



随机过程习题解析（未完成版）

@Author: jkadbear

@Repo: https://github.com/jkadbear/Stochastic_Process

2018-01-09

1.1 令 $X(t)$ 为二阶矩存在的随机过程. 试证它是宽平稳的当且仅当 $EX(t)$ 与 $EX(t)X(s+t)$ 都不依赖 s .

证:

充分性: 若 $EX(s)$ 与 $EX(s)X(s+t)$ 都不依赖 s

则 $EX(s) = \text{常数 } m, EX(s)X(s+t) = f(t)$

令 $s' = s+t,$

$$\therefore EX(s)X(s') = f(s' - s)$$

$$\begin{aligned} \therefore R_X(s, s') &= EX(s)X(s') - EX(s)EX(s') \\ &= f(s' - s) - m^2 \end{aligned}$$

$\therefore X(t)$ 是宽平稳的

必要性: 若 $X(t)$ 宽平稳则 $EX(S)$ 为常数 m , 即 $EX(S)$ 与 s 无关

则

$$\begin{aligned} R_X(s, s') &= EX(s)X(s') - EX(s)EX(s') \\ &= g(s' - s) \end{aligned}$$

令 $s' = s+t$

则 $EX(s)X(s+t) = m^2 + g(t)$ 与 s 无关

1.2 记 U_1, \dots, U_n 为在 $(0, 1)$ 中均匀分布的独立随机变量. 对 $0 < t, x < 1$ 定义

$$I(t, x) = \begin{cases} 1, & x \leq t, \\ 0, & x > t, \end{cases}$$

并记 $X(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(t, U_k), 0 \leq t \leq 1$, 这是 U_1, \dots, U_n 的经验分布函数. 试求过程 $X(t)$ 的均值和协方差函数.

解:

$$\begin{aligned} EX(t) &= E\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(t, U_k)\right] \\ &= EI(t, U_1) \\ &= \int_0^t 1 dx = t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_X(s,t) &= E[X(s)X(t)] - EX(s)EX(t) \\
&= E\left[\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n I(s,U_i) \cdot \sum_{j=1}^n I(s,U_j)\right] - st \\
&= \frac{1}{n^2} [(n^2 - n)E(I(s,U_1) \cdot I(t,U_2)) + nE(I(s,U_1) \cdot I(t,U_1))] - st \\
&= \frac{1}{n^2} [(n^2 - n)st + n \cdot \min(s,t)] - st \\
&= \frac{1}{n} [\min(s,t) - st]
\end{aligned}$$

1.3 令 Z_1, Z_2 为独立的正态随机变量, 均值为 0, 方差为 σ^2 , λ 为实数. 定义过程 $X(t) = Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t$. 试求 $X(t)$ 的均值函数和协方差函数. 它是宽平稳的吗?

解:

$$\begin{aligned}
EX(t) &= \cos \lambda t EZ_1 + \sin \lambda t EZ_2 = 0 \\
R_X(s,t) &= Cov(Z_1 \cos \lambda s + Z_2 \sin \lambda s, Z_2 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t) \\
&= \cos \lambda s \cos \lambda t Cov(Z_1, Z_1) + \sin \lambda s \sin \lambda t Cov(Z_2, Z_2) \\
&= \sigma^2 \cos \lambda (s-t)
\end{aligned}$$

只与 $s-t$ 有关, \therefore 是宽平稳的

1.4 Poisson 过程 $X(t), t \geq 0$ 满足 (i) $X(t) = 0$; (ii) 对 $t > s$, $X(t) - X(s)$ 服从均值为 $\lambda(t-s)$ 的 Poisson 分布; (iii) 过程是有独立增量的. 试求其均值函数和协方差函数. 它是宽平稳的吗?

解:

$$\begin{aligned}
EX(t) &= E[X(t) - X(0)] = \lambda t \\
R_X(s,t) &= Cov(X(t), X(s)) \\
&= Cov(X(s) - X(t) + X(t) - X(0), X(t) - X(0)) \\
&= Cov(X(t) - X(0), X(t) - X(0)) \quad (\text{独立增量}) \\
&= \lambda t \quad (s \geq t)
\end{aligned}$$

\therefore 非宽平稳

1.5 $X(t)$ 为第 4 题中的 Poisson 过程. 记 $Y(t) = X(t+1) - X(t)$, 试求过程 $Y(t)$ 的均值函数和协方差函数, 并研究其平稳性.

解：

$$EY(t) = EX(t+1) - EX(t) = \lambda$$

$$\begin{aligned} R_X(s,t) &= Cov(X(s+1) - X(s), X(t+1) - X(t)) \\ &= Cov(X(s+1), X(t+1)) + Cov(X(s), X(t)) \\ &\quad - Cov(X(s), X(t+1)) - Cov(X(s+1), X(t)) \\ &= \lambda [\min(s+1, t+1) + \min(s, t) - \min(s, t+1) - \min(s+1, t)] \end{aligned}$$

令 $\beta = s - t$, 当 $\beta > 1$ 或 $\beta < -1$ 时, $R_Y(s,t) = 0$

当 $0 < \beta \leq 1$ 时, $R_Y(s,t) = \lambda(t+1+t-s-t) = \lambda(t-s+1)$

当 $-1 \leq \beta \leq 0$ 时, $R_Y(s,t) = \lambda(s+1+s-s-t) = \lambda(s-t+1)$

\therefore 宽平稳

1.6 令 Z_1 和 Z_2 是独立同分布的随机变量. $P(Z_1 = -1) = P(Z_1 = 1) = \frac{1}{2}$. 记 $X(t) = Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t$, $t \in R$. 试证 $X(t)$ 是宽平稳的, 它是严平稳的吗?

解：

$$EZ_1 = EZ_2 = 0$$

$$EX(t) = \cos \lambda t EZ_1 + \sin \lambda t EZ_2 = 0$$

$$\begin{aligned} R_X(s,t) &= Cov(Z_1 \cos \lambda s + Z_2 \sin \lambda s, Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t) \\ &= \cos \lambda s \cos \lambda t Cov(Z_1, Z_1) + \sin \lambda s \sin \lambda t Cov(Z_2, Z_2) \\ &= 2 \cos \lambda (s-t) Var Z_1 \\ &= 2 \cos \lambda (s-t) (E(Z_1^2) - E^2(Z_1)) \\ &= \cos \lambda (s-t) \end{aligned}$$

\therefore 是宽平稳

$$F_t(x) = P(Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t \leq x)$$

考虑 $F_t(0) = P(Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t \leq 0)$

当 $t = 0$ 时 $F_t(0) = P(Z_1 \leq 0) = \frac{1}{2}$

当 $t = \frac{\pi}{4\lambda}$ 时 $F_t(0) = P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(Z_1 + Z_2) \leq 0\right) = \frac{3}{4}$

$\therefore F_t(x)$ 与 t 有关, 故 $X(t)$ 不是严平稳过程

1.7. 试证：若 Z_0, Z_1, \dots 为独立同分布随机变量, 定义 $X_n = Z_0 + Z_1 + \dots + Z_n$, 则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是独立增量过程.

证：对 $\forall n$ 及 $\forall t_1, \dots, t_n \in \{0, 1, 2, \dots\}, t_1 < t_2 < \dots < t_n$, 有

$$\begin{cases} X(t_2) - X(t_1) = Z_{t_1+1} + \dots + Z_{t_2}, \\ X(t_3) - X(t_2) = Z_{t_2+1} + \dots + Z_{t_3}, \\ \dots\dots\dots \\ X(t_n) - X(t_{n-1}) = Z_{t_{n-1}+1} + \dots + Z_{t_n}. \end{cases}$$

由题知 $Z_{t_1+1}, \dots, Z_{t_n}$ 互相独立,

$\therefore (Z_{t_1+1}, \dots, Z_{t_2}), (Z_{t_2+1}, \dots, Z_{t_3}), \dots, (Z_{t_{n-1}+1}, \dots, Z_{t_n})$ 互相独立,

$\therefore \{X_n, n \geq 0\}$ 为独立增量过程.

1.8 若 X_1, X_2, \dots 为独立随机变量, 还要添加什么条件才能确保它是严平稳的随机过程?

解:

若 $\{X_1, X_2, \dots\}$ 严平稳, 则对任意正整数 m 和 n , X_m 和 X_n 的分布都相同, 从而 X_1, X_2, \dots 是一列同分布的随机变量. 而当 X_1, X_2, \dots 是一列独立同分布的随机变量时, 对任意正整数 k 及 n_1, \dots, n_k, k 维随机向量 $(X_{n_1}, \dots, X_{n_k})$ 的分布函数为 (记 X_1, X_2, \dots 的共同分布函数为 $F(x)$)

$$\begin{aligned} F_{(X_{n_1}, \dots, X_{n_k})}(x_1, \dots, x_k) &= F_{X_{n_1}}(x_1) \cdots F_{X_{n_k}}(x_k) \\ &= F(x_1) \cdots F(x_k). \quad -\infty < x_1, \dots, x_k < +\infty. \end{aligned}$$

这说明了 $(X_{n_1}, \dots, X_{n_k})$ 的分布函数与 n_1, \dots, n_k 无关, 故 $\{X_1, X_2, \dots\}$ 严平稳.

1.9 令 X 和 Y 是从单位圆内的均匀分布中随机选取一点所得的横坐标和纵坐标. 试计算条件概率

$$P\left(X^2 + Y^2 \geq \frac{3}{4} \mid X > Y\right).$$

解: 易见答案为 $\frac{1}{4}$.

1.12 气体分子的速度 V 有三个垂直分量 V_x, V_y, V_z , 它们的联合分布密度依 *Maxwell - Boltzman* 定律为

$$f_{V_x, V_y, V_z}(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{(2\pi kT)^{3/2}} \exp\left\{-\left(\frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}{2kT}\right)\right\},$$

其中 k 是 Boltzman 常数, T 为绝对温度, 给定分子的总动能为 e . 试求 x 方向的动量的绝对值的期望值.

解: 由题中所给分布律知分子质量为单位质量, 即有 $e = \frac{1}{2}(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)$.

则所求为

$$E\left[|V_x| \mid \frac{1}{2}(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) = e\right]$$

作 (V_x, V_y, V_z) 的球坐标变换

$$V_x = R \cos \Phi$$

$$V_y = R \cos \Theta \sin \Phi$$

$$V_z = R \sin \Theta \sin \Phi,$$

则 (R, Θ, Φ) 的联合概率密度为

$$\begin{aligned} f_{R, \Theta, \Phi}(r, \theta, \phi) &= f_{V_x, V_y, V_z}(r \cos \phi, r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi) \cdot r^2 \sin \phi \\ &= \frac{\sqrt{2}r^2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} e^{-r^2/2kT} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \sin \phi \\ &= f_R(r) f_{\Theta}(\theta) f_{\Phi}(\phi) \end{aligned}$$

由此可知 R, Θ, Φ 相互独立.

$$\begin{aligned} \therefore E\left[|V_x| \mid \frac{1}{2}(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) = e\right] &= E\left[R |\cos \Phi| \mid \frac{1}{2}R^2 = e\right] \\ &= E\left[R |\cos \Phi| \mid R = \sqrt{2e}\right] \\ &= \sqrt{2e} E[|\cos \Phi|] \\ &= \sqrt{2e} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin \phi |\cos \phi| d\phi \\ &= \sqrt{\frac{e}{2}} \end{aligned}$$

1.13 若 X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布. 它们服从参数为 λ 的指数分布. 试证 $\sum_{i=1}^n X_i$ 是参数为 (n, λ) 的 Γ 分布, 其密度为

$$f(t) = \lambda \exp\{-\lambda t\} (\lambda t)^{n-1} / (n-1)!, \quad t \geq 0.$$

证:

$$\text{令 } Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$g_Y(t) = g_X^n(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$$

$\therefore Y$ 服从参数为 (n, λ) 的 Γ 分布, 其密度函数如题所述

1.14 设 X_1 和 X_2 为相互独立的均值为 λ_1 和 λ_2 的 Poisson 随机变量. 试求 $X_1 + X_2$ 的分布, 并计算给定 $X_1 + X_2 = n$ 时 X_1 的条件分布.

解: 令 $Y = X_1 + X_2$

$$\begin{aligned} g_Y(t) &= g_{X_1}(t)g_{X_2}(t) \\ &= e^{\lambda_1(e^t-1)}e^{\lambda_2(e^t-1)} \\ &= e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)} \end{aligned}$$

$$\therefore Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$$

\therefore 给定 $X_1 + X_2 = n$ 时 X_1 服从参数为 $p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, n = n$ 的二项分布

1.15 若 X_1, X_2, \dots 独立且有相同的以 λ 为参数的指数分布, N 服从几何分布, 即

$$P(N = n) = \beta(1 - \beta)^{n-1}, n = 1, 2, \dots, 0 < \beta < 1.$$

试求随机和 $Y = \sum_{i=1}^N X_i$ 的分布.

解:

$$E(e^{tY} | N = n) = g_X^n(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n \triangleq \alpha^n$$

$$\therefore g_Y(t) = E[E(e^{tY} | N)] = E(\alpha^N) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta(1 - \beta)^{n-1} \alpha^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha\beta(\alpha - \alpha\beta)^{n-1}$$

$$\text{当 } |\alpha - \alpha\beta| < 1 \text{ 时 } g_Y(t) = \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha(1 - \beta)} = \frac{\lambda\beta}{\lambda\beta - t}$$

$\therefore Y$ 服从参数为 $\lambda\beta$ 的指数分布

1.16 若 X_1, X_2, \dots 独立同分布, $P(X_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. N 与 $X_i, i \geq 1$ 独立且服从参数为 β 的几何分布, $0 < \beta < 1$. 试求随机和 $Y = \sum_{i=1}^N X_i$ 的均值, 方差和三、四阶矩.

解:

$$\begin{aligned} E(e^{tY} | N = n) &= g_X^n(t) = E^n(e^{tY}) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^n \\ \therefore g_Y(t) &= E[E(e^{tY} | N)] = E\left[\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^N\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^n \beta(1 - \beta)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\therefore EY = g'_Y(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^{n-1} \beta (1-\beta)^{n-1} \frac{e^t - e^{-t}}{2} \Big|_{t=0} = 0$$

$$EY^2 = g''_Y(0)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[n(n-1) \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^{n-2} \beta (1-\beta)^{n-1} \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)^2 + n \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^n \beta (1-\beta)^{n-1} \right] \Big|_{t=0}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n\beta(1-\beta)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{\beta}$$

$$\text{Var}Y = EY^2 - (EY)^2 = \frac{1}{\beta^2}$$

$$EY^3 = g_Y^{(3)}(0)$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ n\beta(1-\beta)^{n-1} \left[(n-1) \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^{n-2} \frac{e^t - e^{-t}}{2} + \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^n \right] \right\} \right)' \Big|_{t=0}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ n\beta(1-\beta)^{n-1} \left[(n-1)(n-2) \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^{n-2} \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)^3 + (n-1) \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^{n-2} \cdot 2 \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2} + n \cdot \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right] \right\} \Big|_{t=0}$$

$$= 0$$

$$EY^4 = g_Y^{(4)}(0)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ n\beta(1-\beta)^{n-1} \left[(n-1) \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^{n-1} (e^t + e^{-t}) + n \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^n \right] \right\} \Big|_{t=0}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (3n^2 - 2n)\beta(1-\beta)^{n-1}$$

$$= 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \beta (1-\beta)^{n-1} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n \beta (1-\beta)^{n-1}$$

$$= 3 \left(\frac{1-\beta}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^2} \right) - 2 \frac{1}{\beta^2}$$

$$= \frac{6-5\beta}{\beta^2}$$

1.17 随机变量 N 服从参数为 λ 的 Poisson 分布. 给定 $N = n$, 随机变量 M 服从以 n 和 p 为参数的二项分布. 试求 M 的无条件概率分布.

解：

$$\mathbb{E}(e^{tM}|N=n) = (pe^t + (1-p))^n \triangleq a^n$$

$$g_M(t) = \mathbb{E}(a^N) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{\lambda p(e^t-1)}$$

$$\therefore M \sim P(\lambda p)$$

2.1 $N(t)$ 为一 Poisson 过程, 对 $s < t$ 试求条件概率 $P\{N(s) = k | N(t) = n\}$.

解:

$$\begin{aligned} P\{N(s) = k | N(t) = n\} &= P(N(s) = k, N(t) = n) / P(N(t) = n) \\ &= P(N(s) - N(0) = k, N(t) - N(s) = n - k) / P(N(t) = n) \\ &= \left[\frac{(\lambda s)^k e^{-\lambda s}}{k!} \cdot \frac{(\lambda(t-s))^{n-k} e^{-\lambda(t-s)}}{(n-k)!} \right] / \left[\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \right] \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

2.2 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为一强度是 λ 的 Poisson 过程. 对 $s > 0$ 试计算 $E[N(t) \cdot N(t+s)]$.

解:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= E[N(t)(N(t+s) - N(t) + N(t))] \\ &= E(N(t))E(N(t+s) - N(t)) + E(N^2(t)) \\ &= \lambda t \cdot \lambda s + \text{Var}N(t) + E^2N(t) \\ &= \lambda^2 ts + \lambda t + (\lambda t)^2 \\ &= \lambda^2 t(s+t) + \lambda t \end{aligned}$$

2.3 电报依平均速率为每小时 3 个的 Poisson 过程到达电报局, 试问:

- (i) 从早上八时到中午没收到电报的概率;
- (ii) 下午第一份电报到达时间的分布是什么?

解:

(i) 令 t 的计时单位为小时, 并以早上 8:00 为起始时刻

所求事件即 $\{N(4) = 0\}$

其概率为 $\frac{e^{-12} \cdot 12^0}{0!} \approx 6.1 \times 10^{-6}$

(ii) 取中午 12:00 为起始时刻, T 表示下午第一份电报到达时间 $F(t) = P(T \leq t) = P(N(t) \geq 1) = 1 - e^{-3t}$

$\therefore f(t) = 3e^{-3t}$, 即 T 服从参数为 3 的指数分布

2.4 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为一 $\lambda = 2$ 的 Poisson 过程, 试求:

- (i) $P\{N(1) \leq 2\}$;
- (ii) $P\{N(1) = 1 \text{ 且 } N(2) = 3\}$;

(iii) $P\{N(1) \geq 2 | N(1) \geq 1\}$.

解：

(i)

$$\begin{aligned}\text{原式} &= P\{N(1) - N(0) = 0\} + P\{N(1) - N(0) = 1\} + P\{N(1) - N(0) = 2\} \\ &= e^{-2} + \frac{2e^{-2}}{1!} + \frac{2^2 e^{-2}}{2!} \\ &= 5e^{-2}\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\text{原式} &= P\{N(1) - N(0) = 1 \text{ 且 } N(2) - N(1) = 2\} \\ &= P\{N(1) - N(0) = 1\} \cdot P\{N(2) - N(1) = 2\} \\ &= 2e^{-2} \cdot 2e^{-2} \\ &= 4e^{-4}\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{P\{N(1) \geq 2\} \text{ 且 } N(1) \geq 1}{P\{N(1) \geq 1\}} \\ &= \frac{P\{N(1) \geq 2\}}{P\{N(1) \geq 1\}} \\ &= \frac{1 - P\{N(1) - N(0) \leq 1\}}{1 - P\{N(1) - N(0) = 0\}} \\ &= \frac{1 - 3e^{-2}}{1 - e^{-2}}\end{aligned}$$

2.6 一部 600 页的著作总共有 240 个印刷错误, 试利用 Poisson 过程近似求出某连续三页无错误的概率.

解：设 $N(t)$ ——到第 t 页为止的印刷错误数, 则 $N(t)$ 为一 Poisson 过程

观点一：该 Poisson 过程的参数 λ 未知

则所求概率为

$$\begin{aligned}
 & P\{N(t+3) - N(t) = 0 | N(600) - N(0) = 240\} \\
 &= P\{N(t+3) - N(t) = 0; N(600) - N(0) = 240\} / P\{N(600) - N(0) = 240\} \\
 &= P\{N(3) - N(0) = 0\} \cdot P\{N(600) - N(3) = 240\} / P\{N(600) - N(0) = 240\} \\
 &= e^{-3\lambda} \cdot \frac{(597\lambda)^{240}}{240!} e^{-597\lambda} \bigg/ \left[\frac{(600\lambda)^{240}}{240!} \cdot e^{-600\lambda} \right] \\
 &= \left(\frac{597}{600} \right)^{240} \approx 0.3003 \approx 0.3
 \end{aligned}$$

观点二：该 Poisson 过程的参数 λ 已知, $\lambda = 240/600 = 0.4$,

则所求概率为 $P\{N(3) = 0\} = e^{-0.4 \times 3} \approx 0.3012 \approx 0.3$

2.7 $N(t)$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程. 给定 $N(t) = n$, 试求第 r 个事件 ($r \leq n$) 发生的时刻 W_r 的条件概率密度 $f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n)$.

解：

$$\begin{aligned}
 & f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n) \cdot \Delta w_r \\
 &= P\{N(w_r) - N(0) = r - 1, N(w_r + \Delta w_r) - N(w_r) = 1 | N(t) = n\} \\
 &= P\{N(w_r) - N(0) = r - 1\} \cdot P\{N(w_r + \Delta w_r) - N(w_r) = 1\} \\
 &\quad \cdot P\{N(t) - N(w_r + \Delta w_r) = n - r\} / P\{N(t) = n\} \\
 &= \frac{(\lambda w_r)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda w_r} \cdot (\lambda \Delta w_r + o(\Delta w_r)) \cdot \frac{(\lambda(t - w_r - \Delta w_r))^{n-r}}{(n-r)!} e^{-\lambda(t - w_r - \Delta w_r)} \bigg/ \left[\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \right]
 \end{aligned}$$

两边除以 Δw_r 并令 $\Delta w_r \rightarrow 0$ 得

$$f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \frac{(w_r)^{r-1}(t-w_r)^{n-r}}{t^n}$$

2.8 令 $\{N_i(t), t \geq 0\}, i = 1, 2, \dots, n$ 为 n 个独立的有相同强度参数 λ 的 Poisson 过程. 记 T 为在全部 n 个过程中至少发生了一件事的时刻, 试求 T 的分布.

解：

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P\{T \leq t\} = 1 - P(T < t) \\ &= 1 - P(N_i(t) = 0, i = 1, 2, \dots, n) \\ &= 1 - (e^{-\lambda t})^n \end{aligned}$$

$$\therefore f_T(t) = F'_T(t) = n\lambda e^{-n\lambda t}$$

即 T 服从参数为 $n\lambda$ 的指数分布.

2.10 到达某加油站的公路上的卡车服从参数为 λ_1 的 Poisson 过程 $N_1(t)$, 而到达的小汽车服从参数为 λ_2 的 Poisson 过程 $N_2(t)$, 且过程 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 独立. 试问随机过程 $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ 是什么过程? 并计算在总车流数 $N(t)$ 中卡车首先到达的概率.

解：

$$\begin{aligned} g_{N(t)}(v) &= g_{N_1 t}(v) \cdot g_{N_2 t}(v) \\ &= e^{\lambda_1 v(e^t - 1)} e^{\lambda_2 v(e^t - 1)} \\ &= e^{(\lambda_1 + \lambda_2)v(e^t - 1)} \end{aligned}$$

$\therefore N(t)$ 是强度为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的 Poisson 过程

记 W_1, W_2 分别为卡车、小汽车的第一次到达时间, 则 W_1 服从参数为 λ_1 的指数分布, W_2 服从参数为 λ_2 的指数分布.

$$\begin{aligned} \therefore P(W_1 < W_2) &= \iint_{0 \leq W_1 < W_2 \leq +\infty} f_{W_1, W_2}(w_1, w_2) dw_1 dw_2 \\ &= \int_0^{+\infty} dw_1 \int_{w_1}^{+\infty} \lambda_1 \lambda_2 e^{-w_1 \lambda_1 - w_2 \lambda_2} dw_2 \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \end{aligned}$$

2.11 冲击模型 (Shock Model) 记 $N(t)$ 为某系统到某时刻 t 受到的冲击次数, 它是参数为 λ 的 Poisson 过程. 设第 k 次冲击对系统的损害大小 Y_k 服从参数为 μ 的指数分布, $Y_k, k = 1, 2, \dots$, 独立同分布. 记 $X(t)$ 为系统所受到的总损害. 当损害超过一定的极限 α 时系统不能运行, 寿命终止, 记 T 为系统寿命. 试求该系统的平均寿命 ET , 并对所得结果作出直观解释.

提示：对非负随机变量 $ET = \int_0^{\infty} P(T > t) dt$

解：令 $W_n = \sum_{k=1}^n Y_k$

法一：

$$\begin{aligned}
 P(T > t) &= P\{X(t) \leq \alpha\} \\
 &= P\left\{\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \leq \alpha\right\} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} P\left\{\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \leq \alpha \mid N(t) = n\right\} \cdot P\{N(t) = n\} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} P\left\{\sum_{k=1}^n Y_k \leq \alpha \mid N(t) = n\right\} \cdot P\{N(t) = n\} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} P\{W_n \leq \alpha\} \cdot P\{N(t) = n\}
 \end{aligned}$$

求和式中当 $n = 0$ 时认为 $P\{W_n \leq \alpha \mid N(t) = n\} = 1$

$\because Y_k \sim \exp(\mu), \therefore W_n = \sum_{k=1}^n Y_k \sim \Gamma(n, \mu)$

$$\therefore P(W_n \leq \alpha) = \frac{\mu^n}{(n-1)!} \int_0^\alpha s^{n-1} e^{-\mu s} ds \quad (n \geq 1)$$

$$P\{N(t) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

$$\therefore P(T > t) = e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda \mu t)^n}{n!(n-1)!} \int_0^\alpha s^{n-1} e^{-\mu s} ds$$

$$\begin{aligned}
 \therefore ET &= \int_0^{+\infty} P(T > t) dt \\
 &= \frac{1}{\lambda} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda \mu)^n}{n!(n-1)!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} dt \int_0^\alpha s^{n-1} e^{-\mu s} ds \\
 &= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu^n \Gamma(n+1)}{n!(n-1)!} \int_0^\alpha s^{n-1} e^{-\mu s} ds \\
 &= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_0^\alpha \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\mu s)^{n-1} e^{-\mu s}}{(n-1)!} \right] d(\mu s) \\
 &= \frac{1 + \mu \alpha}{\lambda}
 \end{aligned}$$

从结果看, 若 λ 越大 (系统所受冲击越频繁), μ 越小 (每次冲击所造成的平均损害越大), α 越小 (系统所能承受的的损害极限越小), 则系统平均寿命越短, 且当 α 等于 0 时系统的平均寿命即为第一次冲击到来的平均时间, 符合常识.

法二：

$$\begin{aligned}\because G_n(\alpha) &= P\{Y_1 + \cdots + Y_k \leq \alpha\} \\ &= P\{W_n \leq \alpha\} \\ &= P\{N_1(\alpha) \geq n\} \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(\mu\alpha)^k}{k!} e^{-\mu\alpha}\end{aligned}$$

其中 $N_1(t)$ 是强度为 μ 的 Poisson 过程

$$\begin{aligned}\therefore P(T > t) &= P\{X(t) \leq \alpha\} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} G_n(\alpha) \quad (\text{例2.4}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \frac{(\mu\alpha)^k}{k!} e^{-\mu\alpha} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mu\alpha)^k}{k!} e^{-\mu\alpha} \sum_{n=0}^k \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore ET &= \int_0^{+\infty} P(T > t) dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mu\alpha)^k}{k!} e^{-\mu\alpha} \sum_{n=0}^k \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mu\alpha)^k}{k!} e^{-\mu\alpha} \frac{(k+1)\Gamma(n+1)}{n!\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mu\alpha)^k}{k!} e^{-\mu\alpha} + \frac{\mu\alpha}{\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\mu\alpha)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu\alpha} \\ &= \frac{1 + \mu\alpha}{\lambda}\end{aligned}$$

2.12 令 $N(t)$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次 Poisson 过程, X_1, X_2, \dots 为事件间的时间间隔.

(i) X_i 是否独立;

(ii) X_i 是否同分布;

(iii) 试求 X_1 与 X_2 的分布.

解：记 $m(t) = \int_0^t \lambda(u) du$

法一：等待时间 W_1, W_2 的联合分布函数为

$$\begin{aligned}
 F_{W_1, W_2}(t_1, t_2) &= P(W_1 \leq t_1, W_2 \leq t_2), \quad 0 \leq t_1 < t_2 \\
 &= P(N(t_1) \geq 1, N(t_2) \geq 2) \\
 &= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^k P(N(t_1) = \ell, N(t_2) = k) \\
 &= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^k P(N(t_1) = \ell, N(t_2) - N(t_1) = k - \ell) \\
 &= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^k P(N(t_1) = \ell) P(N(t_2) - N(t_1) = k - \ell) \\
 &= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^k \frac{(m(t_1))^\ell}{\ell!} e^{-m(t_1)} \cdot \frac{[m(t_2) - m(t_1)]^{k-\ell}}{(k-\ell)!} e^{-[m(t_2) - m(t_1)]} \\
 &= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^k \frac{(m(t_1))^\ell [m(t_2) - m(t_1)]^{k-\ell}}{\ell! (k-\ell)!} e^{-m(t_2)} \\
 &= e^{-m(t_2)} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\ell=1}^k C_k^\ell (m(t_1))^\ell [m(t_2) - m(t_1)]^{k-\ell} \\
 &= e^{-m(t_2)} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left\{ \sum_{\ell=0}^k C_k^\ell (m(t_1))^\ell [m(t_2) - m(t_1)]^{k-\ell} - [m(t_2) - m(t_1)]^k \right\} \\
 &= e^{-m(t_2)} \left\{ e^{m(t_2)} - e^{m(t_2) - m(t_1)} - m(t_1) \right\} \\
 &= 1 - e^{-m(t_1)} - m(t_1) e^{-m(t_2)} \\
 \therefore f_{W_1, W_2}(t_1, t_2) &= \frac{\partial^2 F_{W_1, W_2}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \lambda(t_1) \lambda(t_2) e^{-m(t_2)} \\
 &\quad \because \begin{cases} W_1 = X_1 \\ W_2 = X_1 + X_2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$\therefore f_{X_1, X_2}(t_1, t_2) = \lambda(t_1) \lambda(t_1 + t_2) e^{-m(t_1 + t_2)}$ 不能写为 $g_1(t_1) g_2(t_2)$ 形式

$\therefore X_1, X_2$ 不独立

$$\begin{aligned}
 \text{又有 } f_{X_1}(t_1) &= \lambda(t_1) \int_0^{+\infty} \lambda(t_1 + t_2) e^{-m(t_1 + t_2)} dt_2 \\
 &= \lambda(t_1) \left[e^{-m(t_1)} - e^{-m(+\infty)} \right], \quad t_1 > 0
 \end{aligned}$$

下面确定 $e^{-m(+\infty)}$:

$$1 = \int_0^{+\infty} f_{X_1}(t_1) dt_1 = \int_0^{+\infty} \lambda(t_1) \left[e^{-m(t_1)} - e^{-m(+\infty)} \right] dt_1 = 1 - [m(+\infty) + 1] e^{-m(+\infty)}$$

$$\therefore e^{-m(+\infty)} = 0$$

$$\therefore f_{X_1}(t_1) = \lambda(t_1)e^{-m(t_1)} \quad (t_1 > 0)$$

$$f_{X_2}(t_2) = \int_0^{+\infty} \lambda(t_1)\lambda(t_1+t_2)e^{-m(t_1+t_2)} dt_1 \quad (t_2 > 0)$$

$\therefore X_1, X_2$ 不同分布且其概率密度函数如上.

法二：

$$\begin{aligned} P\{X_2 > t | X_1 = s\} &= \lim_{s' \rightarrow s} P\{N(s+t) - N(s) = 0 | N(s') = 0, N(s) - N(s') = 1\} \\ &= P\{N(s+t) - N(s) = 0\} \\ &= e^{m(s) - m(s+t)} \end{aligned}$$

与 s 有关, 故 X_1, X_2 不独立.

$$\begin{aligned} P\{X_1 > t\} &= P\{N(t) = 0\} = e^{-m(t)} \\ P\{X_2 > t\} &= \int_0^{+\infty} P\{X_2 > t | X_1 = s\} f_{X_1}(s) ds \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-m(s+t)} \lambda(s) ds \\ &= e^{-m(t)} \int_0^{+\infty} e^{m(t) - m(s+t)} \lambda(s) ds \\ &= P\{X_1 > t\} \int_0^{+\infty} e^{m(t) - m(s+t)} \lambda(s) ds \\ &\neq P\{X_1 > t\} \end{aligned}$$

$\therefore X_1, X_2$ 不同分布 ($P\{X_1 > t$ 和 $P\{X_2 > t\}$ 给出 X_1 和 X_2 的分布).

2.13 考虑对所有 t , 强度函数 $\lambda(t)$ 均大于 0 的非齐次 Poisson 过程 $\{N(t), t \geq 0\}$.

令 $m(t) = \int_0^t \lambda(u) du$, $m(t)$ 的反函数为 $\ell(t)$, 记 $N_1(t) \equiv N(\ell(t))$. 试证 $N_1(t)$ 是通常的 Poisson 过程, 试求 $N_1(t)$ 的强度参数 λ .

解：

$$(i) N_1(0) = N(\ell(0)) = N(0) = 0$$

$$(ii) \because m(\ell) \text{ 单增, } \therefore \ell(t) \text{ 单增}$$

$$\therefore \text{对任意 } 0 \leq t_1 < t_2 \cdots < t_n, \text{ 有 } 0 \leq \ell(t_1) < \ell(t_2) < \cdots < \ell(t_n)$$

$$\begin{aligned}
\therefore \text{有 } N_1(t_2) - N_1(t_1) &= N(\ell(t_2)) - N(\ell(t_1)) \\
N_1(t_3) - N_1(t_2) &= N(\ell(t_3)) - N(\ell(t_2)) \\
&\vdots \\
N_1(t_n) - N_1(t_{n-1}) &= N(\ell(t_n)) - N(\ell(t_{n-1}))
\end{aligned}$$

$\therefore N(t)$ 是独立增量过程

$\therefore N_1(t)$ 也是独立增量过程

(iii) $\forall 0 \leq s < t$, 有

$$\begin{aligned}
P(N_1(t) - N_1(s) = k) &= P\{N(\ell(t)) - N(\ell(s)) = k\} \\
&= \frac{[m(\ell(t)) - m(\ell(s))]^k}{k!} e^{-[m(\ell(t)) - m(\ell(s))]} \\
&= \frac{(t-s)^k}{k!} e^{-(t-s)} \quad k = 0, 1, \dots
\end{aligned}$$

$\therefore N_1(t)$ 是强度为 1 的 Poisson 过程

2.14 设 $N(t)$ 为更新过程, 试判断下述命题的真伪:

(i) $\{N(t) < k\} \iff \{W_k > t\}$;

(ii) $\{N(t) \leq k\} \iff \{W_k \geq t\}$;

(iii) $\{N(t) > k\} \iff \{W_k < t\}$;

其中 W_k 为第 k 个事件的等待时间.

解:

(i)

$$\begin{aligned}
\{N(t) < k\} &= \overline{\{N(t) \geq k\}} \\
&= \overline{\{W_k \leq t\}} \\
&= \{W_k > t\}
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\{N(t) \leq k\} &= \{N(t) < k+1\} \\ &= \overline{\{N(t) \geq k+1\}} \\ &= \overline{\{W_{k+1} \leq t\}} \\ &= \{W_{k+1} > t\} \\ &\neq \{W_k \geq t\}\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\{N(t) > k\} &= \{N(t) \geq k+1\} \\ &= \{W_{k+1} \leq t\} \\ &\neq \{W_k < t\}\end{aligned}$$

2.(14.5) 设 $X_1(t)$ 与 $X_2(t)$ 为两个独立的 Poisson 过程, 速率分别为 λ_1 和 λ_2

(a) 试证 $X_1(t) + X_2(t)$ 为速率 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的 Poisson 过程

(b) $X_1(t) - X_2(t)$ 是 Poisson 过程吗? 为什么?

(c) 试求在过程 $X_1(t)$ 的任意两个相邻事件时间间隔之内, 过程 $X_2(t)$ 恰好发生 k 个事件的概率 $P_k(k \geq 0)$

解:

(a)

$$\begin{aligned}g_{X_1(t)+X_2(t)}(v) &= g_{X_1(t)}(v) \cdot g_{X_2(t)}(v) \\ &= \exp\{\lambda_1 t(e^v - 1)\} \cdot \exp\{\lambda_2 t(e^v - 1)\} \\ &= \exp\{(\lambda_1 + \lambda_2)t(e^v - 1)\}\end{aligned}$$

$\therefore X_1(t) + X_2(t)$ 是强度为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的 Poisson 过程.

(b)

$$\begin{aligned}g_{X_1(t)-X_2(t)}(v) &= g_{X_1(t)}(v) \cdot g_{X_2(t)}(v) \\ &= \exp\{\lambda_1 t(e^v - 1)\} E(e^{-vX_2(t)}) \\ &= \exp\{\lambda_1 t(e^v - 1)\} \cdot \exp\{\lambda_2 t(e^{-v} - 1)\}\end{aligned}$$

不能化为 Poisson 过程的矩母函数形式,

$\therefore X_1(t) - X_2(t)$ 不是 Poisson 过程.

(c) $X_1(t)$ 的相邻两个事件时间间隔 τ 服从参数为 λ_1 的指数分布, 其概率密度函数为 $f(\tau) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau}$

$$\begin{aligned} \therefore P_k &= \int_0^{+\infty} f(\tau) P\{X_2(t+\tau) - X_2(t) = k\} d\tau \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \cdot \frac{(\lambda_2 \tau)^k}{k!} e^{-\lambda_2 \tau} d\tau \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2^k}{(\lambda_1 + \lambda_2)^{k+1} k!} \cdot \int_0^{+\infty} ((\lambda_1 + \lambda_2) \tau)^k e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \tau} d(\lambda_1 + \lambda_2) \tau \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \end{aligned}$$

3.1 对 Markov 链 $X_n, n \geq 0$, 试证条件

$$P\{X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$$

等价于对所有时刻 n, m 及所有状态 $i_0, \dots, i_n, j_1, \dots, j_m$ 有

$$\begin{aligned} & P\{X_{n+1} = j_1, \dots, X_{n+m} = j_m | X_0 = i_0, \dots, X_n = i\} \\ &= P\{X_{n+1} = j_1, \dots, X_{n+m} = j_m | X_n = i_n\}. \end{aligned}$$

证： \Leftarrow 只需令 $m = 1$

\Rightarrow 由 $P_{27}(3.4)$ 可知

$$\begin{aligned} & P\{X_{n+1} = j_1, \dots, X_{n+m} = j_m | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} \\ &= P\{X_{n+1} = j_1, \dots, X_{n+m} = j_m, X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} / P\{X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} \\ &= P\{X_0 = i_0\} \cdot P_{j_1 j_2} \cdots P_{j_{m-1} j_m} P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{n-1} i_n} / [P\{X_0 = i_0\} \cdot P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{n-1} i_n}] \\ &= P\{X_n = i\} \cdot P_{j_1 j_2} \cdots P_{j_{m-1} j_m} P_{i_n j_1} / P\{X_n = i_n\} \\ &= P\{X_{n+1} = j_1, \dots, X_{n+m} = j_m | X_n = i_n\} \end{aligned}$$

3.2 考虑状态 $0, 1, 2$ 上的一个 Markov 链 $X_n, n \geq 0$, 它有转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix},$$

初始分布为 $p_0 = 0.3, p_1 = 0.4, p_2 = 0.3$, 试求概率 $P\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2\}$.

解：

$$P\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2\} = p_0 P_{01} P_{12} = 0.3 \times 0.1 \times 0 = 0$$

3.3 信号传送问题. 信号只有 $0, 1$ 两种, 分为多个阶段传输. 在每一步上出错的概率为 α . $X_0 = 0$ 是送出的信号, 而 X_n 是在第 n 步接收到的信号. 假定 X_n 为一 Markov 链, 它有转移概率矩阵 $P_{00} = P_{11} = 1 - \alpha, P_{01} = P_{10} = \alpha, 0 < \alpha < 1$. 试求

(a) 两步均不出错的概率 $P\{X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 0\}$;

(b) 两步传送后收到正确信号的概率;

(c) 五步之后传送无误的概率 $P\{X_5 = 0 | X_0 = 0\}$.

解：(a) $P\{X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 0\} = p_0 P_{00} P_{00} = 1 \cdot (1 - \alpha) \cdot (1 - \alpha) = (1 - \alpha)^2$;

(b) $P = p_0 P_{00} P_{00} + p_0 P_{01} P_{10} = (1 - \alpha)^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 - 2\alpha + 1$

(c) 转移概率矩阵 $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \therefore P^{(5)} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-2\alpha)^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1+(1-2\alpha)^5}{2} & \frac{1-(1-2\alpha)^5}{2} \\ \frac{1-(1-2\alpha)^5}{2} & \frac{1+(1-2\alpha)^5}{2} \end{pmatrix} \\ \therefore P\{X_5 = 0 | X_0 = 0\} &= p_0 \cdot \frac{1+(1-2\alpha)^5}{2} = \frac{1+(1-2\alpha)^5}{2} \end{aligned}$$

3.4 A, B 两罐总共装各 N 个球. 作如下实验: 在时刻 n 先 n 个球中等概率地任取一球. 然后从 A, B 两罐中任选一个, 选中 A 的概率为 p , 选中 B 的概率为 q . 之后再选出的球放入选好的罐中. 设 X_n 为每次试验时 A 罐中的球数. 试求此 Markov 过程的转移概率矩阵.

解:

$$P_{ij} = \begin{cases} p \cdot \frac{i}{N} + q \cdot \frac{N-i}{N} & , j = i \\ q \cdot \frac{i}{N} & , j = i-1 (i = 1, 2, \dots, N) \\ p \cdot \frac{N-i}{N} & , j = i+1 (i = 0, 1, \dots, N-1) \\ 0 & , \text{其他} \end{cases}$$

其转移概率矩阵为

$$P = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} qN & pN & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & q(N-1)+p & p(N-1) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2q & q(N-2)+2p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2q+p(N-2) & 2p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q(N-1) & q+p(N-1) & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & qN & pN \end{pmatrix}$$

3.5 重复掷币一直到连续出现两次正面为止. 假定钱币是均匀的, 试引入以连续出现次数为状态空间的 Markov 链, 并求出平均需要掷多少次试验才可以结束.

解: 记 X_n 为第 n 次掷币后连续出现的正面次数, 则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为一 $M.C.$

其转移概率矩阵为 $P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$

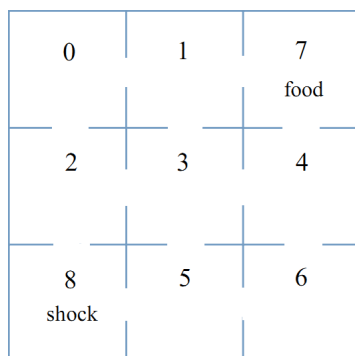
$$\begin{aligned} \therefore E(T|X_0=0) &= \sum_{k=0}^2 E(T|X_0=0, X_1=k) \cdot P(X_1=k|X_0=0) \\ &= \sum_{k=0}^2 E(T|X_1=k) \cdot P(X_1=k|X_0=0) \\ &= (1+v) \cdot \frac{1}{2} + E(T|X_1=1) \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

及 $E(T|X_1=1)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^2 E(T|X_1=1, X_2=k) \cdot P(X_2=k|X_1=1) \\ &= \sum_{k=0}^2 E(T|X_2=k) \cdot P(X_2=k|X_1=1) \\ &= (2+v) \cdot \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} \times 2 \end{aligned}$$

解得 $E(T|X_0=0) = 6$, 平均需掷 6 次.

3.6 迷宫问题. 将小家鼠放入迷宫内作动物的学习试验, 如下图所示. 在迷宫的第 7 号小格内放有美味食物而第 8 号小格内则是电击捕鼠装置. 假定当家鼠位于某格时有 k 个出口可以离去, 则它总是随机地选择一个, 概率为 $1/k$. 并假定每一次家鼠只能跑到相邻的小格去. 令过程 X_n 为家鼠在时刻 n 时所在小格的号码, 试写出这一 Markov 过程的转移概率阵, 并求出家鼠在遭到电击前能找到食物的概率.



解：

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

设 u_k 为家鼠从 k 出发在遭到电击前能找到食物的概率, 显然 $u_7 = 1, u_8 = 0$, 设 T 为进入吸收态时刻, 则当 $0 \leq k \leq 6$ 时,

$$\begin{aligned} u_k &= P\{X_T = 7 | X_0 = k\} \\ &= \sum_{i=0}^8 P\{X_T = 7, X_1 = i | X_0 = k\} \\ &= \sum_{i=0}^8 P\{X_T = 7, X_1 = i\} P\{X_1 = i | X_0 = k\} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \\ u_1 = \frac{1}{3}(u_0 + u_3 + u_7) \\ u_2 = \frac{1}{3}(u_0 + u_3 + u_8) \\ u_3 = \frac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_4 + u_5) \\ u_4 = \frac{1}{3}(u_3 + u_6 + u_7) \\ u_5 = \frac{1}{3}(u_3 + u_6 + u_8) \\ u_6 = \frac{1}{2}(u_4 + u_5) \\ u_7 = 1 \\ u_8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_1 = \frac{2}{3} \\ u_2 = \frac{1}{3} \\ u_3 = \frac{1}{2} \\ u_4 = \frac{2}{3} \\ u_5 = \frac{1}{3} \\ u_6 = \frac{1}{2} \\ u_7 = 1 \\ u_8 = 0 \end{cases}$$

3.7 记 $Z_i, i = 1, 2, \dots$ 为一串独立同分布的离散随机变量. $P\{Z_1 = k\} = p_k \geq 0, k =$

$0, 1, 2, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} = 1$. 记 $X_n = Z_n, n = 1, 2, \dots$. 试求过程 X_n 的转移概率矩阵.

解: $\because P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n\} = P\{X_{n+1} = i_{n+1}\}$

$P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\} = P\{X_{n+1} = i_{n+1}\}$

$\therefore P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n\} = P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\}$

$\therefore \{X_n\}$ 是一 $M.C.$ 其转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

3.8 对第 7 题中的 Z_i , 令 $X_n = \max\{Z_1, \dots, Z_n\}, n = 1, 2, \dots$, 并约定 $X_0 = 0$. X_n 是否为 Markov 链? 如果是, 其转移概率阵是什么?

解:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \max\{Z_1, \dots, Z_n, Z_{n+1}\} \\ &= \max\{\max\{Z_1, \dots, Z_n\}, Z_{n+1}\} \\ &= \max\{X_n, Z_{n+1}\} \end{aligned}$$

$\therefore \{X_n\}$ 是 $M.C.$

$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & , j < i \\ p_j & , j > i \\ \sum_{k=0}^i p_k & , j = i \\ 0 & , \text{其他} \end{cases}$$

其转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & p_0 + p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 + p_1 + p_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

3.9 设 $f_{ij}^{(n)}$ 表示从 i 出发在 n 步转移时首次到达 j 的概率, 试证明

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^n f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}.$$

证：设 $T_j = \min\{n : n \geq 0 \text{ 且 } X_n = j\}$

$$\begin{aligned}
 \therefore P_{ij}^{(n)} &= P\{X_n = j | X_0 = i\} \\
 &= \sum_{k=0}^n P\{X_n = j, T_j = k | X_0 = i\} \\
 &= \sum_{k=0}^n P\{T_j = k | X_0 = i\} P_{jj}^{(n-k)} \\
 &= \sum_{k=0}^n P\{X_k = j, X_s \neq j (s = 0, 1, \dots, k-1) | X_0 = i\} P_{jj}^{(n-k)} \\
 &= \sum_{k=0}^n f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}
 \end{aligned}$$

3.10 对第 7 题中的 Z_i , 若定义 $X_n = \sum_{i=1}^n Z_i, n = 1, 2, \dots, X_0 = 0$, 试证 X_n 为 Markov 链. 并求其转移概率矩阵.

证：对 $n \geq 0$ 有

$$\begin{aligned}
 &P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} \quad (i_0 = 0) \\
 &= P\{Z_{n+1} = i_{n+1} - i_n | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} \\
 &= P\{Z_{n+1} = i_{n+1} - i_n\} \\
 &= \begin{cases} P_{i_{n+1}-i_n} & , i_{n+1} - i_n = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & , \text{ow} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\} \\
 &= P\{X_n + Z_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\} \\
 &= P\{Z_{n+1} = i_{n+1} - i_n\}
 \end{aligned}$$

$\therefore X_n$ 是 M.C.

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

3.11 — Markov 链有状态 0, 1, 2, 3 和转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

试求 $f_{00}^{(n)}$, $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$, 其中 $f_{00}^{(n)}$ 由

$$P\{X_n = i, X_k \neq i, k = 1, \dots, n-1 | X_0 = i\}$$

定义.

$$\text{解: } f_{00}^{(1)} = P_{00} = 0, f_{00}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{4}$$

对 $n \geq 2$ 有

$$f_{00}^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

当 $n = 3$ 时, $f_{00}^{(3)} = \frac{1}{8}$

当 $n \geq 4$ 时,

$$f_{00}^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2^{n-2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+2}}$$

3.12 在成败型的重复试验中, 每次试验结果为成功 (S) 或失败 (F). 同一结果相继出现称为一个游程 (run), 比如一结果 $FSSFFFSF$ 中共有两个成功游程, 三个失败游程. 设成功概率为 p , 失败概率为 $q = 1 - p$. 记 X_n 为第 n 次试验后成功游程的长度 (若第 n 次试验, 则 $X_n = 0$). 试证 $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ 为一 Markov 链, 并确定其转移概率阵. 记 T 为返回状态 0 的时间, 试求 T 的分布及均值. 并由此对这一 Markov 链的状态进行分类.

$$\text{证: } X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1, & \text{第 } n+1 \text{ 次试验成功} \\ 0, & \text{第 } n+1 \text{ 次试验失败} \end{cases}$$

$\therefore \{X_n\}$ 是 M.C.

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} p, & j = i + 1 \\ q, & j = 0 \end{cases}$$

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots \\ q & 0 & 0 & p & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$T = \min\{n : X_n = 0, X_s \neq 0 (s = 1, 2, \dots, n-1)\}$$

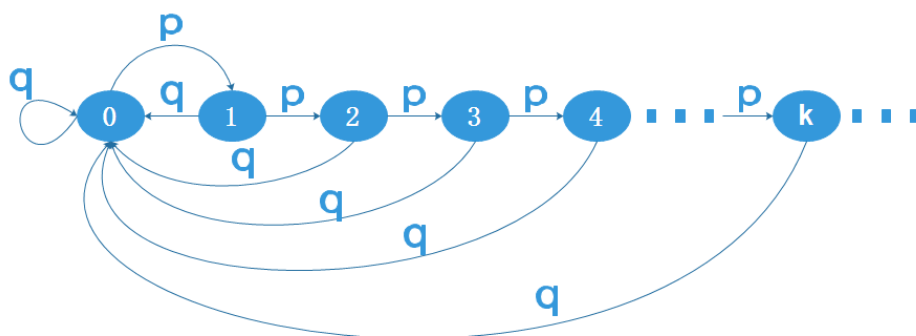
$$P(T = k) = p^{k-1}q \quad k = 1, 2, \dots$$

$$ET = \sum_{k=1}^{+\infty} p^{k-1}qk$$

$$\therefore pET = \sum_{k=1}^{+\infty} p^k qk$$

$$\therefore (1-p)ET = qET = q + pq + p^2q + \dots = \frac{q}{1-p} = 1$$

$$\therefore ET = \frac{1}{q}$$



所有状态互通, 为一类

3.13 试证各方向游动的概率相等的对称随机游动在二维时是常返的

证: 为使 n 步游动后回到原位置, 向左移动的步数应等于向右移动的步数, 向上移动的步数应等于向下移动的步数, $\therefore P_{00}^{(2k+1)} = 0, k = 0, 1, 2, \dots$

再考虑 $2k$ 步的情况,

$$\begin{aligned}
P_{00}^{(2k)} &= \sum_{k_1=0}^k C_{2k-2k_1}^{k-k_1} C_{2k_1}^{k_1} C_{2k}^{2k_1} \left(\frac{1}{4}\right)^{2k} \\
&= \sum_{k_1=0}^k \frac{(2k)!}{(k!)^2} \left(C_k^{k_1}\right)^2 \left(\frac{1}{2^{2k}}\right)^2 \\
&= \frac{(2k)!}{(k!)^2} \left(\frac{1}{2^{2k}}\right)^2 \sum_{k_1=0}^k C_k^{k_1} C_k^{k-k_1} \\
&= \frac{(2k)!}{(k!)^2} \left(\frac{1}{2^{2k}}\right)^2 C_{2k}^k \\
&= \left(\frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2k}}\right)^2
\end{aligned}$$

当 n 充分大时, 由 Stirling 公式

$$P_{00}^{(2k)} \sim \left(\frac{(2k)^{2k+\frac{1}{2}} e^{-2k} \sqrt{2\pi}}{(k^{k+\frac{1}{2}} e^{-k} \sqrt{2\pi})^2} \cdot \frac{1}{2^{2k}}\right)^2 = \frac{1}{\pi k}$$

$\therefore \sum_{n=1}^{+\infty} P_{ii}^{(n)} = +\infty$ (i 代表任一格点)
 \therefore 二维对称随机游动是常返的

3.14 某厂对该厂生产的同类产品的三种型号调查顾客的消费习惯. 并把它们归结为 Markov 链模型. 记顾客消费习惯在 A, B, C 三种型号间的转移概率矩阵分别为下列四种. 请依这些转移阵所提供的信息对厂家提出关于 A, B 两种型号的咨询意见.

$$\begin{aligned}
(1) & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & (2) & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \\
(3) & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & (4) & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

解:

(1) 不是概率转移矩阵, 第三行行和不为 1.

(2)

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

∴ A, B, C 三状态互通, 所有状态可遍历.

设 (π_A, π_B, π_C) 为经过长时间后三个产品的市场占有率, 则

$$\begin{cases} (\pi_A, \pi_B, \pi_C) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = (\pi_A, \pi_B, \pi_C) \\ \pi_A + \pi_B + \pi_C = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi_A = \pi_B = \pi_C = \frac{1}{3}$$

∴ 三个品牌竞争力差不多, 可以都生产.

(3) 由归纳法可知

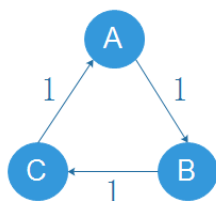
$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n}) & \frac{1}{3^n} & \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n}) \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

可见

$$\begin{cases} \pi_B = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0, \\ (\pi_A, \pi_C) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\pi_A, \pi_C) \\ \pi_A + \pi_C = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi_A = \pi_C = \frac{1}{2}$$

∴ B 将逐渐淡出市场, 建议停止生产 B, 扩大对 A 的生产.

(4)



∴ A, B, C 三状态互通, 所有状态可遍历.

$$\begin{cases} (\pi_A, \pi_B, \pi_C) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_A, \pi_B, \pi_C) \\ \pi_A + \pi_B + \pi_C = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi_A = \pi_B = \pi_C = \frac{1}{3}$$

∴ A, B, C 市场占有率相同, 可维持现状.

3.15 考虑一有限状态的 Markov 链. 试证明

- (a) 至少有一个状态是常返的,
- (b) 任何常返状态必定是正常返的.

证: (a) 反设所有状态均为瞬过或零常返 (加强结论), 则对 $\forall i \in S$, 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ii}^{(n)} = 0 \quad (*)$$

考虑 $P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}$, 则有

$$\sum_{k=1}^{\ell} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} \leq P_{ij}^{(n)} \leq \sum_{k=1}^{\ell} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=\ell}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} \quad (**)$$

固定 ℓ , 令 $n \rightarrow +\infty$, 则由 (*) 得

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ij}^{(n)} \leq 0 + \sum_{k=\ell}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} \quad (***)$$

在 (***) 中令 $\ell \rightarrow +\infty$, 由于 $\sum_{k=1}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} \leq 1$ 收敛

$$\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ij}^{(n)} = 0 \quad (*4)$$

若此有限状态 M.C. 有 N 个状态, 则

$$\sum_{j=1}^N P_{ij}^{(n)} = 1 \quad (*5)$$

(*5) 中令 $n \rightarrow +\infty$, 由 (*4) 得 $0 = 1$, 矛盾

∴ 至少有一个状态是 (正) 常返的

(b) 若存在零常返状态 i , 可构造 $C(i) = \{j | i \leftrightarrow j\}$, 则 $C(i)$ 为原 M.C. 的一不可约子 M.C. (有限状态), 于是 $C(i)$ 中所有状态均为零常返, 与有限状态 M.C. 至少有一个正常返状态矛盾, ∴ 任何常返状态均为正常返

3.16 考虑一生长与灾害模型. 这类 Markov 链有状态 $0, 1, 2, \dots$, 当过程处于状态 i 时它既可能以概率 p_i 转移到 $i+1$ (生长) 也能以概率 $q_i = 1 - p_i$ 落回到状态 0 (灾害). 而从状态 “0” 又必然 “无中” 生有. 即 $P_{01} \equiv 1$.

(a) 试证所有状态为常返的条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p_1 p_2 p_3 \cdots p_n) = 0.$$

(b) 若此链为常返, 试求其为零常返的条件.

证:

(a) 其概率转移阵为

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & \\ q_2 & 0 & 0 & p_2 & \\ q_3 & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \end{matrix}$$

易知此 M.C. 是不可约的, \therefore 只需证状态 0 常返 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} p_1 p_2 \cdots p_n = 0$

显然 $f_{00}^{(0)} = f_{00}^{(1)} = 0, f_{00}^{(2)} = q_1$

$$\begin{aligned} f_{00}^{(n)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &= AB^{n-2}C^T, \quad (n \geq 3) \end{aligned}$$

易知

$$B^{n-2} = \begin{pmatrix} \underbrace{0 \cdots 0}_{n-2 \uparrow} & p_1 \cdots p_{n-2} & 0 & \cdots \\ \underbrace{0 \cdots 0}_{n-2 \uparrow} & 0 & p_2 \cdots p_{n-2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\therefore f_{00}^{(n)} = (\underbrace{0 \cdots 0}_{n-2 \uparrow} \quad p_1 \cdots p_{n-2} \quad 0 \quad 0 \quad \cdots) (q_1 \quad q_2 \quad \cdots)^T = p_1 \cdots p_{n-2} q_{n-1}$$

$$\therefore f_{00} = q_1 + \sum_{n=3}^{+\infty} p_1 \cdots p_{n-2} q_{n-1}$$

$$= 1 - p_1 + \sum_{n=3}^{+\infty} (p_1 \cdots p_{n-2} - p_1 \cdots p_{n-2} p_{n-1})$$

$$= 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} p_1 p_2 \cdots p_n$$

而状态 0 常返 $\Leftrightarrow f_{00} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} p_1 p_2 \cdots p_n = 0$.

(b) 只需考虑状态 0,

$$\begin{aligned}\mu_0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} n f_{00}^{(n)} \\ &= 2(1-p_1) + \sum_{n=3}^{+\infty} n(p_1 \cdots p_{n-2} - p_1 \cdots p_{n-1}) \\ &= 2 + p_1 + p_1 p_2 + p_1 p_2 p_3 + \cdots\end{aligned}$$

若为零常返, 则 $\mu_0 = +\infty \Leftrightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} p_1 \cdots p_n$ 发散 (且通项趋于 0)

3.17 试计算转移概率阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

的极限分布.

解; 设 π 为该 $M.C.$ 的平稳分布, $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$

$$\begin{cases} \pi \geq 0 \\ \sum_{i=0}^2 \pi_i = 1 \\ \pi P = \pi \end{cases} \Rightarrow \pi = \left(\frac{5}{14}, \frac{6}{14}, \frac{3}{14} \right)$$

易知该 $M.C.$ 不可约且遍历

$$\therefore \text{极限分布为 } \begin{pmatrix} \frac{5}{14} & \frac{6}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{6}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{6}{14} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}$$

3.18 假定在逐日的天气变化模型中, 每天的阴晴与前两天的状况关系很大. 于是可考虑 4 状态的 Markov 链: 接连两晴天, 一晴一阴, 一阴一晴, 以及接连两阴天, 分别记为 $(S,S), (S,C), (C,S), (C,C)$. 该链的转移概率阵为

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} (S,S) & (S,C) & (C,S) & (C,C) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (S,S) \\ (S,C) \\ (C,S) \\ (C,C) \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

试求这一 Markov 链的平稳分布. 并求出长期平均的晴朗天数.

解: 设其平稳分布为 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$

解：

(1) 转移概率

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{N-i}{N} & , j = i+1 \\ \frac{i}{N} & , j = i-1 \\ 0 & , ow \end{cases}$$

转移概率矩阵为

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & N \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ \vdots \\ N \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & 0 & & & \\ 0 & \frac{2}{N} & 0 & \frac{N-2}{N} & & & \\ 0 & 0 & \frac{3}{N} & 0 & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \frac{1}{N} \\ & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

显然任两状态可互达, 所以不可约.

(2) 设有平稳分布 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N)$

$$\begin{cases} \pi \geq 0 \\ \sum_{i=0}^N \pi_i = 1 \\ \pi P = \pi \end{cases} \Rightarrow \pi_i = \frac{C_N^i}{2^N} \quad (i = 0, 1, \dots, N)$$

(3) \therefore M.C. 为有限状态的不可约链, 故所有状态均为正常返,

$\therefore \mu_j < +\infty (\forall j \in S)$, 易知其周期为 $d = 2$.

引入

$$f_{ij}(r) = \sum_{m=0}^{+\infty} f_{ij}^{(md+r)} \quad (0 \leq r \leq d-1),$$

表示从状态 i 出发, 在时刻 $n \equiv r \pmod{d}$ 首次到达状态 j 的概率.

断言: 若 j 为正常返状态且周期为 d , 则对 $\forall i$ 及 $0 \leq r \leq d-1$, 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ij}^{(nd+r)} = f_{ij}(r) \frac{d}{\mu_j}.$$

则当 $i-j$ 为偶数时, 易知在此 M.C. 中

$$f_{ij}(1) = 0, f_{ij}(0) > 0,$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ij}^{(2n)} = f_{ij}(0) \frac{2}{\mu_j} > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ij}^{(2n+1)} = f_{ij}(1) \frac{2}{\mu_j} = 0$$

即当 $i-j$ 为偶数时 $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ij}^{(n)}$ 不存在.

当 $i-j$ 为奇数时,

$$f_{ij}(1) = 0, f_{ij}(0) > 0,$$

同理知不存在, $\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ij}^{(n)}$ 不存在.

断言的证明:

\therefore 当 $n \neq kd$ 时, $P_{jj}^{(n)} = 0$

$$\therefore P_{ij}^{(nd+r)} = \sum_{k=0}^{nd+r} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(nd+r-k)} = \sum_{m=0}^n f_{ij}^{(nd+r)} P_{jj}^{(n-m)d}$$

\therefore 对 $1 \leq N < n$, 有

$$\sum_{m=0}^N f_{ij}^{(md+r)} P_j^{(n-m)d} \leq P_{ij}^{(nd+r)} \leq \sum_{m=0}^N f_{ij}^{(md+r)} P_j^{(n-m)d} + \sum_{m=N+1}^{+\infty} f_{ij}^{(md+r)}$$

先令 $n \rightarrow +\infty$ 再令 $N \rightarrow +\infty$, 由 M.C. 基本极限定理得 (注意到 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_{ii}^{(N)}$ 收敛)

$$f_{ij}(r) \frac{d}{\mu_j} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ij}^{(nd+r)} \leq f_{ij}(r) \frac{d}{\mu_j}$$

3.23 一连续时间 Markov 链有 0 和 1 两个状态, 在状态 0 和 1 的逗留时间服从参数为 $\lambda > 0$ 及 $\mu > 0$ 的指数分布. 试求在时刻 0 从状态 0 起始, t 时刻后过程处于状态 0 的概率 $P_{00}(t)$

解:

$$P_{00}(t+h) = \sum_{k \geq 0} P_{0k}(t) P_{k0}(h)$$

$$= P_{00}(t) P_{00}(h) + P_{01}(t) P_{10}(h)$$

$$= P_{00}(1 - \lambda h + o(h)) + (1 - P_{00}(t))(\mu h + o(h))$$

$$\therefore \frac{P_{00}(t+h) - P_{00}(t)}{h} = -(\lambda + \mu) P_{00}(t) + \mu + \frac{o(h)}{h}$$

令 $h \rightarrow 0$, 则 $P'_{00}(t) = -(\lambda + \mu)P_{00}(t) + \mu$

而 $P_{00}(0) = 1$, 解微分方程得

$$P_{00}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

3.24 在第 23 题中如果 $\lambda = \mu$. 定义 $N(t)$ 为过程在 $[0, t]$ 中改变的次数, 试求 $N(t)$ 的概率分布.

解: 设 $f(t)$ 为状态 0(或 1) 逗留时间的概率密度函数, $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

记 $P_k(t) = P(N(t) = k | N(0) = 0), k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} P_0(t) &= P(\text{在状态 0(或 1) 逗留时间 } t_s > t) \\ &= 1 - P(t_s \leq t) \\ &= 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda t_s} dt_s \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

猜想 $P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$

设到 $k-1$ 为止猜想成立, 则

$$\begin{aligned} P_k(t) &= \int_0^t f(t_s) P_{k-1}(t - t_s) dt_s \\ &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda t_s} \frac{(\lambda(t - t_s))^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda(t-t_s)} dt_s \\ &= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \int_0^t (t - t_s)^{k-1} dt_s \\ &= \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

综上, 当 $\lambda = \mu$ 时 $N(t)$ 服从参数为 λt 的 Poisson 分布

以下如果没有指明变量 t 的取值范围, 一般视为 $t \in R$, 平稳过程是指宽平稳过程.

4.1 设 $X(t) = \sin Ut$, 这里 U 为 $(0, 2\pi)$ 上的均匀分布.

(a) 若 $t = 1, 2, \dots$, 证明 $\{X(t), t = 1, 2, \dots\}$ 是宽平稳但不是严平稳过程,

(b) 设 $t \in [0, +\infty)$, 证明 $\{X(t), t \geq 0\}$ 既不是严平稳也不是宽平稳过程.

证: (a)

$$\begin{aligned} E(X(t)) &= E \sin Ut \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sin Ut dU \\ &= 0 \quad (t = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X(t), X(s)) &= E(\sin Ut \cdot \sin Us) \\ &= \frac{1}{2} E(\cos(t-s)U - \cos(t+s)U) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{t-s} \sin(t-s)U \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{t+s} \sin(t+s)U \Big|_0^{2\pi} \right\} \\ &= 0 \quad (t \neq s) \end{aligned}$$

当 $t = s$ 时 $\text{Cov}(X(t), X(s)) = E \sin^2 Ut = \frac{1}{2}$

\therefore 是宽平稳

考虑 $F_t(x) = P(\sin Ut \leq x)$, 显然 $F_{t+h} = P(\sin U(t+h) \leq x)$ 与其不一定相同

\therefore 不是严平稳

(b)

$$\begin{aligned} EX(t) &= \frac{1}{2\pi t} (1 - \cos 2\pi t) \\ DX(t) &= E \left(\sin Ut - \frac{1}{2\pi t} (1 - \cos 2\pi t) \right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sin 4\pi t}{8\pi t} - \left(\frac{1 - \cos 2\pi t}{2\pi t} \right)^2 \end{aligned}$$

都与 t 相关

\therefore 不是宽平稳

若其严平稳, 则因二阶矩存在, 应为宽平稳, 矛盾.

\therefore 不是严平稳.

4.2 设 $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ 是平稳序列, 定义 $\{X_n^{(i)}, n = 1, 2, \dots\}, i = 1, 2, \dots$, 为

$$\begin{aligned} X_n^{(1)} &= X_n - X_{n-1}, \\ X_n^{(2)} &= X_n^{(1)} - X_{n-1}^{(1)}, \dots \end{aligned}$$

证明这些序列仍是平稳序列.

证：

1° $\ell = 0$ 时

EX_n 依定义为常数 C_0

$\text{Cov}(X_n, X_m)$ 依定义为 $n - m$ 的函数 $f_0(n - m)$

成立

2° 设当 $\ell \leq k$ 时成立, 则当 $\ell = k + 1$ 时

$$EX_n^{(\ell)} = E(X_n^{(k)} - X_{n-1}^{(k)}) = C_k - C_k = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_n^{(k+1)}, X_m^{(k+1)}) &= E(X_n^{(k+1)} X_m^{(k+1)}) \\ &= E[(X_n^{(k)} - X_{n-1}^{(k)})(X_m^{(k)} - X_{m-1}^{(k)})] \\ &= E(X_n^{(k)} X_m^{(k)}) - E(X_{n-1}^{(k)} X_m^{(k)}) - E(X_n^{(k)} X_{m-1}^{(k)}) + E(X_{n-1}^{(k)} X_{m-1}^{(k)}) \\ &= f_k(n - m) - f_k(n - 1 - m) - f_k(n - m + 1) + f_k(n - m) \\ &= f_\ell(n - m) \end{aligned}$$

只与 $n - m$ 有关

∴ 是平稳的

4.3 设 $X_n = \sum_{k=1}^N \sigma_k \sqrt{2} \cos(a_k n - U_k)$, 这里 σ_k 和 a_k 为正常数, $k = 1, \dots, N; U_1, \dots, U_N$ 是 $(0, 2\pi)$ 上独立均匀分布随机变量, 证明 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \dots\}$ 是平稳过程.

证： $EX_n = \sum_{k=1}^N \sigma_k \sqrt{2} (\cos a_k n E \cos U_k + \sin a_k n E \sin U_k) = 0$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_n, X_m) &= E(X_n, X_m) \\ &= E \left[\sum_{k=1}^N \sigma_k \sqrt{2} \cos a_k n - U_k \sum_{j=1}^N \sigma_j \sqrt{2} \cos(a_j m - U_j) \right] \\ &= \sum_{k=1}^N 2\sigma_k^2 E[\cos(a_k n - U_k) \cos(a_k m - U_k)] \\ &= \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 E[\cos a_k(n - m) + \cos(a_k n + a_k m - 2U_k)] \\ &= \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 \cos a_k(n - m) \end{aligned}$$

只与 $n - m$ 有关

∴ 宽平稳.

4.4 设 $A_k, k = 1, 2, \dots, n$ 是 n 个实随机变量; $\omega_k, k = 1, 2, \dots, n$, 是 n 个实数. 试问 A_k 以及 A_k 之间应满足怎样的条件才能使

$$Z(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{j\omega_k t}$$

是一个复的平稳过程.

解: 要求

$$EZ(t) = \sum_{k=1}^n EA_k e^{j\omega_k t} = \text{const}$$

$$\therefore EA_k = 0$$

要求

$$\text{Cov}(Z(t), Z(s)) = E(Z(t)Z(s)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{+\infty} E(A_k A_\ell) \cdot e^{j\omega_k t - j\omega_\ell s}$$

只与 $t-s$ 有关

$$\therefore E(A_k A_\ell) = 0 \quad (k \neq \ell \text{ 且 } \omega_k \neq \omega_\ell)$$

4.6 设 $\{X(t)\}$ 是一个平稳过程, 对每个 $t \in \mathbf{R}$, $X'(t)$ 存在. 证明对每个给定的 t , $X(t)$ 与 $X'(t)$ 不相关, 其中 $X'(t) = \frac{dX(t)}{dt}$.

证明: 以下假定求导数和求期望可交换

$$\text{设 } E(X(t)) = m, D(X(t)) = \sigma^2$$

$$\therefore E(X(t + \Delta t)) = m$$

$$\therefore X'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}$$

$$\therefore E(X'(t)) = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{Cov}(X(t), X'(t)) &= E(X(t)X'(t)) \\ &= \frac{1}{2} E[(X^2(t))'] \\ &= \frac{1}{2} (EX^2(t))' \\ &= \frac{1}{2} (\sigma^2 + m^2)' \\ &= 0 \end{aligned}$$

\therefore 不相关

4.7 设 $\{X(t)\}$ 是高斯过程, 均值为 0, 协方差函数 $R(\tau) = 4 \exp -2|\tau|$. 令

$$Z(t) = X(t+1), W(t) = X(t-1),$$

- (i) 求 $E(Z(t)W(t))$ 和 $E(Z(t) + W(t))^2$;
(ii) 求 $Z(t)$ 的密度函数 $f_Z(z)$ 及 $P(Z(t) < 1)$;
(iii) 求 $Z(t), W(t)$ 的联合密度 $f_{Z,W}(z, w)$.

解：

(i)

$$\begin{aligned} E(Z(t)W(t)) &= E(X(t+1)X(t-1)) \\ &= R(2) \\ &= 4e^{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Z(t)W(t))^2 &= E(X^2(t+1) + 2X(t+1)X(t-1) + X^2(t-1)) \\ &= 2EX^2(t) + 2R(2) \\ &= 2[DX(t) - E^2X(t)] + 4e^{-4} \\ &= 2R(0) + 4e^{-4} \\ &= 4(1 + e^{-4}) \end{aligned}$$

(ii) $Z(t) = X(t+1) \sim N(0, 2^2)$

$$\therefore f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2^2}} e^{-\frac{z^2}{2 \cdot 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{z^2}{8}}$$

$$\therefore P(Z(t) < 1) = \int_{-\infty}^1 f_Z(z) dz = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \int_{-\infty}^1 e^{-\frac{z^2}{8}} dz$$

(iii) 显然 $f_{Z,W}(z, w)$ 为二维正态分布概率密度函数

协方差矩阵

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 4e^{-4} \\ 4e^{-4} & 4 \end{pmatrix}$$

其逆矩阵

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4(1-e^{-8})} & -\frac{e^{-4}}{4(1-e^{-8})} \\ -\frac{e^{-4}}{4(1-e^{-8})} & \frac{1}{4(1-e^{-8})} \end{pmatrix}$$

其行列式 $|C| = 16(1 - e^{-8})$

期望向量 $\bar{\mu} = (0, 0)$

$$\begin{aligned} \therefore f_{Z,W}(z, w) &= \frac{1}{2\pi|C|} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left((z, w) - \bar{\mu} \right) C^{-1} \left((z, w) - \bar{\mu} \right)^T \right\} \\ &= \frac{1}{8\pi\sqrt{1-e^{-8}}} \exp \left\{ -\frac{z^2 + w^2 - 2e^{-4}wz}{8(1-e^{-8})} \right\} \end{aligned}$$

4.8 设 $\{X(t), t \in \mathbf{R}\}$ 是一个严平稳过程, ε 为只取有限个值的随机变量. 证明 $\{Y(t) = X(t - \varepsilon), t \in \mathbf{R}\}$ 仍是一个严平稳过程.

提示: 对 ε 用全概率公式.

证: 设 ε 可取 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$

$$\begin{aligned} \text{则 } P\{Y(t_1 + h) \leq y_1, \dots, Y(t_k + h) \leq y_k\} \\ &= P\{X(t_1 - \varepsilon + h) \leq y_1, \dots, X(t_k - \varepsilon + h) \leq y_k\} \\ &= \sum_{i=1}^n P(\varepsilon = \varepsilon_i) P\{X(t_1 - \varepsilon_i + h) \leq y_1, \dots, X(t_k - \varepsilon_i + h) \leq y_k | \varepsilon = \varepsilon_i\} \end{aligned}$$

$\because X(t)$ 严平稳

$$\begin{aligned} \therefore \text{上式} &= \sum_{i=1}^n P(\varepsilon = \varepsilon_i) P\{X(t_1 - \varepsilon_i) \leq y_1, \dots, X(t_k - \varepsilon_i) \leq y_k | \varepsilon = \varepsilon_i\} \\ &= P\{X(t_1 - \varepsilon) \leq y_1, \dots, X(t_k - \varepsilon) \leq y_k\} \\ &= P\{Y(t_1) \leq y_1, \dots, Y(t_k) \leq y_k\} \end{aligned}$$

$\therefore Y(t)$ 为严平稳.

4.10 设 $\{X(t)\}$ 是一个复值平稳过程, 证明

$$E|X(t + \tau) - X(t)|^2 = 2\Re e(R(0) - R(\tau)).$$

证: 记 $m = EX(t)$

$$\begin{aligned} \text{则 } E|X(t + \tau) - X(t)|^2 &= E|(X(t + \tau) - m) - (X(t) - m)|^2 \\ &= E|X(t + \tau) - m|^2 + E|X(t) - m|^2 - E\left[(X(t + \tau) - m)\overline{(X(t) - m)}\right] \\ &\quad - E\left[(X(t) - m)\overline{(X(t + \tau) - m)}\right] \\ &= 2R(0) - R(-\tau) - R(\tau) \end{aligned}$$

又 $\because R(-\tau) = \overline{R(\tau)}$

\therefore 上式 $= 2\Re e(R(0) - R(\tau))$

4.11 设 $\{X(t)\}$ 是零均值的平稳高斯过程, 协方差函数为 $R(\tau)$, 证明

$$P(X'(t) \leq a) = \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{-R''(0)}}\right),$$

其中 $\phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数.

证：注意到 $X'(t)$ 服从正态分布

$$\text{而 } EX'(t) = [EX(t)]' = 0$$

$$\text{Var} X'(t) = \text{Cov}(X'(t), X'(t+0)) = -R''(0)$$

$$\therefore X'(t) \sim N(0, -R''(0))$$

$$\therefore P(X'(t) \leq a) = P\left(\frac{X'(t)}{\sqrt{-R''(0)}} \leq \frac{a}{\sqrt{-R''(0)}}\right) = \phi\left(\frac{a}{\sqrt{-R''(0)}}\right)$$

4.12 设 $\{X(t)\}$ 为连续宽平稳过程, 均值 m 未知, 协方差函数为 $R(\tau) = ae^{-b|\tau|}$, $\tau \in R, a > 0, b > 0$. 对固定的 $T > 0$, 令 $\bar{X} = T^{-1} \int_0^T X(s) ds$. 证明 $E\bar{X} = m$ (即 \bar{X} 是 m 的无偏估计) 以及

$$\text{Var}(\bar{X}) = 2a[(bT)^{-1} - (bT)^{-2}(1 - e^{-bT})].$$

提示：在上述条件下, 期望号与积分号可以交换.

证：

$$\begin{aligned} E\bar{X} &= E\left[\frac{1}{T} \int_0^T X(s) ds\right] \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T EX(s) ds \\ &= \frac{mT}{T} \\ &= m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{X}) &= E\left[\frac{1}{T^2} \left(\int_0^T X(t) dt - m\right) \left(\int_0^T X(s) ds - m\right)\right] \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T E[(X(t) - m)(X(s) - m)] ds dt \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T R(t-s) ds dt \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T ae^{-b|t-s|} ds dt \\ &= \frac{2a}{T^2} \int_0^T dt \int_0^T e^{-b(t-s)} ds \\ &= \frac{2a}{T^2} \int_0^T \frac{1}{b}(1 - e^{-bt}) dt \\ &= 2a[(bT)^{-1} - (bT)^{-2}(1 - e^{-bT})]. \end{aligned}$$

4.13 设 $\{X(t)\}$ 为平稳过程, 设 $\{X(t)\}$ 的 n 阶导数 $X^{(n)}(t)$ 存在, 证明 $\{X^{(n)}(t)\}$ 是平稳过程.

提示：利用协方差函数性质 4.

$$\text{证：} EX^{(n)}(t) = [EX(t)]^{(n)} = 0$$

$$\text{Cov}(X^{(n)}(t), X^{(n)}(t + \tau)) = (-1)^n R^{(2n)}(\tau)$$

$\therefore \{X^{(n)}(t)\}$ 是平稳过程.

4.14 证明定理 4.1 中关于平稳序列均值的遍历性定理.

提示：用 Schwarz 不等式

证：

充分性：

$$\begin{aligned} & E \left| \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N X(k) - m \right|^2 \quad (m = E(X_n)) \\ &= \frac{1}{(2N+1)^2} E \left(\sum_{k=-N}^N X(k) - m \right)^2 \\ &= \frac{1}{(2N+1)^2} E \left(\sum_{k=-N}^N X(k) - m \right) \left(\sum_{\ell=-N}^N X(\ell) - m \right) \\ &= \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{k=-N}^N \sum_{\ell=-N}^N R(k-\ell) \\ &= \frac{1}{(2N+1)^2} \left[\sum_{\tau=0}^N R(\tau) \cdot 2(2N+1-\tau) - (2N+1)R(0) \right] \\ &\leq \left| \frac{2}{2N+1} \sum_{\tau=0}^N R(\tau) \right| + \left| \frac{1}{2N+1} R(0) \right| \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2}{2N+1} \sum_{\tau=0}^N R(\tau) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2}{2N-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} R(\tau) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2N}{2N-1} \cdot \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} R(\tau) = 0,$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} R(0) = 0,$$

$$\therefore \lim_{N \rightarrow +\infty} E \left| \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N X(k) - m \right|^2 = 0.$$

必要性：记 $\bar{X}_N = \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N X_k$, 则有

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{2N+1} \sum_{\tau=0}^{2N} R(\tau) \right]^2 \\
&= \left[\frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N \text{Cov}(X_{-N}, X_k) \right]^2 \\
&= \left[\text{Cov}(X_{-N}, \bar{X}_N) \right]^2 \\
&\leq \text{Var}(X_{-N}) \text{Var}(\bar{X}_N) \quad (\text{Schwarz 不等式}) \\
&= R(0) E(\bar{X}_N - m)^2 \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow +\infty)
\end{aligned}$$

从而有

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{\tau=0}^{2N} R(\tau) = 0,$$

由上易得

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} R(\tau) = 0.$$

4.15 如果 (X_1, X_2, X_3, X_4) 是均值为 0 的联合正态随机向量, 则

$$\begin{aligned}
EX_1 X_2 X_3 X_4 &= \text{Cov}(X_1, X_2) \text{Cov}(X_3, X_4) + \text{Cov}(X_1, X_3) \text{Cov}(X_2, X_4) \\
&\quad + \text{Cov}(X_1, X_4) \text{Cov}(X_2, X_3).
\end{aligned}$$

利用这个事实证明定理 4.3

证:

取固定的 $\tau \in \mathbb{Z}$, 记 $X_{n+\tau} X_n \triangleq Y_n$, 则

$$\begin{aligned}
EY_n &= R_X(\tau) (\text{const}) \\
\text{Cov}(Y_{n+\tau_1}, Y_n) &= EY_{n+\tau_1} Y_n - R_X^2(\tau) \\
&= EX_{n+\tau_1+\tau} X_{n+\tau_1} X_{n+\tau} X_n - R_X^2(\tau) \\
&= R_X^2(\tau) + R_X^2(\tau_1) + R_X(\tau_1 + \tau) R_X(\tau_1 - \tau) - R_X^2(\tau) \\
&= R_X^2(\tau_1) + R_X(\tau_1 + \tau) R_X(\tau_1 - \tau) \\
&= R_Y(\tau_1)
\end{aligned}$$

$\therefore \{Y_n\}$ 是平稳过程.

又易见 $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 的协方差函数遍历性成立的充要条件是 $Y = \{Y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 的均值遍历性成立.

而我们有

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{\tau_1=0}^{N-1} R_Y(\tau_1) \right| &\leq \frac{1}{N} \sum_{\tau_1=0}^{N-1} |R_Y(\tau_1)| \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{\tau_1=0}^{N-1} \left[R_X^2(\tau_1) + \left(R_X^2(\tau_1 + \tau) + R_X^2(\tau_1 - \tau) \right) / 2 \right] \rightarrow 0, (N \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

由均值遍历性定理 (i) 可知, $Y = \{Y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 的均值遍历性成立, 即 $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 的协方差函数遍历性成立.

4.16 设 X_0 为随机变量, 其概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

设 X_{n+1} 在给定 X_0, X_1, \dots, X_n 下是 $(1 - X_n, 1]$ 上的均匀分布, $n = 0, 1, 2, \dots$, 证明 $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ 的均值有遍历性.

证:

$$\begin{aligned} EX_0 &= \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3} \\ EX_0^2 &= \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2} \\ EX_{n+1} &= E[E(X_{n+1}|X_n)] \\ &= E\left[\int_{1-x_n}^1 \frac{x_{n+1}}{x_n} dx_{n+1}\right] \\ &= E\left(1 - \frac{1}{2}X_n\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}EX_n \\ \therefore EX_0 &= \frac{2}{3} \quad \therefore EX_n \equiv \frac{1}{2} \end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned} EX_{n+1}^2 &= E[E(X_{n+1}^2|X_n)] \\ &= E\left[\int_{1-x_n}^1 \frac{x_{n+1}^2}{x_n} dx_{n+1}\right] \\ &= 1 - EX_n + \frac{1}{3}EX_n^2 \\ \therefore EX_0^2 &= \frac{1}{2} \quad \therefore EX_n^2 \equiv \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X_n X_{n+m}) &= E\left[E(X_n X_{n+m} | X_n)\right] \\
&= E\left[X_n E(X_{n+m} | X_n)\right] \\
&= E\left[X_n \left(1 - \frac{1}{2} E(X_{n+m-1} | X_n)\right)\right] \\
&= EX_n - \frac{1}{2} E\left[E(X_n X_{n+m-1} | X_n)\right] \\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} E(X_n X_{n+m-1}) \\
\therefore E(X_n X_{n+m}) - \frac{4}{9} &= -\frac{1}{2} \left(E(X_n X_{n+m}) - \frac{4}{9}\right) = \dots = \left(-\frac{1}{2}\right)^m \left(EX_n^2 - \frac{4}{9}\right) = \frac{1}{18} \left(-\frac{1}{2}\right)^m \\
\therefore R_X(n, n+m) &= E\left(X_n - \frac{2}{3}\right) \left(X_{n+m} - \frac{2}{3}\right) = E(X_n X_{n+m}) - \frac{4}{9} = \frac{1}{18} \left(-\frac{1}{2}\right)^m = R(m)
\end{aligned}$$

$\therefore \{X_n\}$ 是平稳序列

又 $\therefore \lim_{m \rightarrow +\infty} R(m) = 0$

\therefore 是均值遍历的

4.17 设 $\{\varepsilon_n, n = 0, \pm 1, \dots\}$ 为白噪声序列, 令

$$X_n = \alpha X_{n-1} + \varepsilon_n, |\alpha| < 1, n = \dots, -1, 0, 1, \dots,$$

则 $X_n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \varepsilon_{n-k}$, 从而证明 $\{X_n, n = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ 为平稳序列. 求出该序列的协方差函数. 此序列是否具有遍历性?

解:

$$\begin{aligned}
EX_n &= \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k E\varepsilon_{n-k} = 0 \\
R_X(n, n+m) &= \text{Cov}(X_n, X_{n+m}) \\
&= E\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k \varepsilon_{n-k}\right) \left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha^\ell \varepsilon_{m+n-\ell}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha^{k+\ell} E\varepsilon_{n-k} \varepsilon_{m+n-\ell} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^{2k+m} E\varepsilon_{n-k}^2 \\
&= \alpha^m \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2} \\
&= R(m)
\end{aligned}$$

$\therefore \{X_n\}$ 为平稳序列

又 $\lim_{m \rightarrow +\infty} R(m) = 0$, \therefore 是均值遍历的

以下没有特殊声明, 所涉及的过程均假定均值函数为 0

4.20 设 $\{X(t)\}$ 为平稳过程, 令 $Y(t) = X(t+a) - X(t-a)$. 分别以 R_X, S_X 和 R_Y, S_Y 记随机过程 X 和 Y 的协方差函数和功率谱密度, 证明

$$R_Y(\tau) = 2R_X(\tau) - R_X(\tau+2a) - R_X(\tau-2a),$$

$$S_Y(\omega) = 4S_X(\omega) \sin^2 a\omega.$$

证:

$$\begin{aligned} R(\tau) &= E[X(t+a) - X(t-a)] [X(t-\tau+a) - X(t-\tau-a)] \\ &= E[X(t+a)X(t-\tau-a)] - E[X(t+a) - X(t-\tau-a)] \\ &\quad - E[X(t-a)X(t-\tau-a)] + E[X(t-a) - X(t-\tau-a)] \\ &= R_X(\tau) - R_X(\tau+2a) - R_X(\tau-2a) + R_X(\tau) \\ &= 2R_X(\tau) - R_X(\tau+2a) - R_X(\tau-2a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_Y(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau+2a) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau-2a) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= S_X(\omega) (2 - e^{2a\omega i} - e^{-2a\omega i}) \\ &= S_X(\omega) (2 - 2\cos 2a\omega) \\ &= 4S_X(\omega) \sin^2 a\omega \end{aligned}$$

4.21 设平稳过程 X 的协方差函数 $R(\tau) = \sigma^2 e^{-\tau^2}$, 试研究其功率谱密度函数的性质.

解:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 e^{-\tau^2} e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \sigma^2 e^{-\frac{\omega^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\tau^2 + i\omega\tau - \frac{\omega^2}{4})} d\tau \\ &= \sigma^2 e^{-\frac{\omega^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\tau + \frac{i\omega}{2})^2}{2 \times \frac{1}{2}}} d\tau \\ &= \sigma^2 \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}. \end{aligned}$$

$S(\omega)$ 为 \mathbb{R} 上的实的、偶的、非负且可积的函数.