§11.8 微分形式的积分

11.8.1 三维空间微分形式的积分

1. 设有区域 $D \subset \mathbb{R}^3$, 连续向量场 $\vec{F} = (P, Q, R): D \to \mathbb{R}^3$. 又设 $L \subset D$ 是一条有向光滑曲线, 其参数方程为 $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, 并且参数增加的方向为 L 的方向, 则有

$$\int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\alpha^\beta (\vec{F} \circ \vec{r}) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt.$$

记 $\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, 它是定义在 D 上的一个一次微分形式. 上式可以写成

$$\int_L \omega = \int_\alpha^\beta (\vec{F} \circ \vec{r}) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt. \tag{11.1}$$

2. 设有区域 $V \subset \mathbb{R}^3$, 连续向量场 $\vec{F} = (P, Q, R) : V \to \mathbb{R}^3$. 又设 $S \subset V$ 是一片有向光滑曲面, 其参数方程为 $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, 并且参数增加的方向为 S 的方向协调, 则有

$$\iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$
$$= \iint_D \left(P \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) du dv.$$

记

$$\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy,$$

它是定义在 V 上的一个二次微分形式. 上面的积分可以写成

$$\int_S \omega = \iint_D \left(P \circ \vec{r} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + Q \circ \vec{r} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + R \circ \vec{r} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) du dv. \quad (11.2)$$

3. 设有区域 $V \subset \mathbb{R}^3$, 连续函数 $P: V \to \mathbb{R}^3$. 又设 $\Omega \subset V$ 是 V 中有向立体 (体表面法向朝外), 其参数方程为

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v, w),\ (u, v, w) \in D,$$

并且参数增加的方向与 Ω 的方向协调, 则有

$$\iiint_{\Omega} P dx \wedge dy \wedge dz = \iiint_{D} P \circ \vec{r} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} dudvdw.$$

记

$$\omega = P dx \wedge dy \wedge dz,$$

它是定义在 V 上的一个三次微分形式. 上面的积分可以写成

$$\int_{\Omega} \omega = \iiint_{D} P \circ \vec{r} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} dudvdw. \tag{11.3}$$

返回 全屏 关闭 退出

11.8.2 n 维空间微分形式的积分

在 n 维空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 记向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 称

$$\sum_{i_1,\cdots,i_p} a_{i_1,\cdots,i_p}(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \tag{11.4}$$

为一个 p 次微分形式, $a_{i_1,\cdots,i_p}(x)$ 是 n 元函数, 标号 $i_1, \cdots, i_p$ 中的每一个都独立地从 1 取到 n. 上式可以简记为

$$\sum_I a_I(x) dx_I, \tag{11.5}$$

这里 $I = (i_1, \cdots, i_p)$ 它的每个分量从 1 取到 n. 约定

$$\begin{cases} dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \\ dx_i \wedge dx_i = 0. \end{cases} \tag{11.6}$$

因此, (1) 可以写成

$$\omega = \sum a_{i_1,\cdots,i_p}(x)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \tag{11.7}$$

这里的求和是对一切适合条件 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n$ 的指标进行.

设 $\mathbb{R}^n$ 中的 p 维曲面 S 有参数表示

$$\Phi : \begin{cases} x_1 = x_1(u_1, \cdots, u_p) \\ \cdots\cdots \\ x_n = x_n(u_1, \cdots, u_p) \end{cases}$$

其中 $u = (u_1, \cdots, u_p) \in E \subset \mathbb{R}^p$, E 称为 S 的参数域, 并且

$$x_i = x_i(u_1, \cdots, u_p)\ (i = 1, \cdots, n)$$

有一阶连续偏导数. 所以 S 就是从 $E \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ 的 C^1 向量值函数.

设 ω 是 (4) 中 p 次微分形式:

$$\omega = \sum a_{i_1,\cdots,i_p}(x)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}.$$

定义 ω 在 S 上的积分为

$$\int_S \omega = \int_E \sum_{i_1,\cdots,i_p} a_{i_1,\cdots,i_p}(\Phi(u)) \frac{\partial(x_{i_1},\cdots,x_{i_p})}{\partial(u_1,\cdots,u_p)} du_1 \cdots du_p \tag{11.8}$$

它是 E 上的一个 p 重积分.

当 p 分别取 $1, 2$ 和 3 时, 我们就得到第二型曲线积分, 第二型曲面积分的计算公式, 和三重积分换元公式.

||◄ ►|| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出

11.8.3 Stokes 公式一般形式

若有向曲线 L 是空间区域 V 中有向曲面 S 的边界, 即, $L = \partial S$,

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$$

是 V 上光滑一次微分形式, 则根据 Stokes 公式, 有

$$\oint_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy,$$

这可以写成

$$\oint_{\partial S} \omega = \iint_S d\omega.$$

若有向曲面 S 是空间区域 V 中有向立体 Ω 的边界, 即, $S = \partial\Omega$,

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

是 V 上光滑二次微分形式, 则根据 Gauss 公式, 有

$$\begin{aligned}&\oiint_{\partial\Omega} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy\\ = &\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial Z}\right) dx \wedge dy \wedge dz.\end{aligned}$$

这可以写成

$$\oiint_{\partial\Omega} \omega = \iiint_{\Omega} d\omega.$$

在 n 维空间中, 我们有如下一般的 Stokes 公式:

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega, \tag{11.9}$$

这里 ω 是 p 次微分形式, Ω 是 $p+1$ $(p \leqslant n-1)$ 维曲面.

11.8.4 全微分方程

p 次 $(p \geqslant 1)$ 微分形式 ω 称为恰当微分形式 (或全微分形式), 若存在 $p-1$ 次微分形式 θ, 使得 $\omega = d\theta$, 即, 恰当微分形式是另一个微分形式的外微分.

根据 Poincaré 引理, 微分形式做两次外微分运算所得为零, 因此, ω 为恰当微分形式的必要条件是: $d\omega = 0$.

在三维空间中, 一次微分形式 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ 是否是恰当微分形式, 等价于向量场 $F = (P, Q, R)$ 是否有势函数; 二次微分形式 $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ 是否是恰当微分形式, 等价于向量场 $F = (P, Q, R)$ 是否有向量势.

从上一节的讨论可知, 微分形式是否是恰当微分形式的问题与向量场所在空间的结构有关, 并不能仅从必要条件 $d\omega = 0$ 来判断.

在 xy 平面上, 若微分形式

$$\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

是恰当的, 则称微分方程

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{11.10}$$

称为全微分方程. 此时存在势函数 $\varphi(x,y)$, 使得

$$d\varphi = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

因此上面的方程就是 $d\varphi = 0$. 故, 方程的解是

$$\varphi(x,y) = C,$$

其中 C 是任意常数. 当 P,Q 在区域中光滑, 且 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ 时, 方程的通积分就是

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = C.$$

例 1 求解微分方程

$$(2x\cos y - y^2\sin x)dx + (2y\cos x - x^2\sin y)dy = 0.$$

解 命 $P(x,y) = 2x\cos y - y^2\sin x$, $Q(x,y) = 2y\cos x - x^2\sin y$, 则在全平面有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -2y\sin x - 2x\sin y.$$

故原方程为全微分方程. 因为

$$\begin{aligned}\int_{(0,0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy &= \int_0^x P(t,0)dt + \int_0^y Q(x,t)dt\\ &= x^2 + \left[y^2\cos x + x^2(\cos y - 1)\right]\\ &= y^2\cos x + x^2\cos y.\end{aligned}$$

于是方程的通积分为

$$y^2\cos x + x^2\cos y = C.$$

一般来说, 如果

$$\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

不是全微分形式, 理论上可以证明, 存在函数 $\mu(x,y)$ 使

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy$$

为全微分形式, 函数 $\mu(x,y)$ 称为积分因子. 积分因子并不影响方程

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

μ 是积分因子等价于 $\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial y}$, 即

$$Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mu$$

因此, 积分因子虽然存在, 但要找一个积分因子可能比解原方程还要难. 但在某些时候能用观察法找出一个积分因子, 这时可以通过求解全微分方程的通积分得到原方程的通积分.

例 2 求解微分方程

$$\left(\frac{3x^2}{y}+6xy\right)dx+(6x^2-4y^2)dy=0.$$

解 该方程不是全微分方程, 但容易看出 $\mu(x,y)=y$ 是方程的积分因子, 即, 方程

$$\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y-4y^3\right)dy=0.$$

是全微分方程. 因为

$$\begin{aligned}
&\int_{(0,0)}^{(x,y)}\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y-4y^3\right)dy\\
=&\int_0^x 3t^2\,dt+\int_0^y(6x^2t-4t^3)\,dt\\
=&\,x^3+3x^2y^2-y^4.
\end{aligned}$$

所以原方程的通积分为

$$x^3+3x^2y^2-y^4=C.$$

例 3 求解微分方程

$$(x+y^2)dx - 2xy\,dy = 0.$$

解 该方程不是全微分方程, 但容易看出 $\mu(x,y) = \frac{1}{x^2}$ 是方程的积分因子. 于是由

$$\frac{x+y^2}{x^2}dx - \frac{2y}{x}\,dy = d\left(\ln|x| - \frac{y^2}{x}\right) = 0$$

即得原方程的通积分为

$$x = Ce^{\frac{y^2}{x}}.$$