}{sin(\pi t)}|\,dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}} |\frac{sin[(2n+1)\pi t]}{sin(\pi t)}|\,dt$$

$$\geqslant 2\int_0^{\frac{1}{2}} |\frac{sin[(2n+1)\pi t]}{\pi t}|\,dt \overset{x=(2n+1)\pi t}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}(2n+1)} |\frac{sinx}{x}|\,dx \to \infty\ as\ n \to \infty$$

$\Rightarrow \sup\limits_n \|T_n\| = \infty \overset{UBP}{\Rightarrow} \exists f \in C(\mathbb{T}),\ s.t.\ \sup\limits_n |T_nf| = \sup\limits_n |S_nf(0)| = \infty$

$\Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} |S_nf(0)| = \infty \Rightarrow \{S_nf(0)\}_{n=1}^{\infty}$ 发散. □

Q: $Tx = y$, 如果 y 变化很小时, 解 x 是否变化很小 (解的稳定性)? $\Leftrightarrow T^{-1}$ 连续?

定理 2.3.8. (逆算子定理, IMT = Inverse Mapping Thm) $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$—Banach 空间, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, T 是双射 $\Rightarrow T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ ($\Rightarrow \mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 同构).

定理 2.3.9. (开映射定理, OMT) $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$—Banach 空间, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, T 是满射 $\Rightarrow T$ 是开映射, i.e. 把开集映为开集.

证明. 下证 "OMT $\Rightarrow$ IMT".

$f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 连续 $\Leftrightarrow \forall U \overset{open}{\subset} \mathcal{Y},\ f^{-1}(U) \overset{open}{\subset} \mathcal{X}$.

$T^{-1}:\mathcal{Y}\to\mathcal{X}$ 连续 $\Leftrightarrow \forall U \overset{open}{\subset} \mathcal{X},\ (T^{-1})^{-1}(U) \overset{open}{\subset} \mathcal{Y} \Leftrightarrow \forall U \overset{open}{\subset} \mathcal{X},\ T(U) \overset{open}{\subset} \mathcal{Y}$,

by OMT, $T(U) \overset{open}{\subset} \mathcal{Y},\ \forall U \overset{open}{\subset} \mathcal{X}$. □

引理 2.3.10. $\mathcal{X},\ \mathcal{Y}$–Banach 空间, $T\in\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, T 是满射

$$\Rightarrow \exists\delta>0,\ s.t.\ \delta B_{\mathcal{Y}} \overset{open}{\subset} T(B_{\mathcal{X}}),$$

$B_{\mathcal{X}},\ B_{\mathcal{Y}}$ 分别为 $\mathcal{X},\ \mathcal{Y}$ 中单位球.

证明. Step 1. $\exists r>0,\ s.t.\ rB_{\mathcal{Y}}\subset\overline{T(B_{\mathcal{X}})}$.

$\mathcal{X}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nB_{\mathcal{X}} \overset{T满}{\Rightarrow} \mathcal{Y}=T(\mathcal{X})=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}T(nB_{\mathcal{X}}) \Rightarrow \mathcal{Y}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\overline{T(nB_{\mathcal{X}})}$

$\overset{BCT}{\Rightarrow} \exists n_0,\ s.t.\ \overline{T(n_0B_{\mathcal{X}})}$ 有内点

$$\Rightarrow \exists B_{\mathcal{Y}}(y_0,t)\subset\overline{T(n_0B_{\mathcal{X}})}\ for\ some\ y_0\in\mathcal{Y},\ t>0.$$

令 $r=\frac{t}{n_0}$, Claim $rB_{\mathcal{Y}}\subset\overline{T(B_{\mathcal{X}})}$.

$\forall z\in rB_{\mathcal{Y}} \Rightarrow y_0+n_0z,\ y_0-n_0z\in B_{\mathcal{Y}}(y_0,t)\subset\overline{T(n_0B_{\mathcal{X}})}$

$\Rightarrow \exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ \{x_n'\}_{n=1}^{\infty}\subset n_0B_{\mathcal{X}},\ s.t.\ Tx_n\to y_0+n_0z,\ Tx_n'\to y_0-n_0z\ as\ n\to\infty$

$$\Rightarrow T\left(\frac{x_n-x_n'}{2n_0}\right)\to z\ as\ n\to\infty\ with\ \frac{x_n-x_n'}{2n_0}\in B_{\mathcal{X}}$$

$\Rightarrow$ Claim 成立.

Step 2. 令 $\delta=\frac{r}{3}$, 则 $\delta B_{\mathcal{Y}}\subset T(B_{\mathcal{X}})$ $(\forall y\in\delta B_{\mathcal{Y}},\ \exists x\in B_{\mathcal{X}},\ s.t.\ Tx=y)$ (逐次逼近法).

$\forall y\in\delta B_{\mathcal{Y}},\ 3y\in\overline{T(B_{\mathcal{X}})}$ (by Step 1) $\Rightarrow \exists\tilde{x}_1\in B_{\mathcal{X}},\ s.t.\ \|3y-T\tilde{x}_1\|_{\mathcal{Y}}<\delta$.

令 $x_1=\frac{1}{3}\tilde{x}_1\in\frac{1}{3}B_{\mathcal{X}} \Rightarrow \|y-Tx_1\|_{\mathcal{Y}}<\frac{\delta}{3}$, 令 $y_1\triangleq y-Tx_1 \Rightarrow 9y_1\in rB_{\mathcal{Y}}\subset\overline{T(B_{\mathcal{X}})}$

$\Rightarrow \exists x_2\in\frac{1}{3^2}B_{\mathcal{X}},\ s.t.\ \|y_1-Tx_2\|_{\mathcal{Y}}<\frac{\delta}{3^2},\dots$.

令 $y_n=y_{n-1}-Tx_n\in\frac{\delta}{3^n}B_{\mathcal{Y}},\ \exists x_{n+1}\in\frac{1}{3^{n+1}}B_{\mathcal{X}},\ s.t.\ \|y_n-Tx_{n+1}\|_{\mathcal{Y}}<\frac{\delta}{3^{n+1}},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

$$\|\sum_{k=n+1}^{n+p}x_k\|_{\mathcal{X}}\leqslant\frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}<\frac{1}{2^n}$$

$\Rightarrow \{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{X}$ 中 Cauchy 列

$\overset{\mathcal{X}完备}{\Rightarrow} \exists x\in\mathcal{X},\ s.t.\ \sum\limits_{k=1}^{n}x_k\to x\ as\ n\to\infty,$

且 $\|x\|_{\mathcal{X}} \leqslant \|x - \sum_{k=1}^{N} x_k\|_{\mathcal{X}} + \|\sum_{k=1}^{N} x_k\|_{\mathcal{X}} < 1$, 当 N 充分大 (由上可知第二项恒小于 $\frac{1}{2}$)

$\Rightarrow x \in B_{\mathcal{X}}$, 且 $T(\sum_{k=1}^{n} x_k) \to Tx\ as\ n \to \infty$.

$$\frac{\delta}{3^n} \geqslant \|y_n\|_{\mathcal{Y}} = \|y_{n-1} - Tx_n\|_{\mathcal{Y}} = \cdots = \|y - T(x_1 + \cdots + x_n)\|_{\mathcal{Y}}$$

$\Rightarrow T(\sum_{k=1}^{n} x_k) \to y\ as\ n \to \infty \Rightarrow Tx = y.$ □

证明. 下证 OMT.

设 $U \overset{open}{\subset} \mathcal{X}$, 来证明 $T(U) \overset{open}{\subset} \mathcal{Y}$. $\forall y \in T(U)$, $\exists x \in U$, $s.t.\ Tx = y$.

令 $V \triangleq U - x \triangleq \{z - x \mid z \in U\}$, $0_{\mathcal{X}}$ 是 V 的内点 $\Rightarrow tB_{\mathcal{X}} \subset V$ $for\ some\ t > 0$

$\overset{Lem}{\Rightarrow} \exists \delta > 0,\ s.t.\ 0_{\mathcal{Y}} \in \delta B_{\mathcal{Y}} \subset T(B_{\mathcal{X}}) \subset \frac{1}{t} T(V)$

$\Rightarrow 0_{\mathcal{Y}}$ 是 $T(V)$ 的内点 $\Rightarrow y$ 是 $T(U) = T(V) + Tx = T(V) + y$ 的内点. □

定理 2.3.11. (Lax-Milgram) H—Hilbert 空间, 如果共轭双线性函数 $a : H \times H \to \mathbb{K}$,

- (1) (连续) $\exists c > 0,\ s.t.\ |a(x, y)| \leqslant c\|x\|\|y\|,\ \forall x, y \in H$,
- (2) (coersive, 强制) $\exists \delta > 0,\ s.t.\ a(x, x) \geqslant \delta \|x\|^2,\ \forall x \in H$.

则 $\exists! A \in \mathcal{L}(H),\ s.t.$

- (1) $a(x, y) = \langle x, Ay \rangle,\ \forall x, y \in H$ (Riesz 表示定理),
- (2) $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, 且 $\|A^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\delta}$.

证明. $1°$ A 单. 设 $Ay = 0 \Rightarrow 0 = \langle y, Ay \rangle = a(y, y) \geqslant \delta \|y\|^2 \Rightarrow y = 0$.

$2°$ A 满. Step 1. $\mathrm{Ran}(A)$ 闭.

设 $\mathrm{Ran}(A) \ni Ax_n \to y\ as\ n \to \infty$,

$$\delta \|x_n - x_m\|^2 \leqslant a(x_n - x_m, x_n - x_m) = \langle x_n - x_m, Ax_n - Ax_m \rangle \overset{C-S}{\leqslant} \|x_n - x_m\| \|Ax_n - Ax_m\|$$

$\Rightarrow \|x_n - x_m\| \leqslant \frac{1}{\delta} \|Ax_n - Ax_m\| \to 0\ as\ n, m \to \infty$

$\Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列. 设 $x_n \to x \in H \Rightarrow Ax_n \to Ax$ (由连续),

而 $Ax_n \to y \Rightarrow y = Ax \in \mathrm{Ran}(A)$.

Step 2. $\mathrm{Ran}(A) = H$.

$H = \mathrm{Ran}(A) \oplus \mathrm{Ran}(A)^{\perp}$, 只需证 $\mathrm{Ran}(A)^{\perp} = \{0\}$.

设 $\langle y, Ax\rangle = 0,\ \forall x \in H \Rightarrow a(y,x) = 0,\ \forall x \in H \Rightarrow 0 = a(y,y) \geqslant \delta\|y\|^2 \Rightarrow y = 0.$

现在, By IMT, $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, 且

$$\delta\|x\|^2 \leqslant a(x,x) = \langle x, Ax\rangle \overset{C-S}{\leqslant} \|x\|\|Ax\|,\ \forall x \in H$$

$\Rightarrow \|x\| \leqslant \frac{1}{\delta}\|Ax\|,\ \forall x \in H \overset{A\text{双射}}{\Rightarrow} \|A^{-1}y\| \leqslant \frac{1}{\delta}\|y\|,\ \forall y \in H \Rightarrow \|A^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\delta}.$ □

定义 2.3.3. $\mathcal{X}-$ 向量空间, $\|\cdot\|_1,\ \|\cdot\|_2 - \mathcal{X}$ 上两个范数, 如果 $\exists c > 0,\ s.t.\ \|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2,\ \forall x \in \mathcal{X}$, 则称 $\|\cdot\|_2$ 强于 $\|\cdot\|_1$, 记为 $\|\cdot\|_1 \lesssim \|\cdot\|_2$.

如果 $\exists c > 1,\ s.t.\ \frac{1}{c}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant c\|x\|_1,\ \forall x \in \mathcal{X}$, 则称两范数等价, 记为 $\|\cdot\|_1 \simeq \|\cdot\|_2$.

定理 2.3.12. (等价范数定理) $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_1),\ (\mathcal{X}, \|\cdot\|_2)-$Banach 空间,

$$\|\cdot\| \lesssim \|\cdot\|_2 \Rightarrow \|\cdot\|_1 \simeq \|\cdot\|_2.$$

证明. $\|\cdot\|_1 \lesssim \|\cdot\|_2 \Leftrightarrow \exists c > 0,\ s.t.\ \|\mathrm{Id}(x)\|_1 \leqslant c\|x\|_2,\ \forall x \in \mathcal{X}$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Id} \in \mathcal{L}((\mathcal{X}, \|\cdot\|_2), (\mathcal{X}, \|\cdot\|_1))$$

$\overset{IMT}{\Rightarrow} \mathrm{Id}^{-1} \in \mathcal{L}((\mathcal{X}, \|\cdot\|_1), (\mathcal{X}, \|\cdot\|_2)) \Rightarrow \exists c' > 0,\ s.t.\ \|x\|_2 \leqslant c'\|x\|_1,\ \forall x \in \mathcal{X}$

$\Rightarrow \frac{1}{c}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant c'\|x\|_1,\ \forall x \in H.$ □

闭图像定理 (CGT = Closed Graph Thm)

定义 2.3.4. $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}}),\ (\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}}),\ \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \triangleq \{(x,y) \mid x \in \mathcal{X},\ y \in \mathcal{Y}\},\ \|(x,y)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \triangleq \|x\|_{\mathcal{X}} + \|y\|_{\mathcal{Y}},\ (\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$ 称为乘积空间, $\mathcal{X},\ \mathcal{Y}$ 完备 $\Rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ 完备.

定义 2.3.5. $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 线性, $\mathrm{Gr}(T) \triangleq \{(x, Tx) \mid x \in \mathrm{Dom}(T)\}$ 称为 T 的图像. 如果 $\mathrm{Gr}(T)$ 是 $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ 的闭子空间, 则称 T 是闭算子.

命题 2.3.1. T 是闭算子 $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Dom}(T) \ni x_n \to x \\ Tx_n \to y \end{cases}$ *implies* $\begin{cases} x \in \mathrm{Dom}(T) \\ y = Tx \end{cases}$
$\Leftrightarrow \mathrm{Gr(T)} \ni (x_n, Tx_n) \to (x, y)$ *implies* $(x, y) \in \mathrm{Gr}(T)$.

注. 闭算子的定义域 $\mathrm{Dom}(T)$ 不一定闭.

例 2.3.3. (无界闭算子) $T = \frac{d}{dt} : C[0,1] \to C[0,1]$, $\mathrm{Dom}(T) = C^1[0,1]$ (稠密, 不闭), T 是无界算子. 设 $\begin{cases} C^1[0,1] \ni u_n \to u \\ Tu_n = u_n' \to v \end{cases}$,

$$u_n(t) - u_n(0) = \int_0^t u_n'(s)\, ds \to \int_0^t v(s)\, ds,$$

又 $u_n(t) - u_n(0) \to u(t) - u(0) \Rightarrow u(t) = u(0) + \int_0^t v(s)\, ds \Rightarrow \begin{cases} u \in C^1[0,1] \\ u' = v \end{cases}$

命题 2.3.2. T 有界, $\mathrm{Dom}(T)$ 闭 $\Rightarrow T$ 闭 (HW, EX2.3.4(1)).

证明. $\forall x_n \to x$ *with* $x_n \in \mathrm{Dom}(T)$, $Tx_n \to y$,
由 $\mathrm{Dom}(T)$ 闭, 有 $x \in \mathrm{Dom}(T)$, 由 T 连续, 有 $Tx_n \to Tx$.

$$\|Tx - y\| \leqslant \|Tx - Tx_n\| + \|Tx_n - y\| \to 0 \ as\ n \to \infty$$

$\Rightarrow y = Tx \Rightarrow T$ 是闭算子. □

定理 2.3.13. (BLT = Bounded Linear Transformation) $\mathcal{X}-$ 赋范空间, $\mathcal{Y}-$Banach 空间, $\forall T \in \mathcal{L}(\mathrm{Dom}(T), \mathcal{Y})$, 可唯一保范延拓为 $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\overline{\mathrm{Dom}(T)}, \mathcal{Y})$ (*i.e.* $\tilde{T}|_{\mathrm{Dom}(T)} = T$ 且 $\|\tilde{T}\| = \|T\|$), 特别地, 如果 $\mathrm{Dom}(T) \overset{dense}{\subset} \mathcal{X}$, 则 T 可保范延拓为 $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

证明. $\forall x \in \overline{\mathrm{Dom}(T)}$, $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, *s.t.* $x_n \to x$

$$\Rightarrow \|Tx_n - Tx_m\| \leqslant \|T\| \|x_n - x_m\| \to 0 \ as\ n, m \to \infty$$

$\Rightarrow \{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{Y}$ 中 Cauchy 列 $\overset{\mathcal{Y}\text{完备}}{\Rightarrow}$ $\exists y \in \mathcal{Y}$, $s.t.\ Tx_n \to y\ as\ n \to \infty$.

定义映射 $\tilde{T} : \overline{\mathrm{Dom}(T)} \to \mathcal{Y}$, $x \mapsto y = \lim\limits_{n\to\infty} Tx_n$, 1° $\tilde{T}$ 良定, 线性;

$$2^\circ\ \|\tilde{T}x\| = \|y\| = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|T\|\|x_n\| = \|T\|\|x\|$$

$\Rightarrow \tilde{T} \in \mathcal{L}(\overline{\mathrm{Dom}(T)}, \mathcal{Y})$ 且 $\|\tilde{T}\| \leqslant \|T\|$. 另一方面,

$$\|\tilde{T}\| = \sup_{\substack{x\in\overline{\mathrm{Dom}(T)}\\ x\neq 0}} \frac{\|\tilde{T}x\|}{\|x\|} \geqslant \sup_{\substack{x\in\mathrm{Dom}(T)\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\|$$

$\Rightarrow \|\tilde{T}\| = \|T\|$. □

例 2.3.4. Fourier 变换, $\hat{f}(\xi) \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\,dx$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$L^1 \cap L^2 \overset{dense}{\subset} L^2$, $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$, $\forall f \in L^1 \cap L^2$ (Plancherel)

$\Rightarrow \mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ 可保范延拓为 $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$.

定理 2.3.14. (闭图像定理, CGT) $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$—Banach 空间, $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$— 闭线性算子, $\mathrm{Dom}(T)$ 闭 $\Rightarrow T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

证明. (用 IMT) $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Banach $\Rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ Banach,

$\mathrm{Gr}(T)$ 是 $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ 的闭子空间 $\Rightarrow \mathrm{Gr}(T)$ Banach, $\mathrm{Dom}(T)$ 闭 $\Rightarrow \mathrm{Dom}(T)$ Banach.

定义 $\Pi_1 : \mathrm{Gr}(T) \to \mathrm{Dom}(T)$, $(x, Tx) \mapsto x$, $\Pi_2 : \mathrm{Gr}(T) \to \mathcal{Y}$, $(x, Tx) \mapsto Tx$.

Π_1 是双射 $\overset{IMT}{\Rightarrow}$ Π_1^{-1} 有界 $\Rightarrow T = \Pi_2 \circ \Pi_1^{-1}$ 有界. □

证明. (用等价范数定理) $(\mathrm{Dom}(T), \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ 是 Banach 空间,

在 $\mathrm{Dom}(T)$ 上定义一个图像范数, $\|x\|_G \triangleq \|x\|_{\mathcal{X}} + \|Tx\|_{\mathcal{Y}}$, $x \in \mathrm{Dom}(T)$.

Claim. $(\mathrm{Dom}(T), \|\cdot\|_G)$ 完备. 设 $\|x_n - x_m\|_G \to 0\ as\ n, m \to \infty$

$\Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{X}$ 中 Cauchy 列, $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{Y}$ 中 Cauchy 列.

$\Rightarrow \exists x \in \mathcal{X}$, $s.t.\ x_n \to x$, $\exists y \in \mathcal{Y}$, $s.t.\ Tx_n \to y$ $\overset{Gr(T)\text{闭}}{\Rightarrow}$ $x \in \mathrm{Dom}(T)$, $y = Tx$

$$\Rightarrow \|x_n - x\|_G = \|x_n - x\|_{\mathcal{X}} + \|Tx_n - Tx\|_{\mathcal{Y}} \to 0\ as\ n \to \infty.$$

现在, $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} \lesssim \|\cdot\|_G$ $\overset{\text{等价范数}}{\Rightarrow}$ $\|\cdot\|_G \lesssim \|\cdot\|_{\mathcal{X}} \Rightarrow \exists c$, $s.t.\ \|Tx\|_{\mathcal{Y}} \leqslant \|x\|_G \leqslant c\|x\|_{\mathcal{X}} \Rightarrow T$ 有界. □

例 2.3.5. (Hellinger-Toeplitz) H—Hilbert 空间, 如果 $T : H \to H$ 自伴,

i.e. $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$, $x, y \in H$, 则 $T \in \mathcal{L}(H)$.

证明. 只需证明 T 是闭算子, 然后用 CGT. 设 $\begin{cases} x_n \to x \\ Tx_n \to y \end{cases}$,

$$\langle z, Tx\rangle = \langle Tz, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tz, x_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle z, Tx_n\rangle = \langle z, y\rangle, \ \forall z \in H$$

$\Rightarrow \langle z, Tx - y\rangle = 0, \ \forall z \in H \Rightarrow y = Tx \Rightarrow T$ 是闭算子. □

注. CGT 的妙处:

- 直接证明 T 有界 (连续), $\forall \{x_n\}$ *with* $x_n \to x \overset{?}{\Rightarrow} Tx_n \to Tx$ (证明收敛性);
- 用 CGT, 只需验证 T 是闭算子,

  $\mathrm{Dom}(T) \ni x_n \to x, \ Tx_n \to y \overset{?}{\Rightarrow} x \in \mathrm{Dom}(T), \ y = Tx$ (已知收敛性).

2.4 Hahn-Banach 定理

定义 2.4.1. $\mathcal{X}-$ 向量空间, 如果函数 $p : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, *s.t.*

- (正齐次性) $p(tx) = tp(x), \ \forall x \in \mathcal{X}, \ \forall t > 0$,
- (次可加性) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y), \ \forall x, y \in \mathcal{X}$,

则称 p 为 $\mathcal{X}$ 上一个次线性泛函.

如果 p 还满足齐次性, i.e. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \ \forall x \in \mathcal{X}, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$, 则称 p 是 $\mathcal{X}$ 上一个半范数.

注. 1° 次线性泛函一定是凸函数:

$$\forall \alpha \in [0, 1], \ p(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant p(\alpha x) + p((1-\alpha)y) = \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y);$$

2° 半范数非负: $\forall x \in \mathcal{X}, \ 2p(x) = p(x) + p(-x) \geqslant p(0) = 0$;

3° 如果半范数还满足 $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, 则它是范数.

定理 2.4.1. (HBT over $\mathbb{R}$) $\mathcal{X}-$ 实向量空间, $p-\mathcal{X}$ 上次线性泛函, $M-$ 子空间, $f-M$ 上线性泛函, $s.t.$ $f(x)\leqslant p(x)$, $\forall x\in M$, 则存在 $\mathcal{X}$ 上线性泛函 F, $s.t.$ (1) $F|_M=f$, (2) $F(x)\leqslant p(x)$, $\forall x\in\mathcal{X}$.

引理 2.4.2. 条件同上, 设 $x_0\in\mathcal{X}\backslash M$, $\tilde{M}=M\oplus\operatorname{span}\{x_0\}=\{x+\lambda x_0\mid x\in M,\ \lambda\in\mathbb{R}\}\Rightarrow\exists\tilde{M}$ 上线性泛函 $\tilde{f}$, $s.t.$ (1) $\tilde{f}|_M=f$, (2) $\tilde{f}(x)\leqslant p(x)$, $\forall x\in\tilde{M}$.

证明. $\forall x,y\in M$, $f(x)+f(y)=f(x+y)\leqslant p(x+y)\leqslant p(x-x_0)+p(y+x_0)$

$\Rightarrow f(x)-p(x-x_0)\leqslant p(y+x_0)-f(y)$

$$\Rightarrow \sup_{x\in M}[f(x)-p(x-x_0)]\leqslant\inf_{y\in M}[p(y+x_0)-f(y)]$$

$\Rightarrow\exists\beta\in\mathbb{R}$, $s.t.$ $f(x)-p(x-x_0)\leqslant\beta\leqslant p(y+x_0)-f(y)$, $\forall x,y\in M$ $(*)$.

定义 $\tilde{f}:\tilde{M}\to\mathbb{R}$, $x+\lambda x_0\mapsto f(x)+\lambda\beta\Rightarrow\tilde{f}$ 是 $\tilde{M}$ 上实线性泛函, 且 $\tilde{f}|_M=f$.

下证 $\tilde{f}(x+\lambda x_0)\leqslant p(x+\lambda x_0)$, $\forall x\in M$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.

当 $\lambda=0$ 时, 平凡. 当 $\lambda\neq0$ 时, 不妨设 $\lambda>0$,

在 $(*)$ 中 x, y 均取为 $\frac{x}{\lambda}$

$$\Rightarrow f(\frac{x}{\lambda})-p(\frac{x}{\lambda}-x_0)\leqslant\beta\leqslant p(\frac{x}{\lambda}+x_0)-f(\frac{x}{\lambda})$$

$\Rightarrow f(x)-p(x-\lambda x_0)\leqslant\lambda\beta\leqslant p(x+\lambda x_0)-f(x)$

$$\Rightarrow\begin{cases}f(x)-\lambda\beta\leqslant p(x-\lambda x_0)\\ f(x)+\lambda\beta\leqslant p(x+\lambda x_0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\tilde{f}(x-\lambda x_0)\leqslant p(x-\lambda x_0)\\ \tilde{f}(x+\lambda x_0)\leqslant p(x+\lambda x_0)\end{cases}.$$ □

证明. (Proof of Thm) 对两个线性泛函 g, h, 如果

(1) $\operatorname{Dom}(g)\hookrightarrow\operatorname{Dom}(h)$, (2) $h|_{\operatorname{Dom}(g)}=g$, 则称 h 是 g 的一个延拓, 记为 $g\lesssim h$.

令 $\mathcal{F}\triangleq\{g\mid f\lesssim g$, 且 $g(x)\leqslant p(x)$, $\forall x\in\operatorname{Dom}(g)\}$, $(\mathcal{F},\lesssim)$ 是一个偏序集,

设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{F}$ 的任一全序子集, 令 $Y\triangleq\bigcup\limits_{g\in\mathcal{C}}\operatorname{Dom}(g)\Rightarrow Y\hookrightarrow\mathcal{X}$.

定义 $G:Y\to\mathbb{R}$, $x\mapsto g(x)$ if $x\in\operatorname{Dom}(g)\Rightarrow G$ 良定且是 $\mathcal{C}$ 的一个上界

$\overset{Zorn}{\Rightarrow}\mathcal{F}$ 有极大元 F. Claim. $\operatorname{Dom}(F)=\mathcal{X}$.

假设不然, 则 $\exists x_0\in\mathcal{X}\backslash\operatorname{Dom}(F)\overset{Lem}{\Rightarrow}\exists\tilde{F}:\operatorname{Dom}(F)\oplus\operatorname{span}\{x_0\}\to\mathbb{R}$ 线性泛函,

$s.t.$ $F\lesssim\tilde{F}$, 且 $\tilde{F}\in\mathcal{F}$, 与 F 极大性矛盾. □

定理 2.4.3. (HBT over $\mathbb{C}$) $\mathcal{X}-$ 复向量空间, $p-\mathcal{X}$ 上半范数, $M-\mathcal{X}$ 的子空间, $\forall M$ 上复线性泛函 f *with* $|f(x)|\leqslant p(x)$, $\forall x\in M$, $\exists\mathcal{X}$ 上复线性泛函 F, *s.t.* (1) $F|_M=f$, (2) $|F(x)|\leqslant p(x)$, $\forall x\in\mathcal{X}$.

证明. Step 1. 先把 $\mathcal{X}$ 看作实向量空间.

令 $g=\mathrm{Re}f\Rightarrow g$ 是 M 上实线性泛函, 且 $g(x)\leqslant|f(x)|\leqslant p(x)$, $\forall x\in M$

$\overset{\text{前一 Thm}}{\Rightarrow}$ $\exists\mathcal{X}$ 上实线性泛函 G, *s.t.* (1) $G|_M=g$, (2) $G(x)\leqslant p(x)$, $\forall x\in\mathcal{X}$.

Step 2. 复化.

令 $F(x)\triangleq G(x)-iG(ix)$, $x\in\mathcal{X}\Rightarrow\begin{cases}F(x+y)=F(x)+F(y)\\ F(\alpha x)=\alpha F(x),\ \forall x\in\mathcal{X},\ \forall\alpha\in\mathbb{R}\end{cases}$

$\Rightarrow F((\alpha_1+i\alpha_2)x)=F(\alpha_1x)+F(i\alpha_2x)=\alpha_1F(x)+\alpha_2F(ix)\overset{?}{=}(\alpha_1+i\alpha_2)F(x)$.

只需证明 $F(ix)=iF(x)$, $\forall x\in\mathcal{X}$.

$$F(ix)=G(ix)-iG(i\cdot ix)=G(ix)+iG(x)=i(G(x)-iG(ix))=iF(x).$$

Step 3. $F|_M=f$, $\forall x\in M$.

$$\begin{aligned}F(x)&=G(x)-iG(ix)=g(x)-ig(ix)=\mathrm{Re}f(x)-i\mathrm{Re}[f(ix)]\\&=\mathrm{Re}f(x)-i\mathrm{Re}[if(x)]=\mathrm{Re}f(x)+i\mathrm{Im}f(x)=f(x),\ \forall x\in M.\end{aligned}$$

Step 4. $|F(x)|\leqslant p(x)$, $\forall x\in\mathcal{X}$.

如果 $F(x)=0$, 平凡.

如果 $F(x)\neq0\Rightarrow\exists\theta\in\mathbb{R}$, *s.t.* $|F(x)|=e^{-i\theta}F(x)$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow|F(x)|=e^{-i\theta}F(x)=F(e^{-i\theta}x)=G(e^{-i\theta}x)-iG(ie^{-i\theta}x)\\&\underset{G\text{实值}}{\overset{LHS\text{实值}}{=}}G(e^{-i\theta}x)\leqslant p(e^{-i\theta}x)\overset{\text{齐次性}}{=}p(x),\ \forall x\in\mathcal{X}.\end{aligned}$$

□

定理 2.4.4. (HBT) $(\mathcal{X},\|\cdot\|)$, $M\hookrightarrow\mathcal{X}$, $\forall f\in M^*$, $\mathcal{X}^*=\{\mathcal{X}\text{上连续线性泛函}\}$, $\exists F\in\mathcal{X}^*$, *s.t.* (1) $F|_M=f$, (2) $\|F\|=\|f\|$ (保范延拓).

证明. 令 $p(x) \triangleq \|f\|\|x\|,\ \forall x \in \mathcal{X}$

$\Rightarrow p$ 是 $\mathcal{X}$ 上半范数, 且 $|f(x)| \leqslant \|f\|\|x\| = p(x),\ \forall x \in M$.

由前一 Thm, $\exists \mathcal{X}$ 上线性泛函 F, $s.t.$ (1) $F|_M = f$, (2) $|F(x)| \leqslant p(x),\ \forall x \in \mathcal{X}$

$\Rightarrow |F(x)| \leqslant p(x) = \|f\|\|x\|,\ \forall x \in \mathcal{X} \Rightarrow F \in \mathcal{X}^*$, 且 $\|F\| \leqslant \|f\|$.

$\|F\| \geqslant \|f\|$ 平凡 $\Rightarrow \|F\| = \|f\|$. □

注. HBT 中延拓不唯一.

$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1),\ \|(x_1, x_2)\|_1 \triangleq |x_1| + |x_2|,\ M \triangleq \mathbb{R} \times \{0\}$ (实轴).

$f : M \to \mathbb{R},\ (x, 0) \mapsto x \Rightarrow f \in M^*$ 且 $\|f\| = 1$.

$\forall t \in (-1, 1),\ F_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2) \mapsto x_1 + tx_2 \Rightarrow F_t(x, 0) = x \Rightarrow F_t|_M = f$

$\Rightarrow |F_t(x_1, x_2)| = |x_1 + tx_2| \leqslant |x_1| + |x_2| = \|(x_1, x_2)\|_1 \Rightarrow \|F_t\| = 1$.

推论 2.4.5. $\forall x_0 \in \mathcal{X},\ \exists f \in \mathcal{X}^*,\ \|f\| = 1,\ s.t.\ f(x_0) = \|x_0\|$.

证明. 设 $M \triangleq \mathrm{span}\{x_0\},\ f_0 : M \to \mathbb{K},\ \lambda x_0 \mapsto \lambda\|x_0\|$

$\Rightarrow |f_0(x)| = |\lambda|\|x_0\| = \|x\|,\ \forall x \in M \Rightarrow f_0 \in M^*\ with\ \|f_0\| = 1$

$$\overset{HBT}{\Rightarrow} \exists f \in \mathcal{X}^*,\ s.t. \begin{cases} f|_M = f_0 \Rightarrow f(x_0) = f_0(x_0) = \|x_0\| \\ \|f\| = \|f_0\| = 1 \end{cases}.$$ □

推论 2.4.6. $\mathcal{X} \neq \{0\} \Rightarrow \mathcal{X}^* \neq \{0\}$.

证明. $\exists 0 \neq x_0 \in \mathcal{X}$, 由上一 Cor, $\exists f \in \mathcal{X}^*,\ \|f\| = 1,\ s.t.\ f(x_0) = \|x_0\| \neq 0$. □

推论 2.4.7. $\mathcal{X} \ni x \neq y \Rightarrow \exists f \in \mathcal{X}^*,\ s.t.\ f(x) \neq f(y)$.

证明. $x_0 \triangleq x - y \neq 0 \Rightarrow f(x_0) = f(x) - f(y) = \|x_0\| = \|x - y\| \neq 0$. □

推论 2.4.8. $\forall f \in \mathcal{X}^*,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. 特别地, $\forall f \in \mathcal{X}^*,\ f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

证明. 由上面 Cor 即得. $\square$

例 2.4.1. $\mathscr{X}$—Banach 空间, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{X}$, $s.t.$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$ (称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ 绝对收敛), 则 $\forall \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 双射, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ (重排不变).

证明. $\forall f \in \mathscr{X}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|f\|\|x_k\| < \infty$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} f(x_k)$ 是绝对收敛的数项级数, 故重排不变

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} f(x_{\sigma(k)}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f(x_k) \Rightarrow f(\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)}) = f(\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k) \overset{Cor1.3.22}{\Rightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k.$ $\square$

推论 2.4.9. $x \in \mathscr{X}$, $\|x\| = \sup\limits_{\substack{f \in \mathscr{X}^* \\ \|f\|=1}} |f(x)|$.

证明. $\forall f \in \mathscr{X}^*$, $\|f\| = 1 \Rightarrow |f(x)| \leqslant \|f\|\|x\| = \|x\| \Rightarrow \sup\limits_{\substack{f \in \mathscr{X}^* \\ \|f\|=1}} |f(x)| \leqslant \|x\|$.

另一方面, $\exists f \in \mathscr{X}^*$, $\|f\| = 1$, $s.t.$ $f(x) = \|x\|$ (由 Cor1.3.19) $\Rightarrow \sup\limits_{\substack{f \in \mathscr{X}^* \\ \|f\|=1}} |f(x)| \geqslant \|x\|$. $\square$

定理 2.4.10. $(\mathscr{X}, \|\cdot\|)$, $M \hookrightarrow \mathscr{X}$, $x_0 \in \mathscr{X}$, $s.t.$ $d = \mathrm{dist}(x_0, M) > 0$

$$\Rightarrow \exists f \in \mathscr{X}^* \ with\ \|f\| = 1,\ s.t.\ f(M) = \{0\} \text{ 且 } f(x_0) = d.$$

证明. 令 $\tilde{M} \triangleq M \oplus \mathrm{span}\{x_0\}$, $f_0 : \tilde{M} \to \mathbb{K}$, $x = y + \lambda x_0 \mapsto \lambda d$

$$\Rightarrow f_0(M) = \{0\},\ f_0(x_0) = d.$$

$\forall x = y + \lambda x_0$, $y \in M$, $\lambda \in \mathbb{K}$, 若 $\lambda = 0$, $f_0(x) = 0$, 若 $\lambda \neq 0$,

$$|f_0(x)| = |\lambda|\mathrm{dist}(x_0, M) \leqslant |\lambda|\|x_0 + \frac{y}{\lambda}\| = \|y + \lambda x_0\| = \|x\|$$

$$\Rightarrow f_0 \in \tilde{M}^* \text{ 且 } \|f_0\| \leqslant 1 \overset{HBT}{\Rightarrow} \exists f \in \mathscr{X}^*,\ s.t.\ \begin{cases} f|_{\tilde{M}} = f_0 \\ \|f\| = \|f_0\| \leqslant 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow f(M) = \{0\}$ 且 $f(x_0) = d$. 下面只需证 $\|f\| \geqslant 1$.

$d = \inf\limits_{y \in M} \|x_0 - y\| \Rightarrow \forall n,\ \exists y_n \in M,\ s.t.\ \|x_0 - y_n\| \leqslant d + \frac{1}{n}$.

$$\Rightarrow \frac{|f(x_0 - y_n)|}{\|x_0 - y_n\|} = \frac{|f(x_0)|}{\|x_0 - y_n\|} \geqslant \frac{d}{d + \frac{1}{n}} \to 1\ as\ n \to \infty$$

$\Rightarrow \sup\limits_{n} \frac{|f(x_0 - y_n)|}{\|x_o - y_n\|} \geqslant 1 \Rightarrow \|f\| \geqslant 1.$ □

定理 2.4.11. $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, $M \subset \mathcal{X}$, $0 \neq x_0 \in \mathcal{X}$, $x_0 \in \overline{\mathrm{span} M} \Leftrightarrow f(x_0) = 0,\ \forall f \in \mathcal{X}^*\ with\ f(M) = \{0\}$.

证明. "$\Rightarrow$" 设 $x_0 \in \overline{\mathrm{span} M}$, $\forall f \in \mathcal{X}^*$, $f(M) = 0$

$\overset{\text{线性}}{\Rightarrow} f(\mathrm{span} M) = \{0\} \overset{\text{连续}}{\Rightarrow} f(\overline{\mathrm{span} M}) = \{0\} \Rightarrow f(x_0) = 0.$

"$\Leftarrow$" 假设 $x_0 \neq \overline{\mathrm{span} M} \Rightarrow d = \mathrm{dist}(x_0, \overline{\mathrm{span} M}) > 0$

$\overset{\text{前一 Thm}}{\Rightarrow} \exists f \in \mathcal{X}^*,\ \|f\| = 1,\ s.t.\ f(\overline{\mathrm{span} M}) = \{0\}$ 且 $f(x_0) = d \neq 0$, 矛盾. □

定义 2.4.2. $\mathcal{X}-$ 向量空间, $C \subset \mathcal{X}$, (1) 如果 $\forall x, y \in C,\ \forall t \in [0,1],\ tx + (1-t)y \in C$, 则称 C 是凸集, (2) 如果 $-C = C$, 则称 C 对称, (3) $\forall x \in \mathcal{X},\ \exists t > 0,\ s.t.\ \frac{x}{t} \in C$, 则称 C 是吸收的.

命题 2.4.1. 任意凸集之交仍是凸集.

定义 2.4.3. $A \subset \mathcal{X}$, $\mathrm{conv}(A) \triangleq \bigcap\limits_{\substack{C \supset A \\ C\ convex}} C$, 称为 A 的凸包 (convex hull).

命题 2.4.2. $\mathrm{conv}(A) = \{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \mid x_1, \dots, x_n \in A,\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1],\ \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1,\ n \in \mathbb{N}^*\}$

证明. (HW) □

定义 2.4.4. $\mathcal{X}-$ 向量空间, $C-$ 包含 0 的凸集, 定义 $P_C : \mathcal{X} \to [0, +\infty]$, $P_C(x) \triangleq \inf\{t > 0 \mid \frac{x}{t} \in C\}$ 称为 C 的 Minkowski 泛函 (或称 C 的度规, gauge).

注. $P_C(x) = +\infty \Leftrightarrow \{t > 0 \mid \frac{x}{t} \in C\} = \phi$.

命题 2.4.3. 1° $P_C(0) = 0$, 2° (正齐次性) $P_C(tx) = tP_C(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$, $\forall t > 0$, 3° (次可加性) $P_C(x+y) \leqslant P_C(x) + P_C(y)$, $\forall x, y \in \mathcal{X}$.

证明. 3° $\forall x, y \in \mathcal{X}$, 不妨设 $P_C(x), P_C(y) \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$,

取 $\lambda = P_C(x) + \frac{\varepsilon}{2}$, $\mu = P_C(y) + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \frac{x}{\lambda}$, $\frac{y}{\mu} \in C$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot \frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot \frac{y}{\mu} \in C \text{ (由凸性)}$$

$\Rightarrow \lambda+\mu \geqslant P_C(x+y) \Rightarrow P_C(x+y) \leqslant P_C(x)+P_C(y)+\varepsilon \Rightarrow P_C(x+y) \leqslant P_C(x)+P_C(y)$. □

定义 2.4.5. $\mathcal{X}-$ 复向量空间, $C-$ 包含 0 的凸集, 如果 $\forall x \in C$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta}x \in C$, 则称 C 是均衡的.

命题 2.4.4. 复向量空间中的每个均衡吸收凸集都决定一个半范数.

证明. 吸收 $\Rightarrow P_C(x) \in [0, +\infty)$ 是次线性泛函. 均衡 + 正齐次性 $\Rightarrow$ 齐次性. □

超平面分离定理 (HST = Hyperplane Seperation Thm)

定义 2.4.6. $\mathcal{X}-$ 实向量空间, 称子空间 M 是 $\mathcal{X}$ 的极大子空间是指 $\forall \mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{X}$ *with* $M \subsetneqq \mathcal{Y} \Rightarrow \mathcal{Y} = \mathcal{X}$.

命题 2.4.5. M 是极大子空间 $\Leftrightarrow \mathscr{X} = M \oplus \mathrm{span}\{x_0\}$ *for some* $x_0 \in \mathscr{X} \Leftrightarrow \mathrm{codim}M = 1$ $(\mathrm{codim}M \triangleq \dim(\mathscr{X}/\mathscr{M}))$

证明. (HW, EX2.4.8) □

定义 2.4.7. 超平面 $\triangleq$ 极大子空间的平移 (极大线性流形) $= M + x_0$ *with* M 极大子空间.

定义 2.4.8. 对线性泛函 f 和 $r \in \mathbb{R}$, $H_f^r \triangleq \{x \in \mathscr{X} \mid f(x) = r\}$.

命题 2.4.6. L 是超平面 $\Leftrightarrow L = H_f^r \triangleq \{x \in \mathscr{X} \mid f(x) = r\}$

证明. "$\Leftarrow$" $H_f^0 = \ker(f)$. Claim. H_f^0 是极大子空间.

$\forall x_0 \in \mathscr{X} \backslash H_f^0$, $f(x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0) = 0$, $\forall x \in \mathscr{X} \Rightarrow x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0 \in H_f^0$

$\Rightarrow \mathscr{X} = H_f^0 \oplus \mathrm{span}\{x_0\} \Rightarrow H_f^0$ 极大.

"$\Rightarrow$" 设 $L = M + a$, M 极大子空间, $\mathscr{X} = M \oplus \mathrm{span}\{x_0\}$ *for some* $x_0 \in \mathscr{X}$.

定义 $f : \mathscr{X} \to \mathbb{R}$, $x = y + \lambda x_0 \mapsto \lambda \Rightarrow f(M) = \{0\}$, $f(x_0) = 1 \Rightarrow M \subset H_f^0$

$\overset{M\text{极大}}{\Rightarrow} M = H_f^0$ (由 $H_f^0 \neq \mathscr{X}$) $\Rightarrow L = H_f^{f(a)}$. □

命题 2.4.7. $(\mathscr{X}, \|\cdot\|)-$ 实赋范空间, $f \in \mathscr{X}^*$, $r \in \mathbb{R} \Rightarrow H_f^r$ 是闭的超平面.

证明. ($f \in \mathscr{X}^* \Leftrightarrow H_f^0 = \ker(f)$ 闭子空间, EX2.1.7(3)) □

定义 2.4.9. $\mathscr{X}-$ 实向量空间, A, $B \subset \mathscr{X}$.

(1) 称 H_f^r 分离 A, B 是指 $\begin{cases} f(x) \leqslant r, \ \forall x \in A \\ f(y) \geqslant r, \ \forall y \in B \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(x) \geqslant r, \ \forall x \in A \\ f(y) \leqslant r, \ \forall y \in B \end{cases}$, 等价地, $\sup\limits_{x \in A} f(x) \leqslant r \leqslant \inf\limits_{y \in B} f(y)$ 或 $\sup\limits_{y \in B} f(y) \leqslant r \leqslant \inf\limits_{x \in A} f(x)$.

(2) 称 H_f^r 严格分离 A, B 是指 $\sup\limits_{x \in A} f(x) < r < \inf\limits_{y \in B} f(y)$ 或 $\sup\limits_{y \in B} f(y) < r < \inf\limits_{x \in A} f(x)$.

定理 2.4.12. $(\mathscr{X}, \|\cdot\|)-$ 实赋范空间, $C-$ 有内点的凸集, $x_0 \notin C \Rightarrow \exists H_f^r$ 闭, 分离 C 和 x_0.

证明. 不妨设 0 是 C 的内点 (by 平移) $\Rightarrow P_C$ 是次线性泛函 (Minkowski 泛函),
且 1° $\operatorname{int}(C) = \{x \in \mathscr{X} \mid P_C(x) < 1\}$, 2° $\overline{C} = \{x \in \mathscr{X} \mid P_C(x) \leqslant 1\}$ $(EX1.5.1)$.
$x_0 \notin C \Rightarrow P_C(x_0) \geqslant 1$. 0 是 C 的内点 $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0,\ s.t.\ B(0,\varepsilon) \subset C$
$\Rightarrow \forall 0 \neq x \in \mathscr{X},\ \varepsilon\frac{x}{\|x\|} \in \overline{B(0,\varepsilon)} \subset \overline{C} \Rightarrow P_C(\varepsilon\frac{x}{\|x\|}) \leqslant 1,\ \forall 0 \neq x \in \mathscr{X}$

$$\Rightarrow P_C(x) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|x\|,\ \forall x \in \mathscr{X}.$$

令 $M \triangleq \operatorname{span}\{x_0\},\ f_0 : M \to \mathbb{R},\ x = \lambda x_0 \mapsto \lambda P_C(x_0) \Rightarrow f_0(x) \leqslant P_C(x),\ \forall x \in M.$

$\overset{HBT\ over\ \mathbb{R}}{\Rightarrow}$ 存在 $\mathscr{X}$ 上线性泛函 f, $s.t.$ $\begin{cases} f|_M = f_0 \\ f(x) \leqslant P_C(x),\ \forall x \in \mathscr{X} \end{cases}$

$$\Rightarrow f(x_0) = f_0(x_0) = P_C(x_0) \geqslant 1.$$

$f(x) \leqslant P_C(x) \leqslant 1,\ \forall x \in C \Rightarrow H_f^1$ 分离了 C 和 x_0.
下证 $f \in \mathscr{X}^*$, $\forall x \in \mathscr{X},\ f(x) \leqslant P_C(x) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|x\|,\ f(-x) = -f(x) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|-x\| = \frac{1}{\varepsilon}\|x\|$
$\Rightarrow |f(x)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|x\|,\ \forall x \in \mathscr{X}.$ □

定理 2.4.13. (HST1) $\mathscr{X}-$ 实赋范空间, $A-$ 开凸集, $B-$ 凸集, $A \cap B = \phi \Rightarrow \exists H_f^r$ 闭, 分离 A, B.

证明. $C \triangleq A - B = \{x - y \mid x \in A,\ y \in B\}$
$\Rightarrow 1^\circ$ C 凸, 2° C 开 (由 $C = \bigcup_{y \in B}(A - y)$), 3° $0 \notin C$ (由 $A \cap B = \phi$)
$\overset{\text{前一 Thm}}{\Rightarrow} \exists H_f^0$ 闭, 分离 C 和 $0 \Rightarrow \exists f \in \mathscr{X}^*,\ s.t.\ \sup\limits_{x \in C} f(x) \leqslant 0 = f(0)$

$$\Rightarrow \sup_{x \in C} f(x) = \sup_{\substack{x \in A \\ y \in B}}[f(x) - f(y)] = \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{y \in B} f(y) \leqslant 0$$

$\Rightarrow \sup\limits_{x \in A} f(x) \leqslant r \leqslant \inf\limits_{y \in B} f(y)$ $with$ $r = \frac{1}{2}[\sup\limits_{x \in A} f(x) + \inf\limits_{y \in B} f(y)] \Rightarrow H_f^r$ 分离 A, B. □

定理 2.4.14. (HST2) $\mathscr{X}-$ 实赋范空间, $A-$ 闭凸集, $B-$ 紧凸集, $A\cap B=\phi\Rightarrow\exists H_f^r$ 闭, 严格分离 $A,\ B$.

证明. A 闭, B 紧, $A\cap B=\phi\Rightarrow\operatorname{dist}(A,\ B)>0$, 令 $\varepsilon\triangleq\frac{1}{4}\operatorname{dist}(A,B)$,

令 $A_\varepsilon\triangleq A+B(0,\varepsilon),\ B_\varepsilon\triangleq B+B(0,\varepsilon)\Rightarrow A_\varepsilon,\ B_\varepsilon$ 是开凸集

$\underset{\text{前一 Thm}}{\overset{A_\varepsilon\cap B_\varepsilon=\phi}{\Longrightarrow}}\exists H_f^r$ 闭, 分离 $A_\varepsilon,\ B_\varepsilon$, *i.e.* $\exists f\in\mathscr{X}^*,\ \exists r\in\mathbb{R},\ s.t.\ \sup\limits_{x\in A_\varepsilon}f(x)\leqslant r\leqslant\inf\limits_{y\in B_\varepsilon}f(y)$.

$r\leqslant f(y+\varepsilon z)=f(y)+\varepsilon f(z),\ \forall y\in B,\ \forall z\in B(0,1)\Rightarrow f(-z)\leqslant\frac{f(y)-r}{\varepsilon}$

$$\Rightarrow\|f\|=\sup_{z\in B(0,1)}f(-z)\leqslant\frac{f(y)-r}{\varepsilon},\ \forall y\in B$$

$\Rightarrow\varepsilon\|f\|+r\leqslant f(y),\ \forall y\in B$

$$\Rightarrow r\leqslant\inf_{y\in B}f(y)-\varepsilon\|f\|<\inf_{y\in B}f(y)$$

同理有 $\sup\limits_{x\in A}f(x)<r$. $\square$

推论 2.4.15. (Ascoli) $(\mathscr{X},\|\cdot\|)-$ 实赋范空间, $C-$ 闭凸集, $x_0\notin C\Rightarrow\exists f\in\mathscr{X},\ \exists r\in\mathbb{R},\ s.t.\ \sup\limits_{x\in C}f(x)<r<f(x_0)$.

推论 2.4.16. $\mathscr{X}-$ 实赋范空间, $M-$ 子空间, $\overline{M}\neq\mathscr{X}\Leftrightarrow\exists f\in\mathscr{X}^*,\ f\neq0,\ s.t.\ f(M)=\{0\}$. 等价地, $\overline{M}=\mathscr{X}\Leftrightarrow$ 若 $f\in\mathscr{X}^*,\ s.t.\ f(M)=\{0\}$ *implies* $f=0$.

证明. $\exists x_0\in\mathscr{X}\backslash\overline{M}\overset{Ascoli}{\Rightarrow}\exists f\in\mathscr{X}^*,\ \exists r\in\mathbb{R},\ s.t.\ \sup\limits_{x\in\overline{M}}f(x)<r<f(x_0)$

$\Rightarrow f(M)=\{0\}$ (M 是非零子空间时 $f(M)$ 无上界), 且 $f\neq0$ (由 $f(x_0)>r$). $\square$

推论 2.4.17. (Marzur) $\mathscr{X}-$ 实赋范空间, $C-$ 开凸集, $F-$ 线性子流形 (i.e. 子空间的平移), $C\cap F=\phi\Rightarrow\exists H_f^r$ 闭, $s.t.\begin{cases}F\subset H_f^r\\ \sup\limits_{x\in C}f(x)\leqslant r\end{cases}$.

证明. $F = M + x_0$ *with* M 子空间

$$\overset{HST1}{\Rightarrow} \exists f \in \mathcal{X}^*,\ \exists s \in \mathbb{R},\ s.t.\ \sup_{x\in C} f(x) \leqslant s \leqslant \inf_{z\in F} f(y) = \inf_{z\in M} f(z) + f(x_0)$$

$$\Rightarrow \inf_{z\in M} f(z) \geqslant s - f(x_0)$$

$\Rightarrow f|_M = 0 \Rightarrow M \in H_f^0 \Rightarrow F \subset H_f^r$ *with* $r = f(x_0)$, 同时 $\sup_{x\in C} f(x) \leqslant f(x_0) = r$. □

定义 2.4.10. 称超平面 H_f^r 是凸集 C 在 x_0 处的支撑超平面 (supporting hyperplane), 是指 (1) C 完全落在 H_f^r 的一侧, (2)$x_0 \in \overline{C} \cap H_f^r$, 即 $\sup_{x\in C} f(x) \leqslant r = f(x_0)$ 或 $\inf_{x\in C} f(x) \geqslant r = f(x_0)$.

定理 2.4.18. $\mathcal{X}-$ 实赋范空间, $C-$ 有内点的闭凸集, 则 $\forall x_0 \in \partial C$ 处都有 C 的支撑超平面.

证明. 令 $E \triangleq \mathrm{int}(C)-$ 开凸集, $F \triangleq \{x_0\}$ (零维子空间的平移)

$$\overset{Marzur}{\Rightarrow} \exists f \in \mathcal{X}^*,\ \exists r \in \mathbb{R},\ s.t.\ \sup_{x\in E} f(x) \leqslant r \text{ 且 } \{x_0\} \subset H_f^r$$

$$\overset{f\text{连续}}{\Rightarrow} \sup_{x\in C} f(x) \leqslant r = f(x_0).$$ □

例 2.4.2. $C = B(0, r)$, $\forall x_0 \in \partial B(0, r)$ 处, 都有 C 的支撑超平面.

证明. $\exists f \in \mathcal{X}^*$ *with* $\|f\| = 1,\ s.t.\ f(x_0) = \|x_0\| = r$ (HBT),

而 $\sup_{x\in C} f(x) \leqslant \sup_{x\in C} \|f\|\|x\| = r = f(x_0)$. □

2.5 共轭空间、弱收敛、自反空间

对偶空间 (共轭空间) $\mathcal{X}^* = \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathbb{K})$, Riesz 表示定理: $H-$Hilbert 空间, $H^* = H$ (一方面, $\forall y \in H$, 定义 $f_y : H \to \mathbb{K},\ x \mapsto \langle x, y\rangle \Rightarrow f_y \in H^*$, 且 $\|f\| = \|y\|$; 另一方面, $\forall f \in H^*$, $\exists! y_f \in H,\ s.t.\ f = f_{y_f} \Rightarrow J : H \to H^*,\ y \mapsto f_y$ 是赋范空间之间的线性等距同构).

$(L^p)^* = ?\ (1 \leqslant p \leqslant \infty)$, $L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu) \triangleq \{f \text{ 可测} \mid \|f\|_p = (\int_\Omega |f|^p\, d\mu)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$.

定理 2.5.1. (Riesz) 设 $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ 是 $\sigma-$ 有限的测度空间 ($i.e.\ \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n\ with\ \mu(\Omega_n) < \infty$), 设 $1 \leqslant p < \infty$, $p' \triangleq \begin{cases} \frac{p}{p-1},\ if\ 1 < p < \infty \\ \infty,\ if\ p = 1 \end{cases}$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$, 则 $(L^p)^* = L^{p'}$ (不是集合的等式, 类似上面的 Riesz 表示定理), 即

- (1) $\forall g \in L^{p'}$, 定义 $\Lambda_g(f) \triangleq \int_\Omega fg\, d\mu,\ f \in L^p \Rightarrow \Lambda_g \in (L^p)^*$, 且 $\|\Lambda_g\| = \|g\|_{p'}$,
- (2) $\forall \lambda \in (L^p)^*,\ \exists! g \in L^{p'},\ s.t.\ \Lambda = \Lambda_g$,

从而 $J : L^{p'} \to (L^p)^*$ 是线性等距同构.

证明. (Proof of (1)) Case 1: $1 < p < \infty$.

$|\Lambda_g(f)| = |\int fg| \overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \|g\|_{p'}\|f\|_p \Rightarrow \Lambda_g \in (L^p)^*$, 且 $\|\Lambda_g\| \leqslant \|g\|_{p'}$.

为证明 $\|\Lambda_g\| \geqslant \|g\|_{p'}$, 定义 $\tilde{f} = |g|^{p'-1}\mathrm{sgn}(g)$, $\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1,\ t > 1 \\ 0,\ t = 0 \\ -1,\ t < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \|\tilde{f}\|_p^p = \int |g|^{(p'-1)p} = \int |g|^{p'} = \|g\|_{p'}^{p'} \\ \tilde{f}g = |g|^{p'} \Rightarrow \Lambda_g(\tilde{f}) = \int \tilde{f}g = \|g\|_{p'}^{p'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|\Lambda_g\| \geqslant \frac{|\Lambda_g(\tilde{f})|}{\|\tilde{f}\|_p} = \frac{\|g\|_{p'}^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'/p}} = \|g\|_{p'}^{p'(1-\frac{1}{p})} = \|g\|_{p'}.$$

Case 2: p=1.

Step 1. 先假设 $\mu(\Omega) < \infty$.

$p = 1$ 时 $p' = \infty$, $|\Lambda_g(f)| \leqslant \|g\|_\infty \|f\|_1 \Rightarrow \Lambda_g \in (L^1)^*$, 且 $\|\Lambda_g\| \leqslant \|g\|_\infty$.

Claim. $\|\Lambda_g\| \geqslant \|g\|_\infty$ ($|g(x)| \leqslant \|\Lambda_g\|\ for\ a.e.\ x \in \Omega$, 即 $\mu\{x \in \Omega \mid |g(x)| > \|\Lambda_g\|\} = 0$).

令 $E_k \triangleq \{x \in \Omega \mid |g(x)| > \|\Lambda_g\| + \frac{1}{k}\}$, $f_k \triangleq \chi_{E_k}\mathrm{sgn}(g)$, $k = 1, 2, ...$

$\Rightarrow \|f_k\|_1 \leqslant \int_{E_k} d\mu = \mu(E_k)$

$$\Rightarrow \|\Lambda_g\|\mu(E_k) \geqslant \|\Lambda_g\|\|f_k\|_1 \geqslant |\Lambda_g(f_k)| = |\int \chi_{E_k}\mathrm{sgn}(g)g\, d\mu|$$
$$= \int_{E_k} |g|\, d\mu \geqslant (\|\Lambda_g\| + \frac{1}{k})\mu(E_k)$$

$\overset{\mu(E_k)<\mu(\Omega)<\infty}{\Rightarrow} \mu(E_k) = 0 \Rightarrow \{x \in \Omega \mid |g(x)| > \|\Lambda_g\|\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 是零测集 $\Rightarrow \|\Lambda_g\| \geqslant \|g\|_\infty$.

Step 2. $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n,\ \mu(\Omega_n) < \infty.$

$E_{k,n} \triangleq E_k \cap \Omega_n \overset{Step\ 1}{\Rightarrow} \mu(E_{k,n}) = 0,\ k, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow E_k \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_{k,n} \Rightarrow \mu(E_k) = 0.$ □

引理 2.5.2. 设 $g \in L^1$, 如果 $\exists C > 0,\ s.t.\ |\int fg\,d\mu| \leqslant C\|f\|_p,\ \forall f \in L^\infty$, 则 $g \in L^{p'}$, 且 $\|g\|_{p'} \leqslant C$.

证明. Case 1. $1 < p < \infty$.

令 $g_n \triangleq g \cdot \chi_{\{|g| \leqslant n\}},\ f_n \triangleq |g_n|^{p'-1}\mathrm{sgn}(g_n)$

$\Rightarrow$ (1) $f_n \in L^\infty$, (2) $\|f_n\|_p^p = \|g_n\|_{p'}^{p'}$, (3) $f_n g = f_n g_n = |g_n|^{p'}$

$\overset{条件}{\Rightarrow} \|g_n\|_{p'}^{p'} = |\int f_n g| \leqslant C\|f_n\|_p = C\|g_n\|_{p'}^{p'/p} \Rightarrow \|g_n\|_{p'} \leqslant C,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\int |g|^{p'}\,d\mu = \int \lim_{n\to\infty} |g_n|^{p'}\,d\mu \overset{Fatou}{\leqslant} \liminf_{n\to\infty} \int |g_n|^{p'}\,d\mu \leqslant C^{p'}$$

$\Rightarrow g \in L^{p'}$, 且 $\|g\|_{p'} \leqslant C$.

Case2. $p = 1$. 见发的讲义. □

证明. (Proof of (2)) 只证明 $\mu(\Omega) < \infty$ 的情形.

1° 设 $\Lambda \in (L^p)^*$, 定义 $\nu(E) \triangleq \Lambda(\chi_E),\ E \in \mathcal{M}$.

设 $E_k \in \mathcal{M},\ k = 1, 2, \ldots$ 互不相交, 令 $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k \Rightarrow \chi_E = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k}$.

由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) = \mu(E) < \mu(\Omega) < \infty$, 有

$$\nu(E) = \Lambda(\chi_E) \overset{连续}{=} \lim_{n\to\infty} \Lambda(\sum_{k=1}^{n} \chi_{E_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda(\chi_{E_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k)$$

$\Rightarrow \nu$ 是 $(\Omega, \mathcal{M})$ 上的符号测度 (取实数值, 测度取非负值).

设 $\mu(E) = 0 \Rightarrow \chi_E = 0$ (作为 L^p 中的元素) $\Rightarrow \Lambda(\chi_E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$

$$\overset{Radon-Nikodym}{\Rightarrow} \exists g \in L^1(\mu),\ s.t.\ \nu(E) = \int_E g\,d\mu,\ \forall E \in \mathcal{M}$$

$\Rightarrow \Lambda(\chi_E) = \int \chi_E g\,d\mu,\ \forall E \in \mathcal{M} \Rightarrow \Lambda(f) = \int fg\,d\mu,\ \forall f\ simple.$

2° $g \in L^{p'}$.

$\forall f \in L^\infty,\ \exists \varphi_k\ simple,\ k = 1, 2, \ldots,\ s.t.$ (1) $\varphi_k \to f\ a.e.$, (2) $\|\varphi_k\|_\infty \leqslant M \triangleq \|f\|_\infty + 1$

$\Rightarrow |f - \varphi_k|^p \leqslant (2M)^p \overset{DCT}{\Rightarrow} \int |f - \varphi_k|^p\,d\mu \to 0\ as\ k \to \infty$

$$\Rightarrow |\Lambda(f) - \Lambda(\varphi_k)| \leqslant \|\Lambda\|\|f - \varphi_k\|_p \to 0\ as\ k \to \infty$$

$\Rightarrow \Lambda(f) = \lim\limits_{k\to\infty} \Lambda(\varphi_k)$

$$\overset{DCT}{\Rightarrow} \int fg\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k g\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \Lambda(\varphi_k) = \Lambda(f),\ \forall f \in L^\infty.$$

$|\int fg\,d\mu| = |\Lambda(f)| \leqslant \|\Lambda\|\|f\|_p,\ \forall f \in L^\infty \overset{Lem}{\Rightarrow} g \in L^{p'}$, 且 $\|g\|_{p'} \leqslant \|\Lambda\|$.

$3^\circ\ \Lambda(f) = \int fg\,d\mu,\ \forall f \in L^p,\ \forall f \in L^p$.

$\forall f \in L^p,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi\ simple,\ s.t.\ \|f-\varphi\|_p < \frac{\varepsilon}{2(\|\Lambda\|+\|g\|_{p'})}$ (由简单函数稠密性)

$$\begin{aligned}|\Lambda(f) - \int fg\,d\mu| &\leqslant |\Lambda(f) - \Lambda(\phi)| + |\Lambda(\varphi) - \int \varphi g\,d\mu| + |\int \varphi g\,d\mu - \int fg\,d\mu| \\ &\leqslant \|\Lambda\|\|f-\varphi\|_p + 0 + \|g\|_{p'}\|f-\varphi\|_p < \varepsilon\ (\text{由 } \Lambda \text{ 有界和 Hölder})\end{aligned}$$

$\overset{\varepsilon\text{任意}}{\Rightarrow} \Lambda(f) = \int fg\,d\mu,\ \forall f \in L^p.$ □

$1 \leqslant p < \infty,\ (L^p)^* = L^{p'},\ (L^1)^* = L^\infty,\ Q : (L^\infty)^* = L^1$? (这是错的).

定理 2.5.3. $L^1 \underset{\neq}{\hookrightarrow} (L^\infty)^*$.

证明. $1^\circ\ L^1 \hookrightarrow (L^\infty)^*$. $\forall g \in L^1,\ |\Lambda_g(f)| = |\int fg| \leqslant \|g\|_1\|f\|_\infty \Rightarrow \Lambda_g \in (L^\infty)^*$.

$2^\circ\ J : L^1 \to (L^\infty)^*,\ g \mapsto \Lambda_g$ 不是满射.

注意 $M \triangleq C[0,1] \overset{\text{闭子空间}}{\hookrightarrow} L^\infty[0,1]$, 任取 $f_0 \in L^\infty \backslash M \Rightarrow d \triangleq \mathrm{dist}(f_0, M) > 0$

$\overset{HBT}{\Rightarrow} \exists \Lambda \in (L^\infty)^*,\ \|\Lambda\| = 1,\ s.t.\ \Lambda(M) = \{0\}$, 而 $\Lambda(f_0) = d > 0$.

假设 $\exists g \in L^1,\ s.t.\ \Lambda = \Lambda_g$, 即 $\Lambda(f) = \int fg,\ \forall f \in L^\infty$,

特别地, $\int fg = \Lambda(f) = 0,\ \forall f \in M$.

$M \overset{dense}{\subset} L^1 \Rightarrow \exists f_n \in M,\ n = 1, 2, \ldots,\ s.t.\ \|f_n - \mathrm{sgn}(g)\|_1 \to 0$

$\overset{Riesz}{\Rightarrow} \exists$ 子列 $f_{n_k} \to \mathrm{sgn}(g)\ a.e.$

$$\overset{DCT}{\Rightarrow} \int |g| = \lim_{k\to\infty} \int f_{n_k} g = 0 \Rightarrow g = 0\ a.e.$$

$\Rightarrow \Lambda_g = 0$, 但 $\Lambda_g(f_0) = \Lambda(f_0) > 0$, 矛盾. □

Q: $C[a,b]^* = ?$

定义 2.5.1. 记 $[a,b]$ 的任一划分 $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, 如果 $\sup\limits_{\Delta} \sum\limits_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| < \infty$, 则称 f 是有界变差函数, 记为 $f \in \mathrm{BV}[a,b]$.

$V_a^b(f) \triangleq \sup\limits_{\Delta} \sum\limits_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$, $\|f\|_{\mathrm{BV}} \triangleq |f(a)| + V_a^b(f) \Rightarrow (\mathrm{BV}[a,b], \|\cdot\|_{\mathrm{BV}})$ 是 Banach 空间.

定义 2.5.2. (Riemann-Stietjes 积分) 对 $[a,b]$ 的任一划分 Δ, $\xi = \{\xi_k\}_{k=1}^{n}$ *with* $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $\sigma(f,g,\Delta,\xi) \triangleq \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(t_k) - g(t_{k-1})]$, $\|\Delta\| = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |t_k - t_{k-1}|$, 如果 $\exists I \in \mathbb{R}$, *s.t.* 当 $\|\Delta\| \to 0$ 时, $\sigma(f,g,\Delta,\xi) \to I$, 且与 Δ 的分点无关, 与 ξ 的取法无关, 则记 $I = \int_a^b f\,dg$, 称为 f 关于 g 的 R-S 积分.

命题 2.5.1. 如果 $f \in C[a,b]$, $g \in \mathrm{BV}[a,b]$, 则 $\int_a^b f\,dg$ 存在.

定义 2.5.3. $\mathrm{BV}_0[a,b] \triangleq \{f \in \mathrm{BV}[a,b] \mid f \text{ 在 } (a,b) \text{ 右连续且 } f(a) = 0\} \Rightarrow \mathrm{BV}_0[a,b]$ 是 $\mathrm{BV}[a,b]$ 的闭子空间, 从而是 Banach 空间.

定理 2.5.4. $C[a,b]^* = \mathrm{BV}_0[a,b]$,

- $\forall g \in \mathrm{BV}_0[a,b]$, $\Lambda_g(f) \triangleq \int_a^b f\,dg \Rightarrow \Lambda_g \in C[a,b]^*$, 且 $\|\Lambda_g\| = \|g\|_{\mathrm{BV}}$,
- $\forall \Lambda \in C[a,b]^*$, $\exists! g \in \mathrm{BV}_0[a,b]$, *s.t.* $\Lambda = \Lambda_g$, 且 $\|g\|_{\mathrm{BV}} = \|\Lambda\|$.

证明. 见讲义. □

定义 2.5.4. $\mathcal{X}^{**} \triangleq (\mathcal{X}^*)^* = \mathcal{L}(\mathcal{X}^*, \mathbb{K})$, 称为 $\mathcal{X}$ 的二次对偶 (第二共轭空间).

对 $x \in \mathcal{X}$, 定义映射 $x^{**}: \mathcal{X}^* \to \mathbb{K}$, $f \mapsto f(x) \Rightarrow |x^{**}(f)| = |f(x)| \leqslant \|x\|\|f\|$, $\forall f \in \mathcal{X}^* \Rightarrow x^{**} \in \mathcal{X}^{**}$, 且 $\|x^{**}\| \leqslant \|x\|$. 另一方面, 由 HBT, $\exists f \in \mathcal{X}^*$, $\|f\| = 1$, $s.t.$ $f(x) = \|x\| \Rightarrow \|x^{**}\| = \sup\limits_{\substack{f \in \mathcal{X}^* \\ \|f\|=1}} |f(x)| \geqslant \|x\| \Rightarrow \|x^{**}\| = \|x\|$.

定义 2.5.5. $i: \mathcal{X} \to \mathcal{X}^{**}$, $x \mapsto x^{**}$ 是线性等距嵌入, 称为 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{X}^{**}$ 的自然映射 (Canonical map) 或自然嵌入, 如果 i 是满射 (由等距可得 i 是单射, 从而是 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{X}^{**}$ 的线性等距同构), 则称 $\mathcal{X}$ 自反.

注. 存在非自反的 Banach 空间 $\mathcal{X}$, $s.t.$ $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{X}^{**}$ 线性等距同构 (James, 1950) (汪林,《泛函分析中的反例》)

例 2.5.1. 1° 自反空间一定是 Banach 空间. 2° 有限维赋范空间自反 (HW EX2.5.4). 3° Hilbert 空间自反 (HW).

定理 2.5.5. 设 $1 < p < \infty$, L^p 自反.

证明. 即证明 $\forall \Lambda \in (L^p)^{**}$, $\exists u \in L^p$, $s.t.$ $\Lambda(f) = f(u)$, $\forall f \in (L^p)^*$

$(i: L^p \to (L^p)^{**}$ 是满射 $\Leftrightarrow \forall \Lambda \in (L^p)^{**}$, $\exists u \in L^p$, $s.t.$ $u^{**} = \Lambda \Rightarrow \Lambda(f) = u^{**}(f) = f(u))$.

回忆 $J: L^{p'} \to (L^p)^*$, $v \mapsto f_v$ 线性等距同构, $f_v(u) = \int uv$,

令 $\varphi \triangleq \Lambda \circ J \Rightarrow \varphi \in (L^{p'})^* \overset{(L^{p'})^* = L^p}{\Rightarrow} \exists! u \in L^p$, $s.t.$ $\varphi(v) = \int uv$, $\forall v \in L^{p'}$.

$\forall f \in (L^p)^*$, 令 $v_f \triangleq J^{-1}(f)$ (即 f 的表示向量)

$\Rightarrow \Lambda(f) = (\Lambda \circ J)(J^{-1}(f)) = \varphi(v_f) = \int v_f u = f(u)$. □

定理 2.5.6. $C[a,b]$ 不自反.

证明. 假设不然, 则 $\forall \Lambda \in C[a,b]^{**}$, $\exists u \in C[a,b]$, $s.t.$ $\Lambda(f) = f(u)$, $\forall f \in C[a,b]^*$.

$\forall f \in C[a,b]^*$, $\exists! v_f \in \mathrm{BV}_0[a,b]$, $s.t.$ $f(u) = \int_a^b u\, dv_f$, $\forall u \in C[a,b]$, 且 $\|v_f\|_{\mathrm{BV}} = \|f\|$.

令 $c = \frac{a+b}{2}$, 定义 $F_c: C[a,b]^* \to \mathbb{K}$, $f \mapsto v_f(c+0) - v_f(c-0)$ (BV 则存在左右极限)

$\Rightarrow |F_c(f)| \leqslant V_a^b(v_f) = \|v_f\|_{\mathrm{BV}} = \|f\| \Rightarrow F_c \in C[a,b]^{**}$

$\Rightarrow \exists u_c \in C[a,b],\ s.t.\ F_c(f) = f(u_c) = \int_a^b u_c\, dv_f,\ \forall f \in C[a,b]^*,$

令 $v(t) \triangleq \int_a^t u_c(s)\, ds \Rightarrow v \in \mathrm{BV}_0[a,b].$

令 $f_v(u) = \int_a^b u\, dv,\ u \in C[a,b] \Rightarrow f_v \in C[a,b]^*$

$\Rightarrow F_c(f_v) = v(c+0) - v(c-0) = 0$ (由 $v \in C^1[a,b]$)

$\Rightarrow 0 = F_c(f_v) = f_v(u_c) = \int_a^b u_c\, dv = \int_a^b u_c^2(t)\, dt \Rightarrow u_c \equiv 0 \Rightarrow F_c = 0$, 矛盾. □

定理 2.5.7. $\mathcal{X}^*$ 可分 $\Rightarrow \mathcal{X}$ 可分.

证明. Step 1. $\mathcal{X}^*$ 中单位球面 S_1^* 可分.

$\mathcal{X}^*$ 可分 $\Rightarrow \exists \{f_n\}_{n=1}^\infty \overset{dense}{\subset} \mathcal{X}^*$, 令 $g_n \triangleq \frac{f_n}{\|f_n\|}$. Claim. $\{g_n\}_{n=1}^\infty \overset{dense}{\subset} S_1^*$.

$\forall g \in S_1^*$, 由 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 的稠密性, $\exists \{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty,\ s.t.\ f_{n_k} \to g\ as\ k \to \infty,$

$$\|g - g_{n_k}\| \leqslant \|g - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - g_{n_k}\| = \|g - f_{n_k}\| + \|(\|f_{n_k}\| - 1)\frac{f_{n_k}}{\|f_{n_k}\|}\|$$
$$= \|g - f_{n_k}\| + |\|f_{n_k}\| - 1| \to 0\ as\ k \to \infty.$$

Step 2. $\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{X},\ \|x_n\| = 1,\ n = 1, 2, \ldots,\ s.t.\ \mathrm{span}(\{x_n\}_{n=1}^\infty) \overset{dense}{\subset} \mathcal{X}.$

$\sup\limits_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ \|x\|=1}} |g_n(x)| = \|g_n\| = 1 \Rightarrow \exists x_n \in \mathcal{X},\ \|x_n\| = 1,\ s.t.\ |g_n(x_n)| > \frac{1}{2}.$

Claim. $\mathrm{span}(\{x_n\}_{n=1}^\infty) \overset{dense}{\subset} \mathcal{X}.$

假设 $\exists x_0 \in \mathcal{X} \backslash \overline{\mathrm{span}(\{x_n\}_{n=1}^\infty)} \overset{HBT}{\Rightarrow} \exists f \in \mathcal{X}^*,\ \|f\| = 1,$

$s.t.\ f(\overline{\mathrm{span}(\{x_n\}_{n=1}^\infty)}) = 0$, 而 $f(x_0) = \mathrm{dist}(x_0, \overline{\mathrm{span}(\{x_n\}_{n=1}^\infty)}) > 0$

$\Rightarrow \|g_n - f\| \geqslant |g_n(x_n) - f(x_n)| = \|g_n(x_n)\| > \frac{1}{2}$, 这与 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 在 S_1^* 中稠密矛盾.

Step 3. $\mathrm{span}^{\mathbb{Q}}(\{x_n\}_{n=1}^\infty) \overset{dense}{\subset} \mathrm{span}(\{x_n\}_{n=1}^\infty) \overset{dense}{\subset} \mathcal{X}.$ □

定理 2.5.8. 设 $1 \leqslant p < \infty$, L^p 可分.

证明. (Weeden-Zygmund. Real Analysis.)

$\{ \sum\limits_{k=0}^{2^n-1} r_k \chi_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]} \mid r_k \in \mathbb{Q},\ n = 1, 2, \ldots \} \overset{dense}{\subset} L^p[0,1].$ □

定理 2.5.9. $L^\infty[0,1]$ 不可分.

证明. 假设 $\exists\{f_n\}_{n=1}^\infty \overset{dense}{\subset} L^\infty \Rightarrow \forall t\in(0,1),\ \exists n_t\in\mathbb{N}^*,\ s.t.\ f_{n_t}\in B(\chi_{[0,t]},\frac{1}{3})$,
但 $\mathrm{dist}(\chi_{[0,t]},\chi_{[0,s]})=1,\ \forall t\neq s\Rightarrow$ 不同的 $B(\chi_{[0,t]},\frac{1}{3})$ 互不相交
映射 $\varphi:(0,1)\to\mathbb{N},\ t\mapsto n_t$ 是单射 $\Rightarrow(0,1)$ 可数, 矛盾. □

定理 2.5.10. L^1 不自反.

证明. HW (Hint: $\mathcal{X}^*$ 可分 $\Rightarrow\mathcal{X}$ 可分, L^∞ 不可分) □

定理 2.5.11. $(\mathcal{X},\|\cdot\|_{\mathcal{X}}),\ (\mathcal{Y},\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}),\ T\in\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})\Rightarrow\exists T^*\in\mathcal{L}(\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*),\ s.t.\ (T^*f)(x)=f(Tx),\ \forall f\in\mathcal{Y}^*,\ \forall x\in\mathcal{X}$, T^* 称为 T 的共轭算子, 进而映射 $*:\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})\to\mathcal{L}(\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*),\ T\mapsto T^*$ 是线性等距嵌入.

证明. 设 $f\in\mathcal{Y}^*$, 定义映射 $\Lambda_f:\mathcal{X}\to\mathbb{K},\ x\mapsto f(Tx)$

$$\Rightarrow|\Lambda_f(x)|=|f(Tx)|\leqslant\|f\|\|Tx\|\leqslant\|f\|\|T\|\|x\|,\ \forall x\in\mathcal{X}$$

$\Rightarrow\Lambda_f\in\mathcal{X}^*$, 且 $\|\Lambda_f\|\leqslant\|f\|\|T\|$.
定义映射 $T^*:\mathcal{Y}^*\to\mathcal{X}^*,\ f\mapsto\Lambda_f\Rightarrow T^*$ 线性, 且 $\|T^*f\|=\|\Lambda_f\|\leqslant\|T\|\|f\|$
$\Rightarrow T^*\in\mathcal{L}(\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*)$, 且 $\|T^*\|\leqslant\|T\|$.
而 $\forall x\in\mathcal{X}$, 不妨设 $Tx\neq0\overset{HBT}{\Rightarrow}\exists f\in\mathcal{Y}^*,\ \|f\|=1,\ s.t.\ f(Tx)=\|Tx\|$

$$\Rightarrow\|Tx\|=|f(Tx)|=|(T^*f)(x)|\leqslant\|T^*f\|\|x\|\leqslant\|T^*\|\|f\|\|x\|=\|T^*\|\|x\|$$

$\Rightarrow\|T\|\leqslant\|T^*\|\Rightarrow\|T\|=\|T^*\|$. □

定理 2.5.12. (Pettis) 自反空间的闭子空间一定自反.

证明. 设 $\mathcal{X}$ 自反, $\mathcal{Y} \overset{\text{闭}}{\hookrightarrow} \mathcal{X}$,

为证明 $\mathcal{Y}$ 自反, 只需证 $\forall z \in \mathcal{Y}^{**}$, $\exists y \in \mathcal{Y}$, $s.t.\ z(f) = f(y)$, $\forall f \in \mathcal{Y}^*$ (即 $y = i^{-1}(z)$).

定义映射 $T : \mathcal{X}^* \to \mathcal{Y}^*$, $f \mapsto f|_{\mathcal{Y}} \Rightarrow T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^*, \mathcal{Y}^*)$

$$\Rightarrow \exists T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^{**}, \mathcal{X}^{**}),\ s.t.\ (T^*z)(f) = z(Tf),\ \forall f \in \mathcal{X}^*.$$

$\mathcal{X}$ 自反 $\Rightarrow$ 自然映射 $i_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^{**}$ 是满射 $\Rightarrow \exists y \in \mathcal{X}$, $s.t.\ y^{**} = T^*z$

$$\Rightarrow f(y) = y^{**}(f) = (T^*z)(f) = z(Tf),\ \forall f \in \mathcal{X}^*.$$

Claim 1. $y \in \mathcal{Y}$.

假设 $y \notin \mathcal{Y} \overset{HBT}{\Rightarrow} \exists \tilde{f} \in \mathcal{X}^*$, $s.t.\ \tilde{f}(\mathcal{Y}) = \{0\}$, $\tilde{f}(y) = \operatorname{dist}(y, \mathcal{Y}) > 0 \Rightarrow T\tilde{f} = \tilde{f}|_{\mathcal{Y}} = 0$

$$\tilde{f}(y) = (T^*z)(\tilde{f}) = z(T\tilde{f}) = 0,\ \text{矛盾}.$$

Claim 2. $z(f) = f(y)$, $\forall f \in \mathcal{Y}^*$.

$\forall f \in \mathcal{Y}^*$, $\exists F \in \mathcal{X}^*$, $s.t.\ TF = f$ (by HBT)

$$\Rightarrow z(f) = z(TF) = (T^*z)(F) = F(y) = f(y).$$

□

定义 2.5.6. $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, 称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 弱收敛于 $x_0 \in \mathcal{X}$, 是指 $f(x_n) \to f(x_0)$, $\forall f \in \mathcal{X}^*$, 记为 $x_n \xrightarrow{w} x_0$, 或 $x_n \rightharpoonup x_0$.

命题 2.5.2. 强收敛 $\Rightarrow$ 弱收敛

证明. $\|x_n - x_0\| \to 0 \Rightarrow \|f(x_n) - f(x_0)\| \leqslant \|f\|\|x_n - x_0\| \to 0$, $\forall f \in \mathcal{X}^*$. □

命题 2.5.3. 弱极限 (如果存在) 唯一.

证明. 设 $\begin{cases} x_n \xrightarrow{w} x_0 \\ x_n \xrightarrow{w} y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x_n) \to f(x_0) \\ f(x_n) \to f(y_0) \end{cases}$, $\forall f \in \mathcal{X}^*$

$\Rightarrow f(x_0) = f(y_0)$, $\forall f \in \mathcal{X}^* \overset{HBT}{\Rightarrow} x_0 = y_0$. □

定理 2.5.13. $\dim\mathscr{X}<\infty \Rightarrow \mathscr{X}$ 中弱收敛与强收敛等价.

证明. 设 $\dim\mathscr{X}=m$, $\{e_1,\dots,e_m\}$ 是 $\mathscr{X}$ 的一个基, 设 $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k^{(n)}e_k=x_n\xrightarrow{w}x_0=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k^{(0)}e_k$
$\underset{EX2.4.7}{\overset{HBT}{\Rightarrow}}\exists f_1,\dots,f_n\in\mathscr{X}^*$ (对偶基), $s.t.\ f_j(e_k)=\delta_{jk},\ 1\leqslant j,k\leqslant m$

$$\alpha_j^{(n)}=f_j(x_n)\to f_j(x_0)=\alpha_j^{(0)},\ j=1,\dots,m$$

$\Rightarrow\|x_n-x_0\|_\infty\to 0\ with\ \|x\|_\infty=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}|\alpha_k|\Rightarrow\|x_n-x\|\to 0$ (有限维空间范数等价). □

注. 逆命题不成立 (反例. Schur 空间).

定理 2.5.14. $(\mathscr{X},\|\cdot\|),\ x_n\xrightarrow{w}x_0\Leftrightarrow\begin{cases}\sup\limits_n\|x_n\|<\infty\\ \exists\mathscr{F}\overset{dense}{\subset}\mathscr{X}^*,\ s.t.\ f(x_n)\to f(x_0),\ \forall f\in\mathscr{F}\end{cases}$.

证明. $x_n\xrightarrow{w}x_0\Leftrightarrow f(x_n)\to f(x_0),\ \forall f\in\mathscr{X}^*\Leftrightarrow x_n^{**}(f)\to x_0^{**}(f),\ \forall f\in\mathscr{X}^*$

$$\overset{Banach-Steinhauss}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\sup\limits_n\|x_n^{**}\|<\infty\\ \exists\mathscr{F}\overset{dense}{\subset}\mathscr{X}^*,\ s.t.\ x_n^{**}(f)\to x_0^{**}(f),\ \forall f\in\mathscr{F}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sup\limits_n\|x_n\|<\infty\\ \exists\mathscr{F}\overset{dense}{\subset}\mathscr{X}^*,\ s.t.\ f(x_n)\to f(x_0),\ \forall f\in\mathscr{F}\end{cases}$$ □

例 2.5.2. $L^2(\mathbb{T})$ 中 $e_k(t)\triangleq e^{-2\pi ikt},\ t\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\ k\in\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow e_k\xrightarrow{w}0,\ 但\ \|e_k-0\|\nrightarrow 0,\ as\ |k|\to\infty.$$

证明. $\forall f\in(L^2(\mathbb{T}))^*,\ \exists v\in L^2(\mathbb{T}),\ s.t.\ f(u)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}u(t)v(t)\,dt,\ u\in L^2(\mathbb{T})$
$f(e_k)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}v(t)e^{-2\pi ikt}\,dt=\hat{v}(k)\to 0\ as\ |k|\to\infty$ (Riemann-Lebesgue Lem). □

定理 2.5.15. (Marzur) $x_n\xrightarrow{w}x_0\Rightarrow x_0\in\overline{\mathrm{conv}(\{x_n\}_{n=1}^\infty)}$ (由 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的凸组合逼近).

证明. 令 $C \triangleq \overline{\operatorname{conv}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})} \Rightarrow C$ 是闭凸集.

假设 $x_0 \notin C \overset{Ascoli}{\Rightarrow} \exists f \in \mathcal{X}^*,\ \exists \alpha \in \mathbb{R},\ s.t. \ \sup\limits_{x\in C} f(x) < \alpha < f(x_0)$

$\Rightarrow f(x_n) < \alpha < f(x_0),\ n = 1, 2, \ldots,$ 这与 $f(x_n) \to f(x_0)$ 矛盾. □

定义 2.5.7. 称 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}^*$ 弱 $*$ 收敛于 $f \in \mathcal{X}^*$, 是指 $f_n(x) \to f(x),\ \forall x \in \mathcal{X}$, 记为 $f_n \overset{w^*}{\to} f$.

命题 2.5.4. $\mathcal{X}^*$ 中强收敛 $\Rightarrow$ 弱收敛 $\Rightarrow$ 弱 $*$ 收敛.

证明. $f_n \overset{w}{\to} f \Leftrightarrow \Lambda(f_n) \to \Lambda(f),\ \forall \Lambda \in \mathcal{X}^{**}$

$\Rightarrow$ ($\mathcal{X}$ 自反时为 $\Leftrightarrow$) $x^{**}(f_n) \to x^{**}(f),\ \forall x \in \mathcal{X} \Leftrightarrow f_n(x) \to f(x),\ \forall x \in \mathcal{X} \Leftrightarrow f_n \overset{w^*}{\Rightarrow} f$. □

命题 2.5.5. $\mathcal{X}$ 自反 $\Rightarrow \mathcal{X}^*$ 中弱收敛与弱 $*$ 收敛等价.

注. 逆命题不成立 (反例. $\mathcal{X} = l^{\infty}$).

定理 2.5.16. $\mathcal{X}-$Banach 空间, $f_n \overset{w^*}{\to} f$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sup\limits_n \|f_n\| \leqslant \infty \\ \exists M \overset{dense}{\subset} \mathcal{X},\ s.t.\ f_n(x) \to f(x),\ \forall x \in M \end{cases}.$$

证明. 利用 Banach-Steinhauss Thm. □

定义 2.5.8. $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, (1) 称 $M \subset \mathcal{X}$ 弱列紧是指 M 中任一序列都有弱收敛子列, (2) 称 $\mathcal{F} \subset \mathcal{X}^*$ 弱 $*$ 列紧是指 $\mathcal{F}$ 中任一序列都有弱 $*$ 收敛子列.

定理 2.5.17. (可分 Banach-Alaoglu Thm) $\mathscr{X}$ 可分 $\Rightarrow \mathscr{X}^*$ 中有界集弱 $*$ 列紧.

证明. 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{X}^*$ 有界 $\Rightarrow C \triangleq \sup\limits_n \|f_n\| < \infty$. $\mathscr{X}$ 可分 $\Rightarrow \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \overset{dense}{\subset} \mathscr{X}$.
$\forall m$, $\{f_n(x_m)\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界数列 ($|f_n(x_m)| \leqslant \|f_n\|\|x_m\| \leqslant C\|x_m\|$), 故有收敛子列.

$$f_1^{(1)}(x_1),\ f_2^{(1)}(x_1),\ f_3^{(1)}(x_1),\ \dots \text{ 收敛 (在 } \{f_n(x_1)\}_{n=1}^{\infty} \text{ 中取子列)}$$
$$f_1^{(2)}(x_2),\ f_2^{(2)}(x_2),\ f_3^{(2)}(x_2),\ \dots \text{ 收敛 (在 } \{f_n^{(1)}(x_2)\}_{n=1}^{\infty} \text{ 中取子列)}$$
$$f_1^{(3)}(x_3),\ f_2^{(3)}(x_3),\ f_3^{(3)}(x_3),\ \dots \text{ 收敛 (在 } \{f_n^{(2)}(x_3)\}_{n=1}^{\infty} \text{ 中取子列)}$$
$$\dots$$

$\overset{\text{对角线子列}}{\Rightarrow} \exists \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $s.t.\ \forall m$, $\{f_{n_k}(x_m)\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛.
Claim. $\exists f \in \mathscr{X}^*$, $s.t.\ f_{n_k} \overset{w^*}{\to} f$.
$\forall x \in \mathscr{X}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_m \in \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $s.t.\ \|x - x_m\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3C}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |f_{n_{k+p}}(x) - f_{n_k}(x)| &\leqslant |f_{n_{k+p}}(x) - f_{n_{k+p}}(x_m)| + |f_{n_{k+p}}(x_m) - f_{n_k}(x_m)| + |f_{n_k}(x_m) - f_{n_k}(x)| \\
&\leqslant \|f_{n_{k+p}}\|\|x - x_m\| + |f_{n_{k+p}}(x_m) - f_{n_k}(x_m)| + \|f_{n_k}\|\|x - x_m\| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \ (\text{当 } k \text{ 充分大}, \forall p)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 数列 $\Rightarrow f(x) \triangleq \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$.
$|f(x)| \leqslant \sup\limits_n |f_n(x)| \leqslant C\|x\| \Rightarrow f \in \mathscr{X}^* \Rightarrow f_{n_k} \overset{w^*}{\to} f$. □

定理 2.5.18. (Alaoglu) $\mathscr{X}^*$ 中闭单位球弱 $*$ 紧.

定理 2.5.19. (Eberlein-Smalain) $\mathscr{X}-$ 自反空间, (1) $\mathscr{X}$ 中有界集弱列紧, (2) $\mathscr{X}$ 中闭单位球是弱自列紧的.

证明. (1) 只需证 $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{X}$ *with* $\sup\limits_n \{x_n\} < \infty$, 有弱收敛子列 $x_{n_k} \overset{w}{\to} x_n \in \mathscr{X}$.
令 $Y \triangleq \overline{\text{span}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$, 则 Y 可分, 且 $Y \overset{\text{闭}}{\hookrightarrow} \mathscr{X} \overset{Pettis}{\Rightarrow} Y$ 自反 $\overset{Y\text{可分}}{\Rightarrow} Y^{**}$ 可分
$\overset{\mathscr{X}^*\text{可分}\Rightarrow\mathscr{X}\text{可分}}{\Rightarrow} Y^*$ 可分 $\overset{\text{可分}B-A}{\Rightarrow} Y^{**}$ 中有界集弱 $*$ 列紧

$$\overset{\sup\limits_n \|x_n^{**}\|<\infty}{\Rightarrow} \quad \{x_n^{**}\}_{n=1}^{\infty} \text{ 有子列 } x_{n_k}^{**} \xrightarrow{w^*} x_0^{**} \in Y^{**}$$

$$\Rightarrow \forall f \in Y^*,\ f(x_{n_k}) = x_{n_k}^{**}(f) \to x_0^{**}(f) = f(x_0)$$

$$\Rightarrow \forall F \in \mathscr{X}^*\ (F|_Y \in Y^*),\ F(x_{n_k}) = F|_Y(x_{n_k}) \to F|_Y(x_0) = F(x_0) \Rightarrow x_{n_k} \xrightarrow{w} x_0.$$

(2) 设 $\|x_n\| \leqslant 1$, $\forall n$, 由 (1), $\exists x_{n_k} \xrightarrow{w} x_0 \in \mathscr{X}$

$$\Rightarrow \|x_0\| \leqslant \liminf_{k\to\infty} \|x_{n_k}\| \leqslant 1 \text{ (由 EX2.5.14)}$$

$\Rightarrow x_0$ 也在单位球中. □

2.6 线性算子的谱

以下约定, $\mathscr{X}-$ 复 Banach 空间, 此时 $(\mathscr{L}(\mathscr{X}), \|\cdot\|)$ 是复 Banach 空间.

定义 2.6.1. 对 $A,\ B \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$, 定义 $(AB)x \triangleq A(Bx)$, $x \in \mathscr{X} \Rightarrow 1°$ (结合律) $A(BC) = (AB)C$, $2°$ (分配律) $A(B+C) = AB+AC$, $(A+B)C = AC+BC$, $3°$ $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, $4°$ $AI = A = IA$, $5°$ $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\| \Rightarrow \mathscr{L}(\mathscr{X})$ 是 Banach 代数.

定义 2.6.2. 称 $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$ 可逆是指 $\exists B \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$, $s.t.\ AB = I = BA$.

定义 2.6.3. $\sigma(A) \triangleq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - A \text{ 不可逆}\}$ 称为 A 的谱 (spectrum), $\sigma(A)$ 的元素称为谱点.

$\rho(A) \triangleq \mathbb{C}\backslash\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - A \text{ 可逆}\}$ 称为 A 的预解集, $\rho(A)$ 的元素称为正则值.

定义 2.6.4. 如果 $\lambda \in \mathbb{C}$, $s.t.\ \ker(\lambda I - A) \neq \{0\}$ (即 $\lambda I - A$ 不是单射), $i.e.\ \exists 0 \neq x \in \mathscr{X}$, $s.t.\ Ax = \lambda x$, 则称 λ 是 A 的特征值, $\sigma_p(A) \triangleq \{A \text{ 的特征值}\}$ 称为 A 的点谱.

例 2.6.1. $A \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n) \Rightarrow \sigma(A) = \sigma_p(A) \neq \phi$, $\#\sigma_p(A) \leqslant n$.

例 2.6.2. 乘法算子 $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $u(t) \mapsto tu(t)$, $\sigma_p(A) = \phi$.

证明. $(\lambda I-A)u=0 \Leftrightarrow (\lambda-t)u(t)=0,\ \forall t\in[0,1] \Rightarrow u\equiv 0.$ □

定义 2.6.5. 谱的分类 $\sigma(A)=\sigma_p(A)\cup\sigma_c(A)\cup\sigma_r(A)$,

$$\lambda\in\mathbb{C}\begin{cases}\ker(\lambda I-A)\neq\{0\}\to\lambda\in\sigma_p(A)\\ \ker(\lambda I-A)=\{0\}\begin{cases}\begin{cases}\mathrm{Ran}(\lambda I-A)\neq\mathcal{X}\\ \mathrm{Ran}(\lambda I-A)\overset{dense}{\subset}\mathcal{X}\end{cases}\text{，此时称 }\lambda\text{ 是 }A\text{ 的连续谱点, }\sigma_c(A)\triangleq\{A\text{ 的连续谱点}\}\\ \overline{\mathrm{Ran}(\lambda I-A)}\neq\mathcal{X}\text{，此时称 }\lambda\text{ 是 }A\text{ 的剩余谱点 (residue), }\sigma_r(A)\triangleq\{A\text{ 的剩余谱点}\}\\ \mathrm{Ran}(\lambda I-A)=\mathcal{X}\overset{IMT}{\to}\lambda\in\rho(A)\end{cases}\end{cases},$$

例 2.6.3. 乘法算子 $A:C[0,1]\to C[0,1],\ u(t)\mapsto tu(t),\ \sigma(A)=\sigma_r(A)=[0,1].$

证明. 1° $\mathbb{C}\backslash[0,1]\subset\rho(A)$.

$\forall\lambda\in\mathbb{C}\backslash[0,1]$, 定义 $T:C[0,1]\to C[0,1],\ u(t)\mapsto\frac{1}{\lambda-t}u(t)$

$\Rightarrow(\lambda I-A)T=I=T(\lambda I-A)$, 且 $\|Tu\|\leqslant(\max\limits_{t\in[0,1]}\frac{1}{|\lambda-t|})\|u\|\Rightarrow T\in\mathcal{L}(\mathcal{X})$

$\Rightarrow(\lambda I-A)^{-1}=T\in\mathcal{L}(\mathcal{X})\Rightarrow\lambda\in\rho(A)$.

2° $[0,1]\subset\sigma_r(A)$.

设 $\lambda\in[0,1]$, 注意到 $\forall v\in\mathrm{Ran}(\lambda I-A),\ \exists u\in C[0,1],\ s.t.\ v(t)=(\lambda-t)u(t),\ t\in[0,1]$

$\overset{\text{取}t=\lambda}{\Rightarrow} v(\lambda)=0\Rightarrow 1\notin\overline{\mathrm{Ran}(\lambda I-A)}\Rightarrow\overline{\mathrm{Ran}(\lambda I-A)}\neq\mathcal{X}$.

3° $[0,1]\subset\sigma_r(A)\subset\sigma(A)\subset[0,1]\Rightarrow\sigma(A)=\sigma_r(A)=[0,1]$. □

定义 2.6.6. 算子值函数 $R_\lambda(A):\rho(A)\to\mathcal{L}(\mathcal{X}),\ \lambda\mapsto(\lambda I-A)^{-1}$, 称为 A 的预解式 (resolvent).

引理 2.6.1. 设 $T\in\mathcal{L}(\mathcal{X}),\ \|T\|<1$, 则 (1) $(I-T)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{X})$, (2) $(I-T)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}T^n$ (von Neumann 级数), (3) $\|(I-T)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-\|T\|}$.

证明. (1) 令 $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}T^k,\ \|S_{n+p}-S_n\|=\|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}T^k\|\leqslant\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\|T\|^k<\frac{\|T\|^{n+1}}{1-\|T\|}$

$\overset{\mathcal{L}(\mathcal{X})\text{完备}}{\Rightarrow}\exists S\in\mathcal{L}(\mathcal{X}),\ s.t.\ \|S_n-S\|\to0\ as\ n\to\infty$. Claim. $S=(I-T)^{-1}$.

$\|S_n(I-T)-I\|=\|I-T^{n+1}-I\|\leqslant\|T\|^{n+1}\to 0\ as\ n\to\infty$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\|S(I-T)-I\|&\leqslant\|S(I-T)-S_n(I-T)\|+\|S_n(I-T)-I\|\\&\leqslant\|S-S_n\|\|I-T\|+\|S_n(I-T)-I\|\to0\ as\ n\to\infty\end{aligned}$$

$\Rightarrow \|S(I-T)-I\| = 0 \Rightarrow S(I-T) = I$. 同理, $(I-T)S = I$.

(2) $(I-T)^{-1} = S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T^k$.

(3) $\|S\| \leqslant \sup\limits_n \|S_n\| \leqslant \frac{1}{1-\|T\|}$. □

定理 2.6.2. $\rho(A) \overset{open}{\subset} \mathbb{C}$ $(\Rightarrow \sigma(A) \overset{closed}{\subset} \mathbb{C})$.

证明. 设 $\lambda_0 \in \rho(A)$, 来证明 λ_0 是 $\rho(A)$ 的内点.

$\lambda I - A = \lambda_0 I - A + (\lambda-\lambda_0)I = (\lambda_0 I - A)[I + (\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I - A)^{-1}]$.

当 $|\lambda-\lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}(A)\|}$ 时 $\overset{Lem}{\Rightarrow} B \triangleq [I+(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}(A)]^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$

$\Rightarrow (\lambda I - A)^{-1} = BR_{\lambda_0}(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$

$\Rightarrow \mathbb{D}(\lambda_0, \frac{1}{\|R_{\lambda_0}(A)\|}) \subset \rho(A) \Rightarrow \lambda_0$ 是 $\rho(A)$ 内点. □

定理 2.6.3. $\sigma(A) \subset \overline{\mathbb{D}(0, \|A\|)}$ $(\Leftrightarrow \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}(0, \|A\|)} \subset \rho(A))$.

证明. 只要证 $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ *with* $|\lambda| > \|A\|$, $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$.

$|\lambda| > \|A\| \Rightarrow \|\frac{A}{\lambda}\| < 1 \overset{Lem}{\Rightarrow} (I - \frac{A}{\lambda})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) \Rightarrow (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. □

推论 2.6.4. $\sigma(A) \overset{cpt}{\subset} \mathbb{C}$ (紧集).

定理 2.6.5. $\mathcal{X}-$ 复 Banach 空间, $\Omega \overset{open}{\subset} \mathbb{C}$, 称算子值函数 $T: \Omega \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $\lambda \mapsto T_\lambda$ 在 $\lambda_0 \in \Omega$ 全纯是指, $\exists \lambda_0$ 的邻域 U, *s.t.* $\forall \lambda \in U$, $\exists S_\lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, *s.t.* $\|\frac{T_{\lambda+z}-T_\lambda}{z} - S_\lambda\| \to 0$ *as* $|z| \to 0$.

定理 2.6.6. $\lambda \mapsto R_\lambda(A)$ 是 $\rho(A)$ 上的算子值全纯函数.

引理 2.6.7. (Resdvent Indentity, R.I.) $R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu-\lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A)$, $\forall \lambda, \mu \in \rho(A)$.

证明. 注意到

$$\begin{aligned}R_\lambda(A)&=(\lambda I-A)^{-1}=(\lambda I-A)^{-1}(\mu I-A)(\mu I-A)^{-1}\\&=(\lambda I-A)^{-1}[(\lambda I-A)+(\mu-\lambda)I](\mu I-A)^{-1}\\&=R_\mu(A)+(\mu-\lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A),\end{aligned}$$

移项即得. □

证明. (Proof of Thm)

Step 1. 连续性.

$\forall\lambda_0\in\rho(A),\ \lambda I-A=(\lambda_0 I-A)[I+(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-A)^{-1}]$

$\Rightarrow$ 当 $|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{\|R_\lambda(A)\|}$ 时, $R_\lambda(A)=[I+(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}(A)]^{-1}R_{\lambda_0}(A)$

$\Rightarrow$ 当 $|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{2\|R_\lambda(A)\|}$ 时, $\|R_\lambda(A)\|\leqslant\frac{1}{1-\frac12}\|R_{\lambda_0(A)}\|=2\|R_{\lambda_0(A)}\|$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\|R_\lambda(A)-R_{\lambda_0}(A)\|&\overset{R.I.}{\leqslant}|\lambda-\lambda_0|\|R_\lambda(A)\|\|R_{\lambda_0}(A)\|\\&\leqslant 2\|R_{\lambda_0}(A)\|^2|\lambda-\lambda_0|,\ \text{当}|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{2\|R_\lambda(A)\|}\ \text{时}.\end{aligned}$$

Step 2. 全纯性.

$$\begin{aligned}\|\frac{R_\lambda(A)-R_{\lambda_0}(A)}{\lambda-\lambda_0}+R_{\lambda_0}(A)^2\|&=\|-R_\lambda(A)R_{\lambda_0}(A)+R_{\lambda_0}(A)^2\|\\&\leqslant\|R_{\lambda_0}(A)\|\|R_{\lambda_0}(A)-R_\lambda(A)\|\to 0\ as\ \lambda\to\lambda_0.\end{aligned}$$

□

定理 2.6.8. (Gelfand, 谱不空定理) $0\neq A\in\mathcal{L}(\mathscr{X})\Rightarrow\sigma(A)\neq\phi$.

证明. 假设 $\sigma(A)=\phi\Rightarrow\rho(A)=\mathbb{C}\Rightarrow\lambda\mapsto R_\lambda(A)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的算子值全纯函数

$\Rightarrow\forall f\in\mathcal{L}(\mathscr{X})^*,\ u_f(\lambda)\triangleq f(R_\lambda(A))$ 是 (数值) 整函数

$(|\frac{f(R_\lambda(A))-f(R_{\lambda_0}(A))}{\lambda-\lambda_0}+f(R_{\lambda_0}(A))^2|\leqslant\|f\|\|\dots\|$, 同上).

当 $|\lambda|>2\|A\|$ 时, $\|R_\lambda(A)\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|(1-\|\frac{A}{\lambda}\|)}=\frac{1}{|\lambda|-\|A\|}\leqslant\frac{1}{\|A\|}$,

而 $\|R_\lambda(A)\|$ 在 $\overline{D(0,2\|A\|)}$ 上有界

$\Rightarrow\exists C>0,\ s.t.\ \|R_\lambda(A)\|\leqslant C,\ \forall\lambda\in\mathbb{C}$

$$\Rightarrow\forall f\in\mathcal{L}(\mathscr{X})^*,\ |u_f(\lambda)|=|f(R_\lambda(A))|\leqslant\|f\|C,\ \forall\lambda\in\mathbb{C}$$

$\overset{Liouville}{\Rightarrow} u_f = const$

$$\Rightarrow f(R_\lambda(A)) = f(R_\mu(A)),\ \forall \lambda,\ \mu \in \rho(A),\ \forall f \in \mathcal{L}(\mathcal{X})^*$$

$\overset{HBT}{\Rightarrow} R_\lambda(A) = R_\mu(A),\ \forall \lambda,\ \mu \in \rho(A)$, 这与 R.I. 矛盾. □

定义 2.6.7. 对 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $r_\sigma(A) \triangleq \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}$, 称为 A 的谱半径.

定理 2.6.9. (Gelfand, 谱半径公式) $0 \neq A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) \Rightarrow r_\sigma(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

证明. Step 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ 存在.
令 $r \triangleq \inf\limits_{n} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \liminf\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \geqslant r$.
另一方面, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists m,\ s.t.\ \|A^m\|^{\frac{1}{m}} < r + \varepsilon$,
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, 有唯一分解 $n = p_n m + q_n$ *with* $0 \leqslant q_n \leqslant m-1$,

$$\|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \|A^{p_n m} \cdot A^{q_n}\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \|A^{p_n m}\|^{\frac{1}{n}} \|A^{q_n}\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \|A^m\|^{\frac{1}{m}\frac{p_n m}{n}} \|A\|^{\frac{q_n}{n}} \leqslant (r+\varepsilon)^{\frac{p_n m}{n}} \|A\|^{\frac{q_n}{n}}$$

$\Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant r + \varepsilon$ (由 $\frac{p_n m}{n} = 1 - \frac{q_n}{n} \to 1,\ \alpha^{\frac{1}{n}} \to 1,\ \forall \alpha > 0$)
$\Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant r$.
Step 2. $r_\sigma(A) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.
注意幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|A^n\| z^n$ 的收敛半径等于 $\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}}$
$\overset{z=\frac{1}{\lambda}}{\Rightarrow}$ 当 $|\lambda| > \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n\|}{|\lambda|^{n+1}} < \infty \overset{\mathcal{L}(\mathcal{X})\text{完备}}{\Rightarrow} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$ 收敛.
另一方面, $\|(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}})(\lambda I - A) - I\| \to 0$ *as* $n \to \infty \Rightarrow R_\lambda(A) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$
$\Rightarrow \lambda \in \rho(A) \Rightarrow r_\sigma(A) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.
Step 3. $r_\sigma(A) \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.
设 $|\lambda| > r_\sigma(A) \Rightarrow \lambda \in \rho(A) \Rightarrow \forall f \in \mathcal{L}(\mathcal{X})^*,\ f(R_\lambda(A))$ 在 λ 处全纯
$\Rightarrow f(R_\lambda(A))$ 在圆环 $|\lambda| > r_\sigma(A)$ 内全纯, 故有 Laurent 级数.
另一方面, 由 Step 2 中证明, $R_\lambda(A) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$, 当 $|\lambda| > \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ 时
$\Rightarrow f(R_\lambda(A)) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f(A^n)}{\lambda^{n+1}}$, 当 $|\lambda| > \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ 时

$\overset{\text{唯一性}}{\Rightarrow} f(R_\lambda(A)) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f(A^n)}{\lambda^{n+1}}$ 在 $|\lambda| > r_\sigma(A)$ 内成立 $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} |\frac{f(A^n)}{(r_\sigma(A)+\varepsilon)^{n+1}}| < \infty$ (绝对收敛).

令 $T_n \triangleq \frac{A^n}{(r_\sigma(A)+\varepsilon)^{n+1}} \overset{\text{通项有界}}{\Rightarrow} \sup\limits_n |f(T_n)| < \infty,\ \forall f \in \mathcal{L}(\mathcal{X})^*$

$\overset{UBP}{\Rightarrow} \sup\limits_n \|T_n\| < \infty$ ($f(T_n)$ 看作 $T_n^{**}(f)$) $\Rightarrow \|A^n\|^{\frac{1}{n}} < (\sup\limits_n \|T_n\|)^{\frac{1}{n}} (r_\sigma(A)+\varepsilon)^{\frac{n+1}{n}}$

$\Rightarrow \varlimsup\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant r_\sigma(A)+\varepsilon \Rightarrow \varlimsup\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant r_\sigma(A)$. □

例 2.6.4. 右移位算子, $A: l^2 \to l^2,\ (x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$,

$\sigma_p(A) = \phi,\ \sigma_c(A) = \partial\mathbb{D},\ \sigma_r(A) = \mathbb{D}$.

证明. $\|A\| = 1 \Rightarrow \sigma(A) \subset \overline{\mathbb{D}}$.

$1^\circ\ \sigma_p(A) = \phi$.

假设 $\exists\lambda \in \mathbb{C},\ \exists 0 \neq x \in l^2,\ s.t.\ Ax = \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda x_1 = 0 \\ \lambda x_2 = x_1 \\ \lambda x_3 = x_2 \\ \dots \end{cases}$, 如果 $\lambda = 0 \Rightarrow x = 0$, 矛盾; 如果 $\lambda \neq 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x = 0$, 矛盾.

$2^\circ\ \mathbb{D} \subset \sigma_r(A)$.

$\forall\lambda \in \mathbb{D}$, 来证明 $\overline{\mathrm{Ran}(\lambda I - A)} \neq l^2 \Leftrightarrow \mathrm{Ran}(\lambda I - A)^\perp \neq \{0\}$.

令 $z \triangleq (1, \bar\lambda, \bar\lambda^2, \dots)$, Claim. $z \perp \mathrm{Ran}(\lambda I - A)$.

$$\begin{aligned} \langle(\lambda I - A)x, z\rangle &= \langle(\lambda x_1, \lambda x_2 - x_1, \lambda x_3 - x_2, \dots), (1, \bar\lambda, \bar\lambda^2, \dots)\rangle \\ &= \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 - \lambda x_1 + \lambda^3 x_3 - \lambda^2 x_2 + \cdots = 0,\ \forall x \in l^2. \end{aligned}$$

$3^\circ\ \partial\mathbb{D} \subset \sigma_c(A)$.

设 $\lambda \in \partial\mathbb{D}$, Step 1. $\mathrm{Ran}(\lambda I - A) \neq l^2$.

设 $y \in \mathrm{Ran}(\lambda I - A),\ \exists x \in l^2,\ s.t.\ (\lambda I - A)x = y \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \lambda x_1 \\ y_k = \lambda x_k - x_{k-1}\ (k \geqslant 2) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \lambda x_1 \\ \lambda^{k-1} y_k = \lambda^k x_k - \lambda^{k-1} x_{k-1}\ (k \geqslant 2) \end{cases} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} y_k = \lambda^n x_n$.

假设 $\mathrm{Ran}(\lambda I - A) = l^2 \overset{y=e_1}{\Rightarrow} 1 = \lambda^n x_n,\ n = 1, 2, \cdots \Rightarrow x = (\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^2}, \dots) \in l^2$,

但 $|\lambda| = 1 \Rightarrow x$ 的通项不趋于 0, 与 $x \in l^2$ 矛盾.

Step 2. $\overline{\mathrm{Ran}(\lambda I - A)} = l^2 \Leftrightarrow \mathrm{Ran}(\lambda I - A)^\perp = \{0\}$.

$\forall z \in \mathrm{Ran}(\lambda I - A)^{\perp} \Rightarrow \langle z, (\lambda I - A)e_n \rangle = 0,\ \forall n \Rightarrow \bar{\lambda} z_n - z_{n-1} = 0,\ \forall n$

$\Rightarrow |z_n| = |z_{n-1}|,\ \forall n \overset{z \in l^2}{\Rightarrow} z = 0.$

4° $\overline{\mathbb{D}} \subset \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A) \subset \sigma(A) \subset \overline{\mathbb{D}}.$ $\square$

第三章　紧算子与 Fredholm 算子

3.1　紧算子的定义和基本性质

定义 3.1.1. $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$—Banach 空间, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, (1) 如果 A 把 $\mathcal{X}$ 中每个有界集映为 $\mathcal{Y}$ 中列紧集, 则称 A 紧, 记为 A *cpt* 或 $A \in \mathcal{C}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, (2) 如果 A 把 $\mathcal{X}$ 中每个弱收敛序列映为 $\mathcal{Y}$ 中强收敛序列, 则称 A 全连续, (3) 如果 $\dim\mathrm{Ran}(A) < \infty$, 则称 A 是有限秩算子, 记为 $A \in \mathcal{F}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.

命题 3.1.1. 有限秩算子是紧算子.

证明. $\forall M \overset{bdd}{\subset} \mathcal{X} \overset{A\in\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})}{\Rightarrow} A(M) \overset{bdd}{\subset} \mathrm{Ran}(A) \overset{\dim\mathrm{Ran}(A)<\infty}{\Rightarrow} A(M)$ 列紧 (B-W). □

例 3.1.1. $I \in \mathcal{C}(\mathcal{X}) \Leftrightarrow \dim\mathcal{X} < \infty$ (单位球面列紧 $\Leftrightarrow \dim\mathcal{X} < \infty$).

例 3.1.2. 设 $K \in C([a,b]^2)$. $(Tu)(s) \triangleq \int_a^b K(s,t)u(t)\,dt \Rightarrow T \in \mathcal{C}(C[a,b])$.
(HW. $K \in L^2([a,b]^2) \Rightarrow T \in \mathcal{C}(L^2[a,b])$)

证明. 设 $\mathcal{F} \overset{bdd}{\subset} C[a,b] \Rightarrow M \triangleq \sup\limits_{u\in\mathcal{F}} \|u\| < \infty$

$$\Rightarrow \|Tu\| \leqslant \|T\|M,\ \forall u \in \mathcal{F}$$

$\Rightarrow T(\mathcal{F})$ 一致有界. Claim. $T(\mathcal{F})$ 等度连续.
$\forall \varepsilon > 0$, $\forall u \in \mathcal{F}$, 由 $K(\cdot,\cdot)$ 在 $[a,b]^2$ 上一致连续, $\exists\delta > 0$, *s.t.*

$$|K(s',t) - K(s'',t)| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)},\ \forall s',\ s'' \in [a,b]\ \textit{with}\ |s' - s''| < \delta$$

$$\Rightarrow |(Tu)(s')-(Tu)(s'')| \leqslant \int_a^b |K(s',t)-K(s'',t)||u(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{M(b-a)}\|u\|(b-a) < \varepsilon,$$

$$\forall s',\ s'' \in [a,b] \ with \ |s'-s''|<\delta,\ \forall u \in \mathcal{F}$$

$\overset{A-A}{\Rightarrow} T(\mathcal{F})$ 列紧. □

定理 3.1.1. $\mathcal{C}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \overset{closed}{\hookrightarrow} \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.

证明. 设 $\mathcal{C}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \ni A_n \to A$, 来证明 A cpt.

设 $M \overset{bdd}{\subset} \mathcal{X} \Rightarrow C \triangleq \sup\limits_{x\in M}\|x\| < \infty$. Claim. $A(M)$ 列紧.

$\forall \varepsilon > 0$, 取 N 充分大, $s.t.$ $\|A_N - A\| < \frac{\varepsilon}{3C}$, $A_N(M)$ 列紧

$\Rightarrow$ 它有有穷 $\frac{\varepsilon}{3}-$ 网 $\{A_Nx_1,\dots,A_Nx_m\}$, $i.e.$ $\exists x_1,\dots,x_m \in M$, $s.t.$ $A_N(M) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} B(A_Nx_k,\frac{\varepsilon}{3})$.

$\forall x \in M$, $\exists k \in \{1,\dots,m\}$, $s.t.$ $\|A_Nx - A_Nx_k\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

$$\begin{aligned}\|Ax - Ax_k\| &\leqslant \|Ax - A_Nx\| + \|A_Nx - A_Nx_k\| + \|A_Nx_k - Ax_k\| \\ &\leqslant \|A - A_N\|C + \frac{\varepsilon}{3} + \|A_N - A\|C < \varepsilon\end{aligned}$$

$\Rightarrow \{Ax_1,\dots,Ax_m\}$ 是 $A(M)$ 的 $\varepsilon-$ 网 $\Rightarrow A(M)$ 列紧. □

定理 3.1.2. 紧算子值域可分.

证明. 设 $A \in \mathcal{C}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \Rightarrow \mathrm{Ran}(A) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A(B_{\mathcal{X}}(0,n))$,

设 M_n 是 $A(B_{\mathcal{X}}(0,n))$ 的可数稠密子集 (列紧 $\Rightarrow$ 可分, 取有穷 $\frac{1}{n}-$ 网的并集)

$\Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ 是 $\mathrm{Ran}(A)$ 的可数稠密子集. □

定理 3.1.3. 紧算子与有界算子的复合是紧算子,

1° $\begin{cases} A \in \mathcal{C}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \\ T \in \mathcal{L}(\mathcal{Y},\mathcal{Z}) \end{cases} \Rightarrow T\circ A \in \mathcal{C}(\mathcal{X},\mathcal{Z})$, 2° $\begin{cases} T \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \\ A \in \mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{Z}) \end{cases} \Rightarrow A\circ T \in \mathcal{C}(\mathcal{X},\mathcal{Z})$.

证明. 1° $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \overset{bdd}{\subset} \mathcal{X} \overset{A\ cpt}{\Rightarrow} \{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有子列 $\{Ax_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛 $\overset{T连续}{\Rightarrow} \{TAx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛.

2° $M \overset{bdd}{\subset} \mathcal{X} \overset{T有界}{\Rightarrow} T(M) \overset{bdd}{\subset} \mathcal{Y} \overset{A\ cpt}{\Rightarrow} A(T(M))$ 列紧. □

定理 3.1.4. 对 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, (1) 紧 $\Rightarrow$ 全连续, (2) 如果 $\mathcal{X}$ 自反, 则 A 紧 $\Leftrightarrow$ A 全连续.

证明. (1) 假设 A 紧但不全连续, $\exists x_n \xrightarrow{w} x_0$, $s.t.\ \|Ax_n - Ax_0\| \nrightarrow 0$

$\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$, $\exists$ 子列 $\{Ax_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $s.t.\ \|Ax_{n_k} - Ax_0\| \geqslant \varepsilon_0$.

$x_{n_k} \xrightarrow{w} x_0 \overset{UBP}{\Rightarrow} \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 有界

$\overset{A\ cpt}{\Rightarrow} \{Ax_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 有收敛子列, 不妨设 $\|Ax_{n_k} - y\| \to 0$ (故也弱收敛).

$\forall f \in \mathcal{Y}^*$, $f(Ax_{n_k} - Ax_0) = (A^*f)(x_{n_k} - x_0) \to 0$ (由弱收敛) $\Rightarrow Ax_{n_k} \xrightarrow{w} Ax_0$

$\Rightarrow Ax_0 = y$ (弱收敛极限唯一) $\Rightarrow \|Ax_{n_k} - Ax_0\| \to 0$, 矛盾.

(2) 设 $\mathcal{X}$ 自反, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \overset{bdd}{\subset} \mathcal{X} \Rightarrow$ 有子列 $x_{n_k} \xrightarrow{w} x_0$ (Eberlein-Smalain)

$\overset{A\text{全连续}}{\Rightarrow} \|Ax_{n_k} - Ax_0\| \to 0$. □

3.2 Riesz-Fredholm 理论

定理 3.2.1. (Riesz-Fredholm) 设 $A \in \mathcal{C}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, $T \triangleq I - A$, (1) $\dim\ker(T) < \infty$, (2) $\mathrm{Ran}(T) \overset{closed}{\hookrightarrow} \mathcal{X}$ (闭值域算子), (3) (F.A., Fredholm Alternative, 二择一律) T 单 $\Leftrightarrow$ T 满, (4) $\mathrm{Ran}(T) = \ker(T^*)^{\perp}$ (这里对 $\mathcal{F} \in \mathcal{X}^*$, $\mathcal{F}^{\perp} \triangleq \{x \in \mathcal{X} \mid f(x) = 0,\ \forall f \in \mathcal{F}\}$, 称为 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{X}$ 中的零化子), (5) $\dim\ker(T) = \dim\ker(T^*)$.

回忆: $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - A$ 不是单射$\}$, $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - A$ 单但不满, $\mathrm{Ran}(\lambda I - A) \overset{dense}{\hookrightarrow} \mathcal{X}\}$, $\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - A$ 单, $\overline{\mathrm{Ran}(\lambda I - A)} \neq \mathcal{X}\}$.

$\dim\mathcal{X} < \infty$ 时, $\mathrm{Ran}(\lambda I - A) \overset{closed}{\hookrightarrow} \mathcal{X} \Rightarrow \sigma_c(A) = \phi$; T 单 $\Leftrightarrow$ T 满 (有限维时) $\Rightarrow \sigma_r(A) = \phi$.

$$\text{二择一}\begin{cases} \forall y \in \mathcal{X},\ \text{方程 } Tx = y \text{ 有唯一解 } (T \text{ 是双射}) \\ \forall y \in \mathcal{X},\ \text{方程 } Tx = y \text{ 无解 } (\Leftrightarrow T \text{ 不是满射} \overset{F.A.}{\Leftrightarrow} T \text{ 不是单射} \Leftrightarrow Tx = 0 \text{ 有非零解}) \end{cases}.$$

证明. (Proof of (1))

令 $M \triangleq \ker(T)$, $S_M \triangleq M$ 中单位球面, $S_{\mathcal{X}} \triangleq \mathcal{X}$ 中单位球面.

$$x \in S_M \Leftrightarrow \begin{cases} x \in S_{\mathcal{X}} \\ (I - A)x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in S_{\mathcal{X}} \\ x = Ax \in A(S_{\mathcal{X}}) \end{cases} \Rightarrow S_M \subset A(S_{\mathcal{X}}) \text{ (列紧)}$$

$\Rightarrow S_M$ 列紧 $\Rightarrow \dim M < \infty$. □

定理 3.2.2. $A \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$, $T = I - A \Rightarrow \mathrm{Ran}(T) \overset{closed}{\hookrightarrow} \mathcal{X}$.

证明. 设 $\mathrm{Ran}(T) \ni y_n \to y$, $\exists x_n \in \mathcal{X}$, $s.t.\ y_n = Tx_n$.

Case 1. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界.

$A\ cpt \Rightarrow \{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有收敛子列 $\{Ax_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 设 $Ax_{n_k} \to u$

$\overset{x_{n_k}=y_{n_k}+Ax_{n_k}}{\Rightarrow} x_{n_k} \to y + u \Rightarrow y_{n_k} = Tx_{n_k} \to T(y+u) \Rightarrow y = T(y+u) \in \mathrm{Ran}(T)$.

Case 2. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 无界.

令 $d_n \triangleq \mathrm{dist}(x_n, \ker(T)) \overset{\dim\ker(T)<\infty}{\Rightarrow} \exists z_n \in \ker(T)$, $s.t.\ \|x_n - z_n\| = d_n$ (最佳逼近元).

Claim. $\{x_n - z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界.

假设不然 $\Rightarrow \sup\limits_n d_n = +\infty$, 不妨设 $d_n \to +\infty$, 令 $v_n \triangleq \frac{x_n - z_n}{\|x_n - z_n\|}$, $n = 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow Tv_n = \frac{Tx_n - Tz_n}{d_n} = \frac{y_n - 0}{d_n} \to 0$ (由 y_n 收敛, 故有界).

$\|v_n\| = 1 \overset{A\ cpt}{\Rightarrow} \{Av_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有收敛子列, 设 $Av_{n_k} \to w$

$\overset{v_{n_k}=Tv_{n_k}+Av_{n_k}}{\Rightarrow} v_{n_k} \to w \Rightarrow Tv_{n_k} \to Tw$. (由 T 连续).

另一方面, $Tv_{n_k} \to 0 \Rightarrow Tw = 0 \Rightarrow w \in \ker(T)$.

$\forall z \in \ker(T)$, $\|v_n - z\| = \frac{1}{d_n}\|x_n - (z_n + d_n z)\| \geqslant \frac{d_n}{d_n} = 1$

$\Rightarrow \mathrm{dist}(v_n, \ker(T)) \geqslant 1$, 这与 $v_{n_k} \to w \in \ker(T)$ 矛盾.

现在 $\{x_n - z_n\}_{n=1}^{\infty} \overset{bdd}{\subset} \mathcal{X}$, $s.t.\ T(x_n - z_n) = y_n \Rightarrow$ 约化为 Case 1. □

定理 3.2.3. (F.A.) $A \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$, $T \triangleq I - A$, 则 T 单 $\Leftrightarrow T$ 满.

引理 3.2.4. $A \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$, $T = I - A$, (1) $\ker(T) \subset \ker(T^2) \subset \ldots$ (平凡), (2) $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $s.t.\ \ker(T^n) = \ker(T^{n+1})$.

证明. (Proof of (2))

假设 $\forall n$, $\ker(T^n) \overset{closed}{\hookrightarrow} \ker(T^{n+1})$, 且 $\ker(T^n) \neq \ker(T^{n+1})$

$$\overset{Riesz\ Lem}{\Rightarrow} \exists x_n \in \ker(T^{n+1}),\ \|x_n\| = 1,\ s.t.\ \mathrm{dist}(x_n, \ker(T^n)) > \frac{1}{2}.$$

$\overset{A\ cpt}{\Rightarrow} \{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有收敛子列. 而 $\forall n, m$, 不妨设 $n > m$,

$$T^n(Tx_n + Ax_m) = T^{n+1}x_n + A(T^n x_m) = 0 \ (\text{由 } n > m \Rightarrow x_m \in \ker(T^n))$$

$\Rightarrow Tx_n + Ax_m \in \ker(T^n)$

$$\Rightarrow \|Ax_n - Ax_m\| = \|x_n - (Tx_n + Ax_m)\| > \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ 没有收敛子列, 矛盾. □

证明. (Proof of F.A.)

"$\Leftarrow$" 假设 T 满但不单 $\Rightarrow \ker(T) \neq \{0\} \Rightarrow \exists 0 \neq x_0 \in \ker(T)$

$$\overset{T\text{满}}{\Rightarrow} \exists x_1 \in \mathcal{X},\ s.t.\ Tx_1 = x_0,\ \exists x_2 \in \mathcal{X},\ s.t.\ Tx_2 = x_1, \ldots$$

$$\Rightarrow 0 \neq x_0 = Tx_1 = T^2x_2 = T^3x_3 = \cdots \Rightarrow \begin{cases} T^n x_n \neq 0 \\ T^{n+1}x_n = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_n \in \ker(T^{n+1}) \backslash \ker(T^n),\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, 这与 Lem 中 (2) 矛盾.

"$\Rightarrow$" 假设 T 单但不满, 令 $X_1 \triangleq T(\mathcal{X}) = \mathrm{Ran}(T)$

$\underset{T\text{单}}{\overset{T\text{不满}}{\Rightarrow}} X_2 \triangleq T(X_1) \overset{closed}{\hookrightarrow} X_1$, 且 $X_2 \neq X_1$.

(假设 $X_2 = X_1$, 取 $x_0 \in \mathcal{X} \backslash X_1$, $Tx_0 \in T(\mathcal{X}) = X_1 = X_2 = T(X_1) \Rightarrow \exists x_0' \in X_1,\ s.t.\ Tx_0 = Tx_0'$, 这与 T 单矛盾)

$X_n \triangleq T^n(\mathcal{X}) \Rightarrow X_{n+1} \overset{closed}{\hookrightarrow} X_n$, 且 $X_{n+1} \neq X_n$

$$\overset{Riesz\ Lem}{\Rightarrow} \exists x_n \in X_n,\ \|x_n\| = 1,\ s.t.\ \mathrm{dist}(x_n, X_{n+1}) > \frac{1}{2}.$$

$\forall n, m \in \mathbb{N}^*$, 不妨设 $n > m$,

$$Ax_m - Ax_n = -(x_m - Ax_m) + (x_n - Ax_n) + x_m - x_n = x_m - (Tx_m - Tx_n + x_n)$$

$\Rightarrow \|Ax_m - Ax_n\| > \frac{1}{2}$ (由 $n > m \Rightarrow Tx_m - Tx_n + x_n \in X_{m+1}$) , 这与 A cpt 矛盾. □

引理 3.2.5. 设 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, (1) $\ker(T^*) = {}^{\perp}\mathrm{Ran}(T)$ (对 $M \subset \mathcal{X}$, ${}^{\perp}M \triangleq \{f \in \mathcal{X}^* \mid f(x) = 0,\ \forall x \in M\}$), (2) $\ker(T^*)^{\perp} = \overline{\mathrm{Ran}(T)}$ (由 Fredholm 中 $\mathrm{Ran}(T)$ 闭, 即得 (4)).

证明. (1)

$$f \in {}^{\perp}\mathrm{Ran}(T) \Leftrightarrow f(Tx) = 0,\ \forall x \in \mathcal{X} \Leftrightarrow (T^* f)(x) = 0,\ \forall x \in \mathcal{X}$$
$$\Leftrightarrow T^* f = 0 \Leftrightarrow f \in \ker(T^*).$$

(2) $\ker(T^*)^{\perp} = ({}^{\perp}\mathrm{Ran}(T))^{\perp} \supset \mathrm{Ran}(T) \Rightarrow \overline{\mathrm{Ran}(T)} \subset \overline{\ker(T^*)^{\perp}} = \ker(T^*)^{\perp}$.

Claim. $\ker(T^*)^{\perp} \subset \overline{\mathrm{Ran}(T)}$.

$\forall x \in \ker(T^*)^{\perp} \Rightarrow x \in ({}^{\perp}\mathrm{Ran}(T))^{\perp}$.

由 HBT, $x \in \overline{\mathrm{Ran}(T)} \Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{X}^*$ *with* $f(\mathrm{Ran}(T)) = 0$, 必有 $f(x) = 0$,

而 $f(\mathrm{Ran}(T)) = 0 \Rightarrow f \in {}^{\perp}\mathrm{Ran}(T) \overset{x \in ({}^{\perp}\mathrm{Ran}(T))^{\perp}}{\Rightarrow} f(x) = 0 \Rightarrow x \in \overline{\mathrm{Ran}(T)}$. □

3.3 紧算子的谱理论

定理 3.3.1. (Riesz-Schouder) 设 $A \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$, (1) 如果 $\dim \mathcal{X} = \infty$, 则 $0 \in \sigma(A)$, (2) $\sigma(A)\backslash\{0\} = \sigma_p(A)\backslash\{0\}$ (非 0 谱点一定是特征值), (3) 非零特征值的特征子空间一定是有限维的, (4) 不同特征值的特征向量线性无关, (5) 0 是 $\sigma(A)$ 唯一可能的极限点.

证明. (1) 假设 $0 \in \rho(A) \Rightarrow (0I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) \Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$

$\Rightarrow I = A^{-1}A$ 紧 (紧与有界复合是紧算子) $\Rightarrow \dim \mathcal{X} < \infty$, 矛盾.

(2) 即证 $\forall \lambda \notin c_p(A),\ \lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$.

$\lambda \notin \sigma_p(A) \Rightarrow \lambda I - A$ 单 $\overset{F.A.}{\Rightarrow} \lambda I - A = \lambda(I - \frac{A}{\lambda})$ 是双射

$\overset{IMT}{\Rightarrow} (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$.

(3) $\forall 0 \neq \lambda \in c_p(A),\ \ker(\lambda I - A) = \ker(I - \frac{A}{\lambda}) \overset{Fredholm}{\Rightarrow} \dim\ker(I - \frac{A}{\lambda}) < \infty$.

(4) 同线性代数证明.

(5) 假设 $\sigma(A)$ 有极限点 $\lambda_0 \neq 0 \Rightarrow \exists \lambda_n \in \sigma(A),\ n = 1, 2, \ldots,\ s.t.\ \lambda_n \to \lambda_0$,

当 n 充分大, $\lambda_n \neq 0 \Rightarrow$ 不妨设 $\lambda_n \neq 0,\ \forall n \Rightarrow \lambda_n \in c_p(A),\ \frac{1}{\lambda_n} \to \frac{1}{\lambda_0} \Rightarrow \sup_n |\frac{1}{\lambda_n}| < \infty$.

还可假设 $\lambda_n,\ n = 1, 2, \ldots$ 互不相同, 对每个 n, 取 $x_n \in \ker(\lambda_n I - A)$

$\Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 线性无关, 令 $X_n \triangleq \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_n\},\ n = 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow X_n \overset{closed}{\hookrightarrow} X_{n+1},\ X_n \neq X_{n+1}$

$$\overset{Riesz\ Lem}{\Rightarrow} \exists y_n \in X_n,\ \|y_n\| = 1,\ s.t.\ \mathrm{dist}(y_n, X_{n-1}) > \frac{1}{2}.$$

$y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, $(\lambda_n I - A)y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k(\lambda_n I - A)x_k = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k(\lambda_n - \lambda_k)x_k \in X_{n-1}$,
$\forall n, m \in \mathbb{N}^*$, 不妨设 $n > m$,

$$\|A(\frac{y_n}{\lambda_n}) - A(\frac{y_m}{\lambda_m})\| = \|y_n - [\frac{1}{\lambda_n}(\lambda_n - A)y_n + A(\frac{y_m}{\lambda_m})]\| \geqslant \mathrm{dist}(y_n, X_{n-1}) > \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \{A(\frac{y_n}{\lambda_n})\}_{n=1}^{\infty}$ 没有收敛子列. 但另一方面, $\sup\limits_n \|\frac{y_n}{\lambda_n}\| = \sup\limits_n |\frac{1}{\lambda_n}| < \infty$

$\overset{A\ cpt}{\Rightarrow} \{A(\frac{y_n}{\lambda_n})\}_{n=1}^{\infty}$ 有收敛子列, 矛盾. □

推论 3.3.2. $A \in \mathcal{C}(\mathcal{X}) \Rightarrow \sigma(A)$ 至多可数.

证明. 设 $E_k \triangleq \sigma_p(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > \frac{1}{k}\} \Rightarrow \sigma(A)\backslash\{0\} = \sigma_p(A)\backslash\{0\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$.
Claim. $\#E_k < \infty$, $\forall k$.
假设不然 $\overset{B-W}{\Rightarrow} E_k$ 有极限点 λ_0 (由谱的有界性), 但 $\lambda_0 \geqslant \frac{1}{k} \Rightarrow \lambda_0 \neq 0$,
这与 0 是唯一可能的极限点矛盾. □

推论 3.3.3. 设 $\dim(\mathcal{X}) = \infty$, $A \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$, 则只有以下三种情形: (1) $\sigma(A) = \{0\}$, (2) $\sigma(A) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, (3) $\sigma(A) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ *with* $\lambda_n \to 0$, 这里 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \in \sigma_p(A)$.

证明. 令 $F_0 \triangleq \sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \geqslant 1\}$, $F_k \triangleq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{k+1} \leqslant \|\lambda\| < \frac{1}{k}\}$
$\Rightarrow \sigma(A)\backslash\{0\} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, $\#F_k < \infty$, $\forall k$. 将 F_0, $F_1, \dots$ 中元素顺次排列即得. □

例 3.3.1. $A = 0 \Rightarrow \sigma(A) = \sigma_p(A) = \{0\}$.

例 3.3.2. $A : l^2 \to l^2$, $(x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots)$
$\Rightarrow A \in \mathcal{C}(l^2)$, $\sigma_p(A) = \phi$, $\sigma(A) = \{0\}$ (HW).

例 3.3.3. 给定 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, 令 $A_n : l^2 \to l^2$, $(x_1, x_2, \dots) \mapsto (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n, 0, \dots)$
$\Rightarrow A \in \mathcal{F}(l^2)$ (有限秩算子) $\subset \mathcal{C}(l^2)$.
$A_n e_k = \lambda_k e_k$, $k = 1, \dots, n$, $A_n e_{n+1} = 0 \Rightarrow \{0, \lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \sigma_p(A)$,
而且 $\forall \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0, \lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $(\lambda I - A_n)x = 0 \Leftrightarrow ((\lambda - \lambda_1)x_1, \dots, (\lambda - \lambda_n)x_n, \lambda x_{n+1}, \dots) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow \lambda I - A_n$ 是单射 $\overset{F.A.}{\Rightarrow} \lambda I - A_n$ 是双射 $\Rightarrow \lambda \in \rho(A_n)$.

例 3.3.4. 给定 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ *with* $\lambda_n \to 0$

$A: l^2 \to l^2,\ (x_1, x_2, \dots) \mapsto (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots) \Rightarrow \|Ax\| \leqslant (\sup\limits_n |\lambda_n|)\|x\| \Rightarrow A \in \mathcal{L}(l^2)$.

$\lambda_n \to 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ s.t.\ |\lambda_k| < \varepsilon,\ \forall k \geqslant N$

$$\|A - A_N\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax - A_N x\| = \sup_{\|x\|=1} \Big(\sum_{k=N+1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |x_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sup_{\|x\|=1} \varepsilon \|x\| = \varepsilon$$

$\Rightarrow \|A - A_n\| \to 0$ *as* $n \to \infty \Rightarrow A \in \mathcal{C}(l^2)$ (由 $\mathcal{C}(\mathcal{X}) \overset{closed}{\hookrightarrow} \mathcal{L}(\mathcal{X})$).

$Ae_n = \lambda e_n,\ k = 1, 2, \cdots \Rightarrow \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\} \subset \sigma_p(A)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0, \lambda_1, \lambda_2, \dots\},\ \inf\limits_k |\lambda - \lambda_k| > 0$ (否则有非零极限点) $\Rightarrow \sup\limits_k \frac{1}{|\lambda - \lambda_k|} < \infty$,

令 $T: l^2 \to l^2,\ (x_1, x_2, \dots) \mapsto (\frac{x_1}{\lambda - \lambda_1}, \frac{x_2}{\lambda - \lambda_2}, \dots) \Rightarrow \|Tx\| \leqslant (\sup\limits_k \frac{1}{|\lambda - \lambda_k|})\|x\|$

$\Rightarrow T \in \mathcal{L}(l^2)$, 且 $T = (\lambda I - A)^{-1} \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$.