中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

Chapter 1

离散时间信号与系统

1.3 设$x(n)$和y(n)分别表示一个系统的输入和输出，试确定下列系统是否为：

（1）稳定系统；（2）因果系统；（3）线性系统，并说明理由。

（a）$y(n) = ax^2(n)$

（b）$y(n) = x\,(n) + 3$

考察点：系统因果性，稳定性基本定义

解：（a）（1）稳定性证明：$|x(n)| \le M$，则$|y(n)| = |ax^2(n)| \le |a|M^2$

（2）因果性证明：因为$y(n) = ax^2(n)$，不取决于输入的将来值，所以该系统是因果系统。

（3）系统是非线性的，因为：

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = ax_1^2(n)$$

$$y_2(n) = T[x_2(n)] = ax_2^2(n)$$

$$y(n) = T[x_1(n) + x_2(n)] = a[x_1(n) + x_2(n)]^2 \neq y_1(n) + y_2(n)$$

(b)

(1) 稳定性证明: $|x(n)| \le M$,则$|y(n)| = |x(n)+3| \le M+3$

(2) 因果性证明: 因为 $y(n) = x(n) + 3$, 不取决于输入的将来值, 所以该系统是因果系统。

(3) 系统是非线性的, 因为:

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = x_1(n) + 3, y_2(n) = T[x_2(n)] = x_2(n) + 3$$

$$令 x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$$

$$y(n) = T[x(n)] = ax_1(n) + bx_2(n) + 3 \ne ay_1(n) + by_2(n)$$

注意: 采用单位冲激响应$h(n)$的因果性和绝对可和性质判决系统的因果性和稳定性仅在

线性非时变系统下成立。

1.4 已知$x(n)$的傅里叶变换为$X\left(e^{jw}\right)$，求下列序列的傅里叶变换。

（3） $x(2n)$

考察点：DTFT定义公式

解：$G\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(2n)e^{-j\omega n}=\sum_{n为偶数}x(n)e^{-j\omega n/2}$

消除“n为偶数”的约束条件：$\sum_{n为偶数}x(n)e^{-j\omega n/2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\left[x(n)+(-1)^{n}x(n)\right]e^{-j\omega n/2}$

整理为求解两个序列的傅里叶变换：

$$G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n/2}+\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-j\pi n}x(n)e^{-j\omega n/2}=\frac{1}{2}X\left(e^{j\omega/2}\right)+\frac{1}{2}X\left(e^{j(\omega-2\pi)/2}\right)$$

1.5 设序列$x(n)$的傅里叶变换为$X\left(e^{jw}\right)$，证明：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$$

考察点：傅立叶变换的共轭对称性：$x^*(n)\to X^*(e^{-j\omega})$

解：
$$x^*(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X^*(e^{-j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X^*(e^{j\omega'})e^{-j\omega' n}d\omega'$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x^*(n)$$

1.9 设因果稳定IIR滤波器的$H(z)$为:

$$H(z) = K\frac{1-z^{-1}}{1-dz^{-1}}$$

(1) 试确定K的值，使得$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|_{max} = 1$

(2) 系统的单位脉冲响应$h(n)$

考察点：系统函数和单位冲激响应

解：(1) 系统幅度响应的平方为

$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2 = H(z)H(z^{-1})\Big|_{z=e^{j\omega}} = 2K^2\frac{1-\cos\omega}{1+d^2-2d\cos\omega}$$

对上式求导，可得

$$\frac{d\left|H(e^{j\omega})\right|^2}{d\omega}=2K^2\frac{(\sin\omega)(1-d)^2}{(1+d^2-2d\cos\omega)^2}$$

在$0\le\Omega\le\pi$范围内，系统幅度响应平方的导数非负，所以在$\Omega=\pi$处达到最大。即：$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|_{max}=1$，则有：

$$1=K\frac{2}{1+d}$$

所以：

$$K=\frac{1+d}{2}$$

（2）注意到题干为因果稳定系统，所以单位脉冲响应为：

$$h[k]=\frac{1+d}{2}(d^k u[k]-d^{k-1}u[k-1])$$

1.10 若$F(z)$为f(n)的Z变换，$G(z)$为$g(n)$的Z变换，且：

$$G(z)=\frac{1}{z}\frac{d^2}{dz^2}F(\frac{z}{3})$$

考察点：Z变换性质，做题时要注意层层嵌套的Z变换性质

主要用到的Z变换性质：

$$a^n x(n) \leftrightarrow X(a^{-1}z)$$
$$nx(n) \leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$$
$$x(n+n_0) \leftrightarrow z^{n_0}X(z)$$

解：

根据$a^n x(n) \leftrightarrow X(a^{-1}z)$，$nx(n) \leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$以及$x(n+n_0) \leftrightarrow z^{n_0}X(z)$的z变换性质可以得到：

$$\frac{d^2}{dz^2}X(z)=\frac{d}{dz}\left[-\frac{1}{z}\cdot -z\cdot\frac{d}{dz}X(z)\right]=-\frac{1}{z}\cdot\frac{d}{dz}\left[-z\frac{d}{dz}X(z)\right]+\frac{1}{z^2}\left[-z\frac{d}{dz}X(z)\right]$$

$$-\frac{1}{z}\cdot\frac{d}{dz}\left[-z\frac{d}{dz}X(z)\right]=\frac{1}{z^2}\cdot -z\frac{d}{dz}\left[-z\frac{d}{dz}X(z)\right]\leftrightarrow(n-2)^2x(n-2)$$

$$\frac{1}{z^2}\left[-z\frac{d}{dz}X(z)\right]\leftrightarrow(n-2)x(n-2)$$

则：

$$\frac{1}{z}\frac{d^2}{dz^2}X\left(\frac{z}{3}\right)\leftrightarrow(n-3)^2 3^{n-3}x(n-3)+(n-3)3^{n-3}x(n-3)$$ 代入

解得：

$$g(n)=(n-3)^2 3^{n-3}f(n-3)+(n-3)3^{n-3}f(n-3)$$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

Chapter 2

离散傅立叶变换（DFT）

2.1 计算下列有限长序列$x(n)$的DFT，假设序列长度为N

（4）$x(n)=nR_N(n)$

考察点：DFT的计算，注意标明k的取值范围

解：令$x_1(n)=R_N(n)$，则$X_1(z)=\sum_{n=0}^{N-1} z^{-n}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$

利用z变换中的性质$X(z)=-z\frac{dX_1(z)}{dz}$，因此

$$X(k)=X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}}=-\frac{N}{1-W_N^k}, k=1,2,\ldots N-1$$

$$X(k)\Big|_{k=0}=\sum_{n=0}^{N-1} nW_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1} n=\frac{N(N-1)}{2}, k=0$$

2.2 研究两个周期序列$\tilde{x}(n)$和$\tilde{y}(n)$， $\tilde{x}(n)$具有最小周期N而$\tilde{y}(n)$具有最小周期M， $M \neq N$。序列$\tilde{w}(n)$定义为$\tilde{w}(n) = \tilde{x}(n) + \tilde{y}(n)$

（1）求序列$\tilde{w}(n)$的最小周期，给出证明过程。

（2）设$\tilde{X}(k)$为$\tilde{x}(n)$的DFS，$\tilde{Y}(k)$为$\tilde{y}(n)$的DFS，$\tilde{W}(k)$为$\tilde{w}(n)$的DFS。试用$\tilde{X}(k)$和$\tilde{Y}(k)$为表示$\tilde{W}(k)$。

考察点：DFS的定义与计算

解： （1）

最小周期为M和N的最小公倍数$Q = LCM(M, N) = k_1 M = k_2 N$

因为$\tilde{w}(n) = \tilde{x}(n) + \tilde{y}(n)$,所以

$$\begin{aligned}\tilde{w}(n+Q) &= \tilde{x}(n+k_2N) + \tilde{y}(n+k_1M) \\ &= \tilde{x}(n) + \tilde{y}(n) = \tilde{w}(n)\end{aligned}$$

下面证明其是最小周期:

假设$\exists K < Q$，K为正整数，使得其是序列$\tilde{w}(n)$的周期，则有

$\tilde{w}(n+K) = \tilde{x}(n+K) + \tilde{y}(n+K) = \tilde{x}(n) + \tilde{y}(n) = \tilde{w}(n)$

移位得$\tilde{x}(n+K) - \tilde{x}(n) = \tilde{y}(n) - \tilde{y}(n+K)$

由于$M \neq N$，$\tilde{x}(n+K) - \tilde{x}(n)$和$\tilde{y}(n) - \tilde{y}(n+K)$不能同时取0

又$\tilde{x}(n+K) - \tilde{x}(n)$的周期为$N$，

$\tilde{y}(n) - \tilde{y}(n+K)$的周期为$M$

所以两者不相等，矛盾。

故$Q = LCM(M,N)$是最小周期

（2）由上一问知，MN为$\tilde{x}(n)$的周期，把$\tilde{x}(n)$看成周期为MN的序列，其DFS为$\tilde{x}_{MN}(k)=\sum_{n=0}^{MN-1}\tilde{x}(n)W_{MN}^{kn}$

可以把上式看作长为N的M段相加，令$n'=n-lN$，其中$0\le n'\le N-1$

则

$$\tilde{x}_{MN}(k)=\sum_{n'=0}^{N-1}\tilde{x}(n')W_{MN}^{kn'}\sum_{l=0}^{M-1}W_{MN}^{lkN}$$

$$=\sum_{n'=0}^{N-1}\tilde{x}(n')e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{k}{M}n'}\sum_{l=0}^{M-1}W_{MN}^{lkN}$$

前面一项就是$\tilde{X}\left(\frac{k}{M}\right)$

后面一项由于$\sum_{l=0}^{M-1} W_{MN}^{lkN} = \begin{cases} M, 当k为的M倍数时 \\ 0 \qquad\qquad 其他 \end{cases}$

整理一下为 $\sum_{l=0}^{M-1} W_{MN}^{lkN} = M \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(k-lM)$

所以得$\tilde{X}_{MN}(k) = M\tilde{X}\left(\frac{k}{M}\right) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(k-lM)$

同理可求$\tilde{Y}_{MN}(k)$

最终结果:

$$\tilde{W}(k) = \tilde{X}_{MN}(k) + \tilde{Y}_{MN}(k)$$

$$= M\tilde{X}\left(\frac{k}{M}\right) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(k-lM) + N\tilde{Y}\left(\frac{k}{N}\right) \sum_{l'=-\infty}^{+\infty} \delta(k-l'N)$$

2.6 已知序列$x(n) = a^n u(n)$，$0 < a < 1$，今对其Z变换$X(z)$在单位圆上N等分采样，采样值为

$$X(k) = X(z)\big|_{z=W_N^{-k}} \quad ,0 \le k \le N-1$$

（1）求有限长序列IDFT$X(k)$

（2）若$x(n) = a^n R_N(n)$，$0 < a < 1$，重复上述过程

（3）试作分析比较和解释上述两个结果。

考察点：Z变换与DFT关系，频域取样与栅栏效应

解：（1）

步骤1：先对$x(n)$求Z变换$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}}$

步骤二：对Z变换在单位圆上N点取样

$$X(k)=X(z)\big|_{z=W_N^{-k}}=\frac{1}{1-az^{-1}}\bigg|_{z=W_N^{-k}}=\frac{1}{1-aW_N^k}$$
$$=\frac{1}{1-a^N}\cdot\frac{1-a^NW_N^{Nk}}{1-aW_N^k}=\frac{1}{1-a^N}\sum_{n=0}^{N-1}(aW_N^k)^n$$
$$=\frac{1}{1-a^N}\sum_{n=0}^{N-1}a^nW_N^{nk}$$

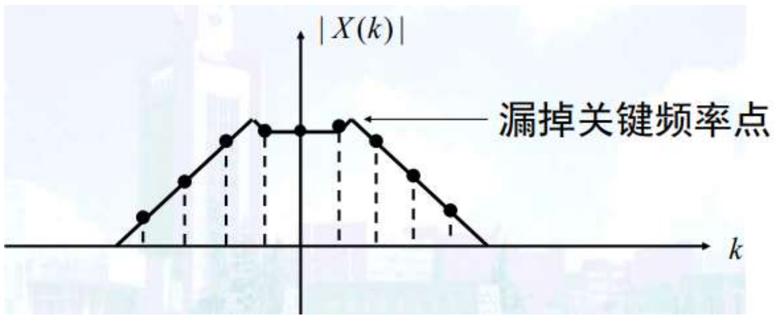
步骤三：求IDFT

$$\therefore \mathrm{IDFT}\left[X(k)\right]=\frac{1}{1-a^N}a^nR_N(n)$$

（2）同理 $\mathrm{IDFT}\left[X(k)\right]=a^{n}R_{N}(n)=x(n)$

（3）分析：参考书97页

第一问中序列长度为无限长，频域N点取样，时域周期延拓，但由于采样密度不够，造成时域混叠，在频域上解释为栅栏效应。对于无限长序列，无论N取什么，都不可能消除混叠误差，只能随着N的增加，逐渐改善。



第二问中序列长度为N，当频域采样点数M满足 $N \le M$ 时，均可以不失真的恢复出原序列。

2.9对一个序列作谱分析，要求谱分辨率$F \le 50\text{Hz}$，信号最高频率为1kHz，试确定以下各参数：

（4）将频谱分辨率提高一倍时，最少取样点数N_{min}的值应该变为多少。

解：频带宽度不变， 即信号最高频率f_c不变，频率分辨率提高一倍是指，频率分量间的增量变为原来的二分之一，故分辨率的数值大小变为原来的一半。

$$N_{min} = \frac{2f_c}{F} = \frac{2 \times 1000}{25} = 80$$

2.10 设一模拟信号$x(t) = cos(\Omega_0 t)$，经采样后得到序列$x(n) = cos(\omega_0 n)$。现将其截断成一个N点长序列$x_N(n)$，相当于乘上一个N点长的窗函数$\omega_N(n)$，讨论矩形窗截断的情况，即$x_N(n) = x(n)R_N(n)$。

解：

（1）请推导出N点矩形窗的频谱表达式，进一步求出其幅度谱、相位谱。

注意：幅度谱加绝对值

画图时，关键的频点，例如幅度为0时的横坐标要标记出来

（2）用N=5的矩形窗加窗，请画出原序列的频谱和经加窗后信号的频谱图像。

注意：原序列的频谱为两个冲激函数，利用卷积的性质，相当于将第一问的结果进行了搬移，分别搬移到$\pm\omega_0$处

（3）若另一序列$x_1(n)$在ω_1和ω_2处是两根谱线，现定义频率分辨率为矩形窗谱主瓣宽度（$4\pi/N$）的一半，用N点矩形窗$R_N(n)$进行加窗，比较截断前后频谱，分析N，ω_1和ω_2在什么条件下，经频域卷积后，两个频谱将无法分辨出来

解：$|\omega_1-\omega_2|<\dfrac{2\pi}{N}$

（4）信号截断后可能会产生频谱泄漏和谱间串扰。现对无限长非周期信号进行截断，试举出至少一种缓解截断效应的方法，并解释为什么能起到缓解作用。

解：①采用缓变型的窗函数（例如海明窗）减小旁瓣幅度，从而降低谱间串扰

②增加窗函数的长度，减小过渡带宽，从而减小泄露。

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

Chapter 3

快速傅里叶变换（FFT）

3.3 当DFT的点数是2的整数幂时，我们可以使用基2-FFT算法。但是，当$N = 4^v$时，使用基4-FFT算法效率更高。请根据所学知识完成下列问题：

（a） 推导$N = 4^v$时基4按时间抽取的FFT算法；

（b）画出基4-FFT算法的蝶形图，比较基4-FFT算法和基2-FFT算法的复乘和复加次数。

考察点：基2-FFT，基4-FFT

解：

（a）定义符号映射如下：

$$n = 4n_1 + n_2, \qquad 0 \le n_1 \le \frac{N}{4} - 1, 0 \le n_2 \le 3$$

$$k = k_1 + \frac{N}{4}k_2, \qquad 0 \le k_1 \le \frac{N}{4} - 1, 0 \le k_2 \le 3$$

基于时间抽样的FFT:

$$X(k)=X(k_1+\frac{N}{4}k_2)=\sum_{n_2=0}^{3}\left\{\left[\sum_{n_1=0}^{\frac{N}{4}-1}x(4n_1+n_2)W_{N/4}^{n_1k_1}\right]W_N^{n_2k_1}\right\}W_4^{n_2k_2}$$

时间抽样的FFT将N点DFT拆分为:

四个N/4点的DFT: $G(n_2,k_1)=\sum_{n_1=0}^{\frac{N}{4}-1}x(4n_1+n_2)W_{N/4}^{n_1k_1}$

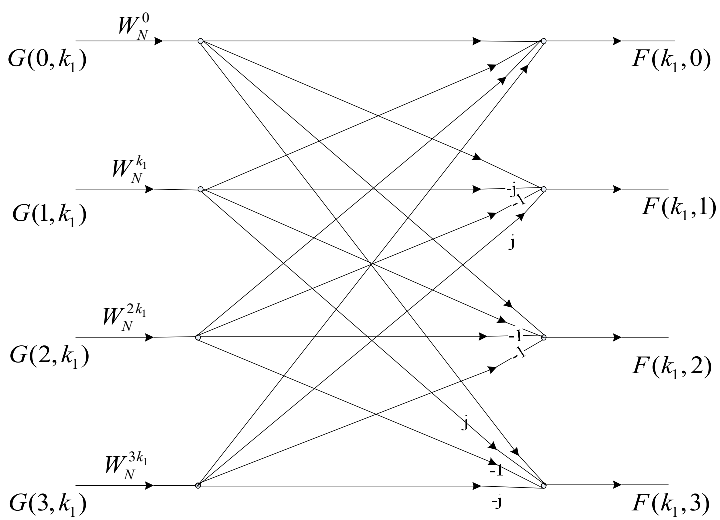
式子外边为一个4点DFT: $X(k_1+\frac{N}{4}k_2)=\sum_{n_2=0}^{3}\left\{\left[G(n_2,k_1)W_N^{n_2k_1}\right]\right\}W_4^{n_2k_2}$

如果N=4^v: 用这种方法一直分解可以得到$v=log_4N$级分解，每一级包含N/4个蝶形运算。

（b）基4-FFT中的4点蝶形运算如下

$$F(k_1,k_2)=\sum_{n_2=0}^{3}\left\{\left[G(n_2,k_1)W_N^{n_2k_1}\right]\right\}W_4^{n_2k_2},\quad k_2=0,1,2,3$$

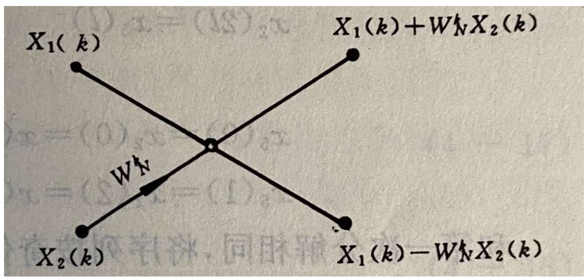
基4-FFT蝶形运算图以及基4-FFT 和基2-FFT蝶形运算计算量对比如下：



	复乘次数	复加次数
基2-FFT	$\frac{N}{2}\log_2 N$	$N\log_2 N$
基4-FFT	$\frac{3N}{4}\log_4 N$	$2N*\log_4 N$

知识点：FFT算法

基于时间抽样的基2-FFT算法：

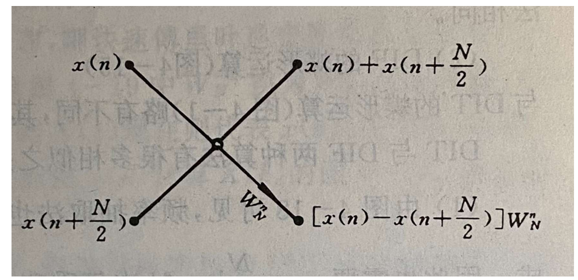


$$n=2n_1+n_2,\qquad 0\le n_1\le \frac{N}{2}-1, 0\le n_2\le 1$$

$$k=k_1+\frac{N}{2}k_2,\qquad 0\le k_1\le \frac{N}{2}-1, 0\le k_2\le 1$$

$$X(k)=X(k_1+\frac{N}{2}k_2)=\sum_{n_2=0}^{1}\left\{\left[\sum_{n_1=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2n_1+n_2)W_{N/2}^{n_1k_1}\right]W_N^{n_2k_1}\right\}W_2^{n_2k_2}$$

基于频域抽样的基2-FFT算法：



$$n=n_1+\frac{N}{2}n_2,\qquad 0\le n_1\le \frac{N}{2}-1, 0\le n_2\le 1$$

$$k=2k_1+k_2,\qquad 0\le k_1\le \frac{N}{2}-1, 0\le k_2\le 1$$

$$X(k)=X(2k_1+k_2)=\sum_{n_1=0}^{\frac{N}{2}-1}\left\{\left[\sum_{n_2=0}^{1}x(n_1+\frac{N}{2}n_2)W_2^{n_2k_2}\right]W_N^{n_1k_2}\right\}W_{N/2}^{n_1k_1}$$

3.6 $X(e^{j\omega})$表示长度为10的有限长序列$x(n)$的DTFT。我们希望计算$X(e^{j\omega})$在频率$\omega_k = \frac{2\pi k^2}{100}, k = 0,1,\dots,9$时的10个抽样。计算时不能采用先算出比要求数更多的抽样然后再丢掉一些的办法。讨论采用下列各方法的可能性：

（1）直接利用10点的FFT算法，若可能，给出奇偶分解的最终计算公式和乘法次数；

（2）利用线性调频Z变换算法。

考察点：FFT，线性调频Z变换算法

解：

（1）直接利用FFT算法：$X\left(e^{jw}\right)=\sum_{n=0}^{9}x\left(n\right)e^{-jw_k n}=\sum_{n=0}^{9}x\left(n\right)e^{-j\frac{2\pi k^2}{100}n}$

采用时间抽样的方法，将n为奇数和偶数部分分开，得：

$$X\left(e^{jw}\right)=\sum_{r=0}^{4}x\left(2r\right)e^{-j\frac{2\pi k^2}{100}2r}+\sum_{r=0}^{4}x\left(2r+1\right)e^{-j\frac{2\pi k^2}{100}(2r+1)}$$

$$=\sum_{r=0}^{4}x\left(2r\right)e^{-j\frac{2\pi k^2}{50}r}+e^{-j\frac{2\pi k^2}{100}}\sum_{r=0}^{4}x\left(2r+1\right)e^{-j\frac{2\pi k^2}{50}r}$$

$$=G_0\left(k\right)+e^{-j\frac{2\pi k^2}{100}}G_1\left(k\right),k=0,1,\ldots,9$$

$$G_l\left(k\right)=\sum_{r=0}^{4}x\left(2r+l\right)e^{-j\frac{2\pi k^2 r}{50}}$$

$$=\sum_{s=0}^{2}x\left(4s+l\right)e^{-j\frac{2\pi k^2 s}{25}}+e^{-j\frac{2\pi k^2}{50}}\sum_{s=0}^{1}x\left(4s+2+l\right)e^{-j\frac{2\pi k^2 s}{25}},l=0,1$$

$$G_l(k)=\sum_{r=0}^{4}x(2r+l)e^{-j\frac{2\pi k^2 r}{50}}$$

$$=\sum_{s=0}^{2}x(4s+l)e^{-j\frac{2\pi k^2 s}{25}}+e^{-j\frac{2\pi k^2}{50}}\sum_{s=0}^{1}x(4s+2+l)e^{-j\frac{2\pi k^2 s}{25}},l=0,1$$

一次复乘操作需要四次实数乘法:

对于每个k值，计算$G_l(k)$需要计算8+8=16次实数乘法（s=0时无乘法）；

对于每个k值，计算$X(e^{j\omega})$需要计算2*16+4=36次实数乘法（s=0时无乘法）；因此总共需要用到36*9=324
次（k=0时不需要乘法）次实数乘法。

（2）用线性调频z变换算法:

$$X\left(z_k\right)=\sum_{n=0}^{9} x(n) A^{-n} W^{nk}=\sum_{n=0}^{9} x(n) A^{-n}\left(e^{-j2\pi k/100}\right)^{nk}$$

其中$W=e^{-j2\pi k/100}$是k的函数，不满足CZT算法的要求，因而不能采用CZT算法来实现。

知识点：线性调频Z运算

1.CZT对比FFT：

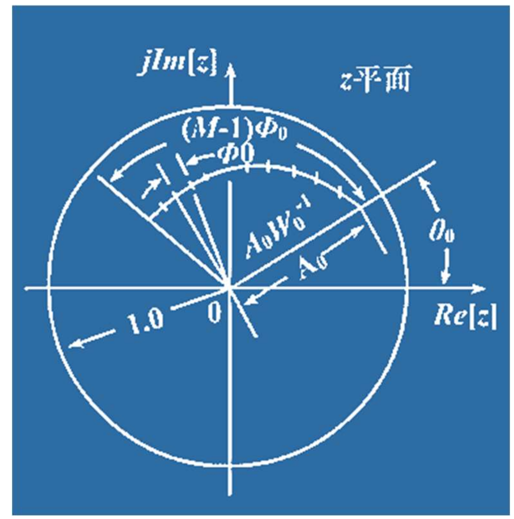
FFT只研究在z平面单位圆上的等间隔采样点，FFT不适用于：
- 只研究信号的某一频段，要求对该频段抽样密集，提高分辨率；
- 研究非单位圆上的抽样值；
- 需要准确计算N点DFT,且N为比较大的素数；等等

CZT算法：对Z变换做螺线采样，可以适用以上FFT无法处理的情况

2.CZT算法原理: $X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$

$$X(z_k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z_k^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)A^{-n}W^{nk} \qquad z_k=AW^k$$

沿z平面上的一段螺线做等分角采样抽样，抽样点为z_k:



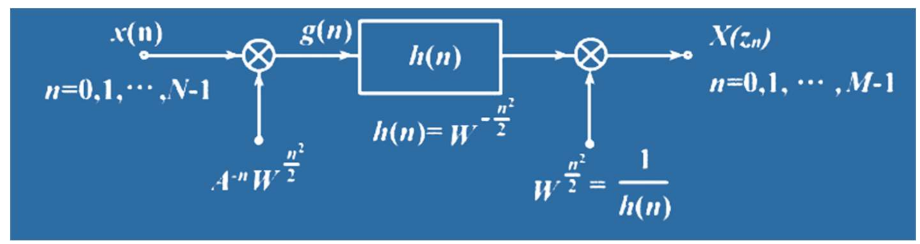
3.求解抽样点处Z变换：

$$X(z_k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)A^{-n}W^{nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}}W^{-\frac{(k-n)^2}{2}}$$

$$=W^{\frac{k^2}{2}}\left[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}}\right]W^{-\frac{(k-n)^2}{2}}$$

$$=W^{\frac{k^2}{2}}[g(k)*h(k)]$$



- 主要到采样点z_k中的A和W均为螺线采样的初始量和步进量，都为常数。满足条件的采样点z_k才能实现以上CZT算法。

3.7 线性调频Z变换可以用来计算一个有限长序列$h(n)$在Z平面实轴上的取样点z_k的Z变换$H(z_k)$。那么，请指出以下三个有关采样点z_k说法中正确的说法，并简单证明。注：只需要证明正确的说法。

(1)在一定的条件下，存在$z_k = a^k, k = 0,1,\dots,N-1$，$a$为实数，$a \neq 1$；

(2)在一定的条件下，存在$z_k = ak, k = 0,1,\dots,N-1$，$a$为实数，$a \neq 1$；

(3)线性调频Z变换不能计算$H(z)$在Z平面实轴上的取样值，即(1)和(2)都不行。

考察点：线性调频Z变换

解：在线性调频Z变换中，设N为采样点数，采样点z_k可以表示为

$$z_k = AW^{-k}, k = 0,1,\dots,N-1$$

其中

$$A = A_0 e^{j\theta_0}, W = W_0 e^{-j\phi_0}$$

则

$$z_k = A_0 e^{j\theta_0} W_0^{-k} e^{jk\phi_0}, k = 0,1,\dots,N-1$$

要采用线性调频Z变换，采样点z_k需要满足上式，只有条件（1）满足条件。

Chapter 4

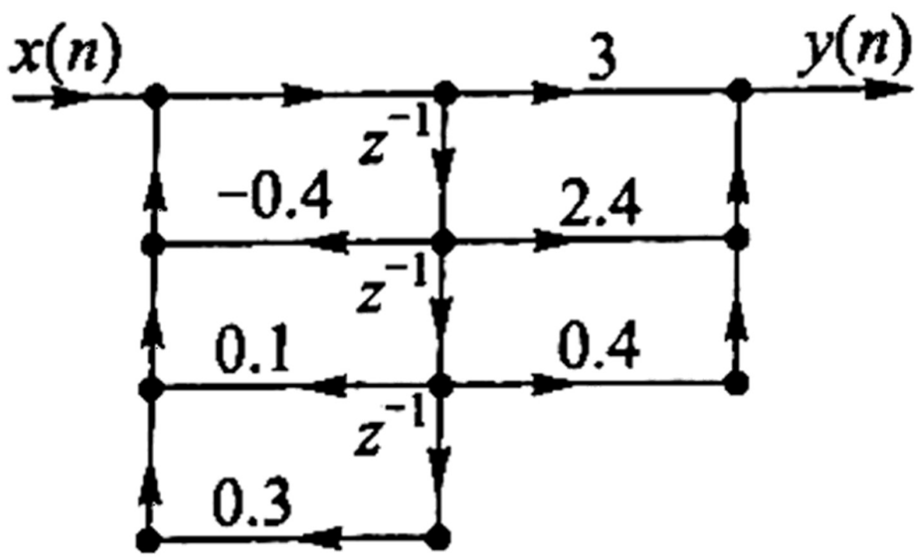
数字滤波器及其结构

4.2 已知某三阶数字滤波器的系统函数为:

$$H(z)=\frac{3+2.4z^{-1}+0.4z^{-2}}{(1-0.6z^{-1})(1+z^{-1}+0.5z^{-2})}$$

试画出其直接II型、级联型和并联型结构。

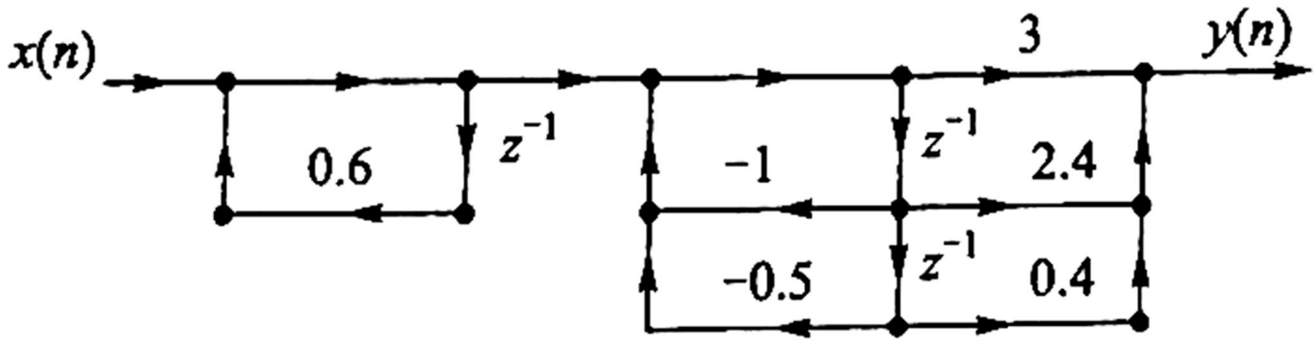
解：直接型：$H(z)=\frac{3+2.4z^{-1}+0.4^{-2}}{(1-0.6z^{-1})(1+z^{-1}+0.5z^{-2})}=\frac{3+2.4z^{-1}+0.4z^{-2}}{1+0.4z^{-1}-0.1z^{-2}-0.3z^{-3}}$，可得到直接II型的结构为：



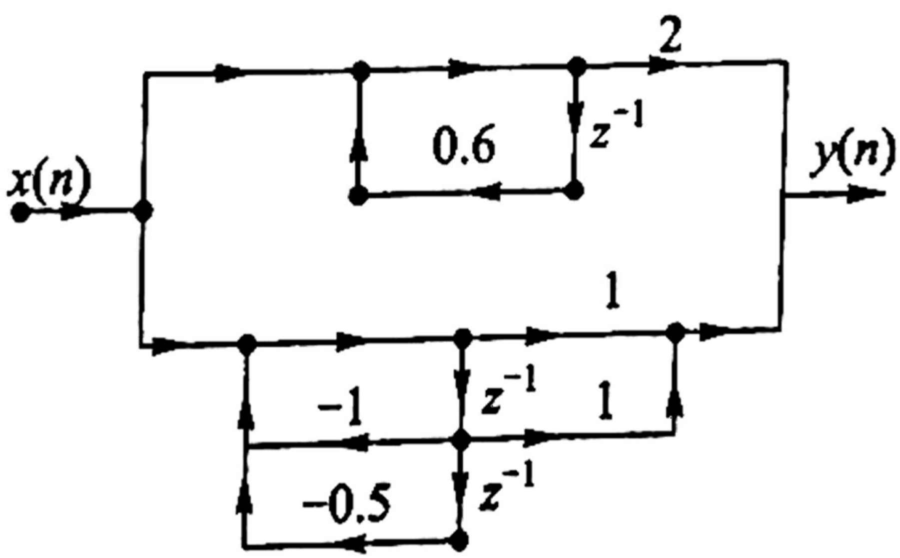
➤ IIR滤波器的结构

级联型：系统函数有一个实极点和一对共轭复极点，将 $H(z)$分母分解为实系数一阶项和二阶项之积，

$H(z)=\frac{1}{1-0.6z^{-1}}\frac{3+2.4z^{-1}+0.4z^{-2}}{1+z^{-1}+0.5z^{-2}}$ ，可以得到级联型结构为：

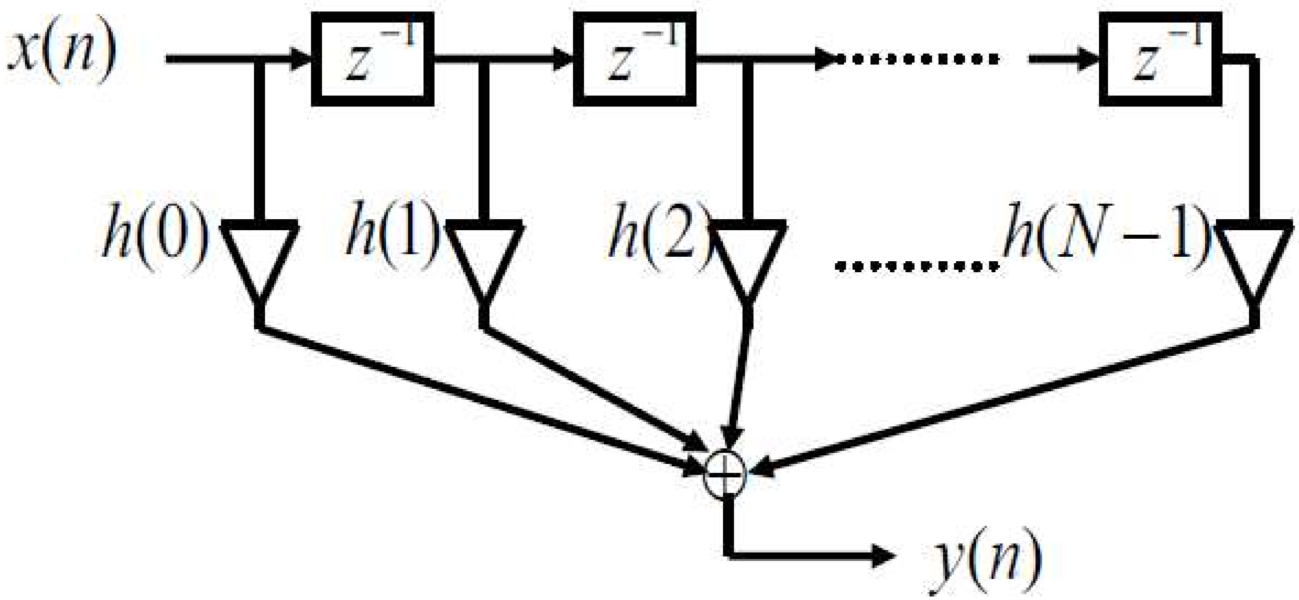


并联型：将 $H(z)$部分分式展开 $H(z)=\frac{1}{1-0.6z^{-1}}+\frac{1+z^{-1}}{1+z^{-1}+0.5z^{-2}}$ ，可以得到并联型结构为：



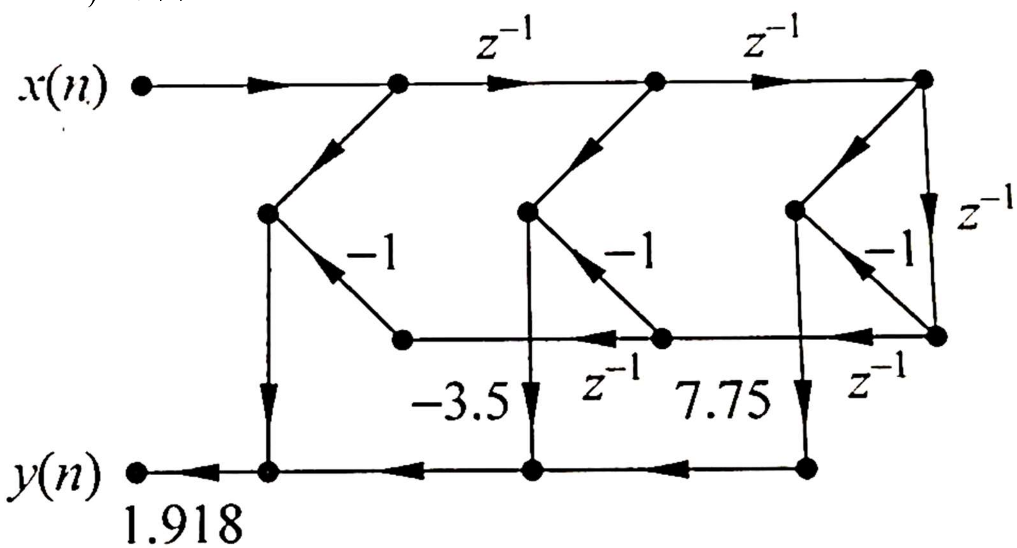
4.6 （1）已知 $H(z)=1.918\left(1-3.5z^{-1}+7.75z^{-2}-7.75z^{-3}+3.5z^{-4}-z^{-5}\right)$，画出该 FIR 滤波器的最简结构。

（2）若 $H(z)=\frac{1}{5}(1+3z^{-1}+5z^{-2}+3z^{-3}+z^{-4})$ ，画出该 FIR 滤波器的最简结构。

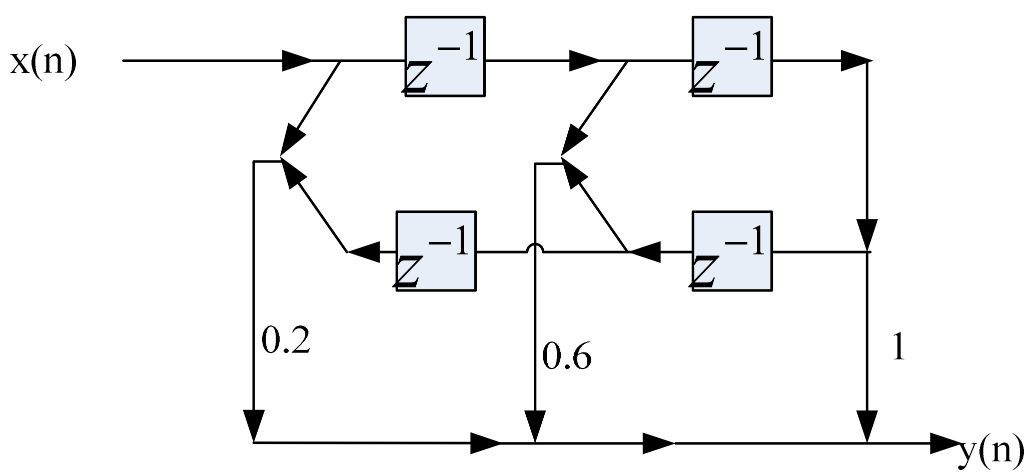


FIR直接型实现结构

解：（1）由 $h(n)=-h(N-1-n)$ 可得：



（2）由 $h(n)=h(N-1-n)$ 可得：

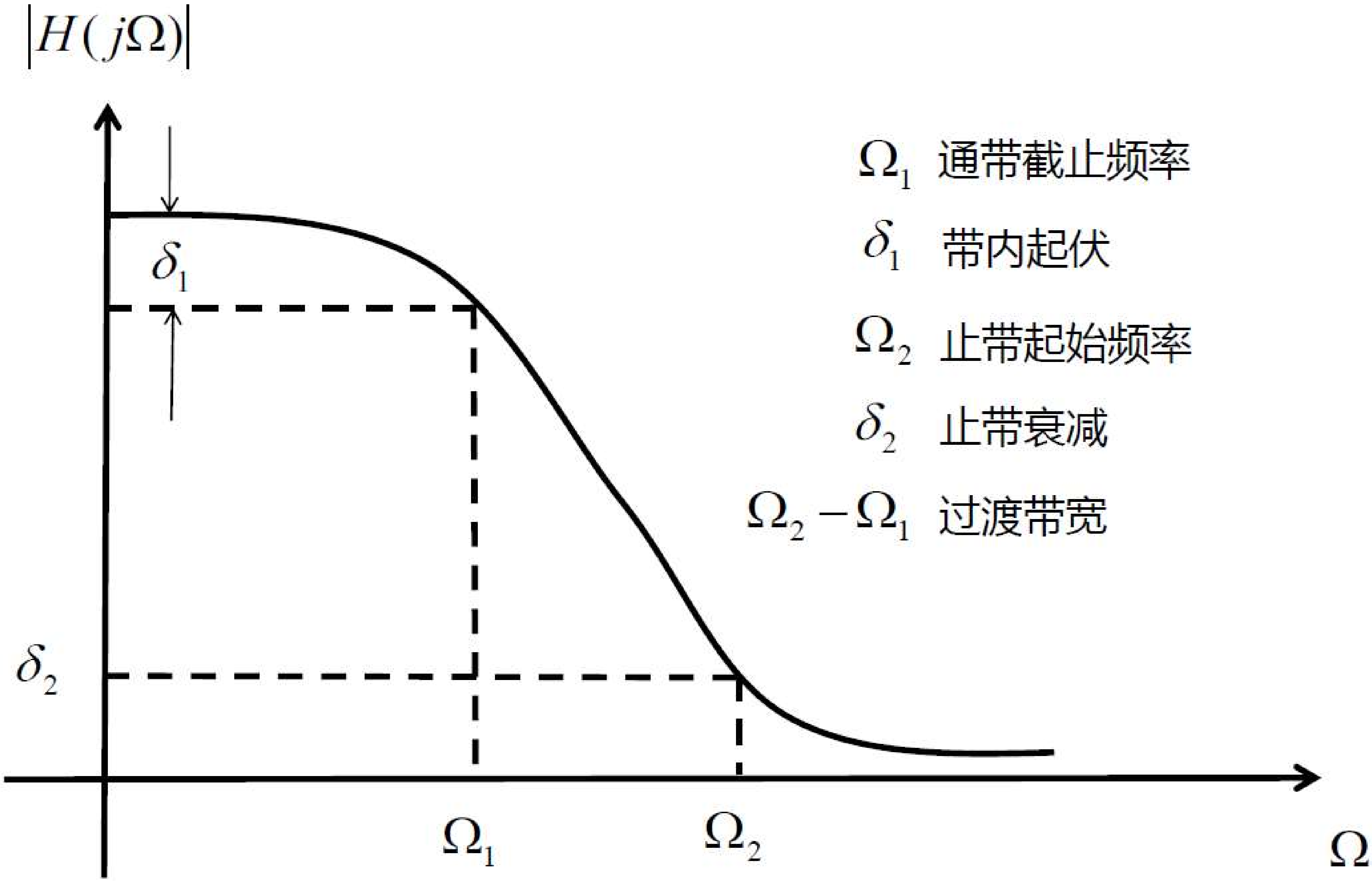


中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

Chapter 5

IIR数字滤波器设计

➢ 滤波器设计指标



Ω_1 通带截止频率

δ_1 带内起伏

Ω_2 止带起始频率

δ_2 止带衰减

$\Omega_2-\Omega_1$ 过渡带宽

5.3 试用双线性变换法设计低通数字滤波器，设计指标为：通带截止频率为 $100Hz$,通带幅度波动小于$1dB$，止带起始频率为$150Hz$，止带衰减大于 $10dB$。采样间隔为$T_s=1ms$ 。

解：（1）由模拟指标求数字指标：

$$w_1=2\pi\frac{f_1}{f_s}=0.2\pi \qquad w_2=2\pi\frac{f_2}{f_s}=0.3\pi$$

（2）由数字指标求模拟滤波器指标：（双线性变换要反畸变）

$$\Omega_1=\tan\frac{w_1}{2}=0.3249 \qquad \Omega_2=\tan\frac{w_2}{2}=0.5095$$

$$\delta_1=1dB \qquad \delta_2=10dB$$

（3）选模型设计模拟滤波器 ：

Chebyshev模型： ε、Ω_c、N

$$|H_a(j\Omega)|^2=A^2(\Omega)=\frac{1}{1+\varepsilon^2C_N^2(\frac{s}{j\Omega_c})}\Big|_{s=j\Omega}$$

Butterworth模型： N、Ω_c

$$A^2(\Omega)=\frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

（4）求模拟滤波器：

Chebyshev模型： ε、Ω_c、N

$$\varepsilon=(10^{\delta_1/10}-1)^{1/2}=0.5088$$

$$\Omega_c=\Omega_1=0.3249$$

试算法求 N：

$$N=2 \quad 10\lg\left[1+\varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_c}\right)\right]=6.9676<\delta_2$$

$$\boxed{N=3} \quad 10\lg\left[1+\varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_c}\right)\right]=14.8793>\delta_2$$

$$\boxed{\begin{aligned} C_0(x)&=1\\ C_1(x)&=x\\ C_2(x)&=2x^2\\ C_3(x)&=4x^3-3x \end{aligned}}$$

Butterworth模型： N、Ω_c

$$N=\frac{1}{2}\cdot\frac{\lg\dfrac{10^{\delta_2/10}-1}{10^{\delta_1/10}-1}}{\lg\dfrac{\Omega_2}{\Omega_1}}=3.9435 \qquad \boxed{N=4}$$

折中取 Ω_c，保证裕量： ① 按通带： $10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]=\delta_1$ ➡ $\Omega_c=0.3847$

② 按止带： $10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]=\delta_2$ ➡ $\Omega_c=0.3871$

➡ $\Omega_c=0.385$

（5）设计模拟滤波器 :(以Butterworth为例)

Butterworth模型:($H_a(s)H_a(-s)$ 极点分布在s平面半径为 Ω_c 的圆（巴特沃斯圆）上，

共 $2N$ 个角度间隔是 π / N 弧度的极点，关于实轴对称)

为保证系统因果稳定，取前N个极点构成 $H_a(s)$

$$H_a(s) = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{s - s_k} \;,\quad s_k = \Omega_c e^{j(\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{2N})\pi}, k = 1, \cdots\cdots, N$$

低阶情况下可以使用书上的表:(冲激响应不变法不要用表)

阶　次	系　统　函　数　$H_a(s)$
1	$\Omega_c/(s+\Omega_c)$
2	$\Omega_c^2/(s^2+\sqrt{2}\,\Omega_c s+\Omega_c^2)$
3	$\Omega_c^3/(s^3+2\Omega_c s^2+2\Omega_c^2 s+\Omega_c^3)$
4	$\Omega_c^4/(s^4+2.613\Omega_c s^3+3.414\Omega_c^2 s^2+2.613\Omega_c^3 s+\Omega_c^4)$
5	$\Omega_c^5/(s^5+3.236\Omega_c s^4+5.236\Omega_c^2 s^3+5.236\Omega_c^3 s^2+3.236\Omega_c^4 s+\Omega_c^5)$
6	$\Omega_c^6/(s^6+3.863\Omega_c s^5+7.464\Omega_c^2 s^4+9.141\Omega_c^3 s^3+7.464\Omega_c^4 s^2+3.863\Omega_c^5 s+\Omega_c^6)$

➢ 双线性变换法

（5）设计模拟滤波器 ：(以Butterworth为例)

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^4}{s^4+2.6131\Omega_c s^3+3.4142\Omega_c^2 s^2+2.6131\Omega_c^3 s+\Omega^4}$$

$$=\frac{0.3515/16}{s^4+2.012/2s^3+2.024/4s^2+1.1930/8s+0.3515/16}$$

（6）查表进行双线性变换 ：(注意c的取值)

$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{0.0082+0.0328z^{-1}+0.0491z^{-2}+0.0328z^{-3}+0.0082z^{-4}}{1-2.0967z^{-1}+1.9080z^{-2}-0.8192z^{-3}+0.1390z^{-4}}$$

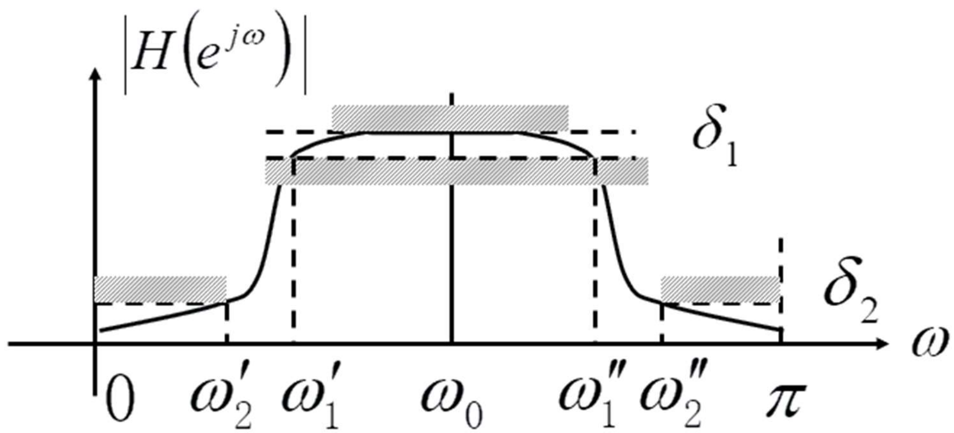
（7）验算

$$w_1=0.2\pi \qquad -20\lg|H(e^{jw_1})|=0.9945\text{dB}<1\text{dB}$$

$$w_2=0.3\pi \qquad -20\lg|H(e^{jw_2})|=10.17499>10\text{dB}$$

一阶 $N=1$	
B_0	$(d_0+d_1C)/A$
B_1	$(d_0-d_1C)/A$
A_1	$(c_0-c_1C)/A$
A	(c_0+c_1C)
二阶 $N=2$	
B_0	$(d_0+d_1C+d_2C^2)/A$
B_1	$(2d_0-2d_2C^2)/A$
B_2	$(d_0-d_1C+d_2C^2)/A$
A_1	$2(c_0-2c_2C^2)/A$
A_2	$(c_0-c_1C+c_2C^2)/A$
A	$(c_0+c_1C+c_2C^2)$
三阶($N=3$)	
B_0	$(d_0+d_1C+d_2C^2+d_3C^3)/A$
B_1	$(3d_0+d_1C-d_2C^2-3d_3C^3)/A$
B_2	$(3d_0-d_1C-d_2C^2+3d_3C^3)/A$
B_3	$(d_0-d_1C+d_2C^2-d_3C^3)/A$
A_1	$(3c_0+c_1C-c_2C^2-3c_3C^3)/A$
A_2	$(3c_0-c_1C-c_2C^2+3c_3C^3)/A$
A_3	$(c_0-c_1C+c_2C^2-c_3C^3)/A$
A	$(c_0+c_1C+c_2C^2+c_3C^3)$

5.4 设计一Butterworth带通滤波器，其 3 dB边界频率分别为 $f_1 = 90kHz$, $f_2 = 110kHz$,在阻带 $f_3 = 80kHz$, $f_4 = 120kHz$,处的最小频率衰减大于10 dB，采样频率$f_s = 400kHz$ 。



解：（1）由模拟指标求数字指标：

$$w_2' = 2\pi\frac{f_3}{f_s} = 0.4\pi \quad w_1' = 2\pi\frac{f_1}{f_s} = 0.45\pi \quad w_1'' = 2\pi\frac{f_2}{f_s} = 0.55\pi \quad w_2'' = 2\pi\frac{f_4}{f_s} = 0.6\pi$$

（2）由数字指标求模拟滤波器指标：（双线性变换要反畸变）

$$\alpha = \frac{\sin\omega_1' + \sin\omega_1''}{\cos\omega_1' - \cos\omega_1''} = 6.3138, \quad \beta = \frac{\sin(\omega_1' + \omega_1'')}{\sin\omega_1' + \sin\omega_1''} = 0$$

$$\Omega_2 = \min\left\{-\frac{\alpha(\beta - \cos\omega_2')}{\sin\omega_2'}, \frac{\alpha(\beta - \cos\omega_2'')}{\sin\omega_2''}\right\} = 2.0515, \quad \Omega_1 = 1 \qquad \delta_1 = 3dB \qquad \delta_2 = 10dB$$

➢ 频域变换法

$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\alpha\cdot\frac{z^2-2\beta z+1}{z^2-1}}$$

$$=\frac{(z^2-1)^2}{49.7818z^4+77.7080z^2+31.9262}$$

（注：由于Butterworth Ω_c取值不同、四舍五入等影响，结果可以有细微不同）

5.5 试用冲激响应不变法设计一个Chebyshev I型低通滤波器，设计指标为：通带截止频率为1.5kHz，通带幅度波动小于1dB，阻带起始频率为2.5kHz，阻带衰减大于8dB，并给出所得到的数字滤波器的系统函数。（设取样频率f_s = 10kHz）

解：（1）确定模拟滤波器指标：

$$\Omega_1 = 2\pi f_1 = 3000\pi, \delta_1 = 1$$
$$\Omega_2 = 2\pi f_2 = 5000\pi, \delta_2 = 8$$

确定模型参数：

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{\delta_1}{10}} - 1} = 0.5088$$
$$\Omega_c = \Omega_1 = 3000\pi$$

（2）试算法确定滤波器阶数N:

$$10\lg\left[1+\varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_c}\right)\right] \geq \delta_2$$

当取$N=1$时:

$$10\lg\left[1+\varepsilon^2 C_1^2\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_c}\right)\right] = 2.353\text{dB} < 8\text{dB}$$

当取$N=2$时:

$$10\lg\left[1+\varepsilon^2 C_2^2\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_c}\right)\right] = 8.0431\text{dB} > 8\text{dB}$$

满足设计要求

(3) 设计模拟滤波器：

确定极点:

$$\alpha=\frac{1}{\varepsilon}+\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+1}=4.1702$$

$$a=1/2(\alpha^{0.5}-\alpha^{-0.5})=0.7762$$

$$b=1/2(\alpha^{0.5}+\alpha^{0.5})=1.2659$$

$$\theta_1=\frac{1}{4}\pi,\theta_2=\frac{3}{4}\pi$$

$$s_k=(-a\sin\theta_k+jb\cos\theta_k)\ \Omega_c$$

$$\Rightarrow$$

$$s_{1,2}=(-a\sin\theta_1\pm jb\cos\theta_1)\ \Omega_c$$

$$=(-5.17158\pm j8.44032)\times10^3$$

确定归一化常数K:

$$K=\frac{(\alpha+\alpha^{-1})\Omega_c^2}{4\sqrt{1+\varepsilon^2}}=87.2279\times10^6$$

➢ 冲激响应不变法

确定模拟滤波器的系统函数$H_a(s)$

$$H_a(s)=\frac{K}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

将$H_a(s)$作部分分式展开：

$$H_a(s)=\frac{K}{s_1-s_2}\left(\frac{1}{s-s_1}-\frac{1}{s-s_2}\right)$$

（4）进行脉冲响应不变的变换：

$$H(z)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{1-e^{s_iT}z^{-1}}=\frac{K}{s_1-s_2}\left(\frac{1}{1-e^{s_1T}z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{s_2T}z^{-1}}\right)$$

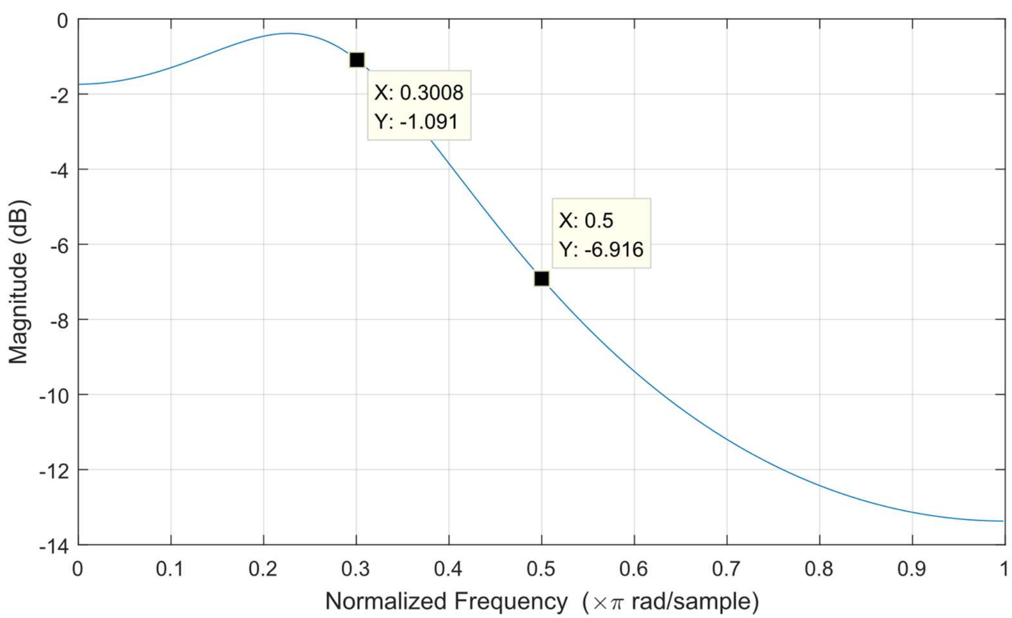
将$T=1/f_s, K, s_1, s_2$代入，经过整理，得

$$H(z)=\frac{4606.21z^{-1}}{1-0.79193z^{-1}+0.35544z^{-2}}$$

（5）验算：

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{4606.21e^{-j\omega}}{1-0.79193e^{-j\omega}+0.35544e^{-2j\omega}}$$

通带$\omega_1=\frac{1.5}{10}\times 2\pi=0.3\pi$　　　止带$\omega_2=\frac{2.5}{10}\times 2\pi=0.5\pi$

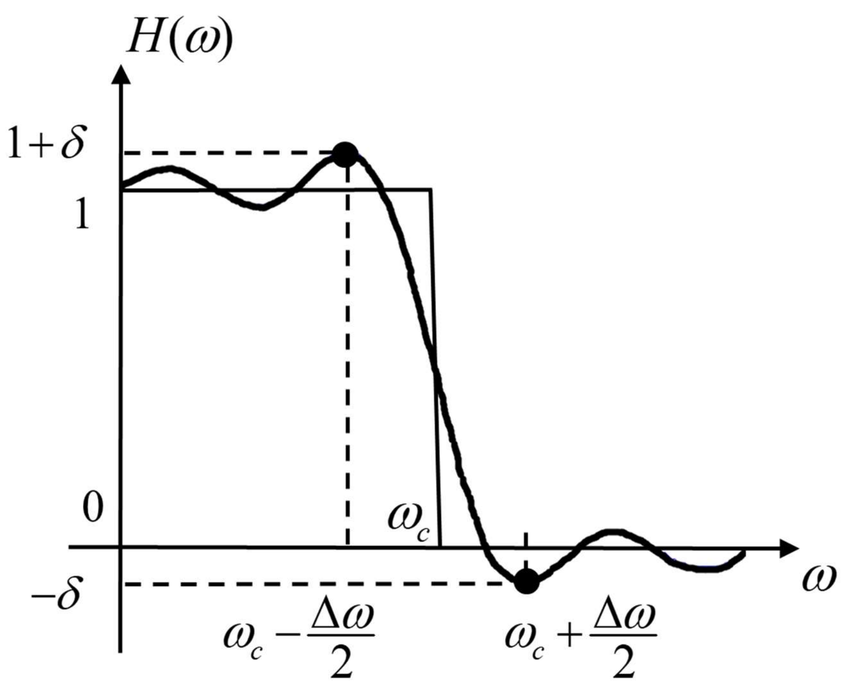


原因：可能是因为冲激响应不变法产生频谱混叠

Chapter 6

FIR数字滤波器设计

6.1 设计一个线性相位高通滤波器$h(n)$，满足止带边界频率$f_1 = 10\text{kHz}$，通带边界频率$f_2 = 12\text{kHz}$，止带衰减大于50dB，采样频率$f_s = 40\text{kHz}$，试选择合适的窗函数，且使滤波器阶数最小，求出该滤波器的单位响应$h(n)$的解析式。（关于频点和幅度参数的定义，按照课件29页约定）



本课程简化约定：
- 通带截止频率ω_1为肩峰频点
- 止带起始频率ω_2为过冲频点

则，过渡带宽为窗函数主瓣宽度$\triangle\omega$

常用窗函数

窗函数	主瓣宽度	旁瓣电平 (dB)	阻带衰减 (dB)	通带起伏 (dB)
矩形	$4\pi/N$	-13	-21	0.7
三角	$8\pi/N$	-25	-25	0.5
Hanning	$8\pi/N$	-32	-44	0.05
Hamming	$8\pi/N$	-42	-53	0.02
Blackman	$12\pi/N$	-57	-74	0.002

根据止带衰减大于50dB，查表得满足设计指标的最小阶数窗函数为Hamming窗：

$$w(n) = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$

窗函数法

过渡带宽即主瓣宽度的数字域频率为： $\Delta\omega = 2\pi \frac{(f_2 - f_1)}{f_s} = 0.1\pi$

通带截止频率的数字域频率为： $\omega_1 = 2\pi \frac{f_1}{f_s} = 0.5\pi$

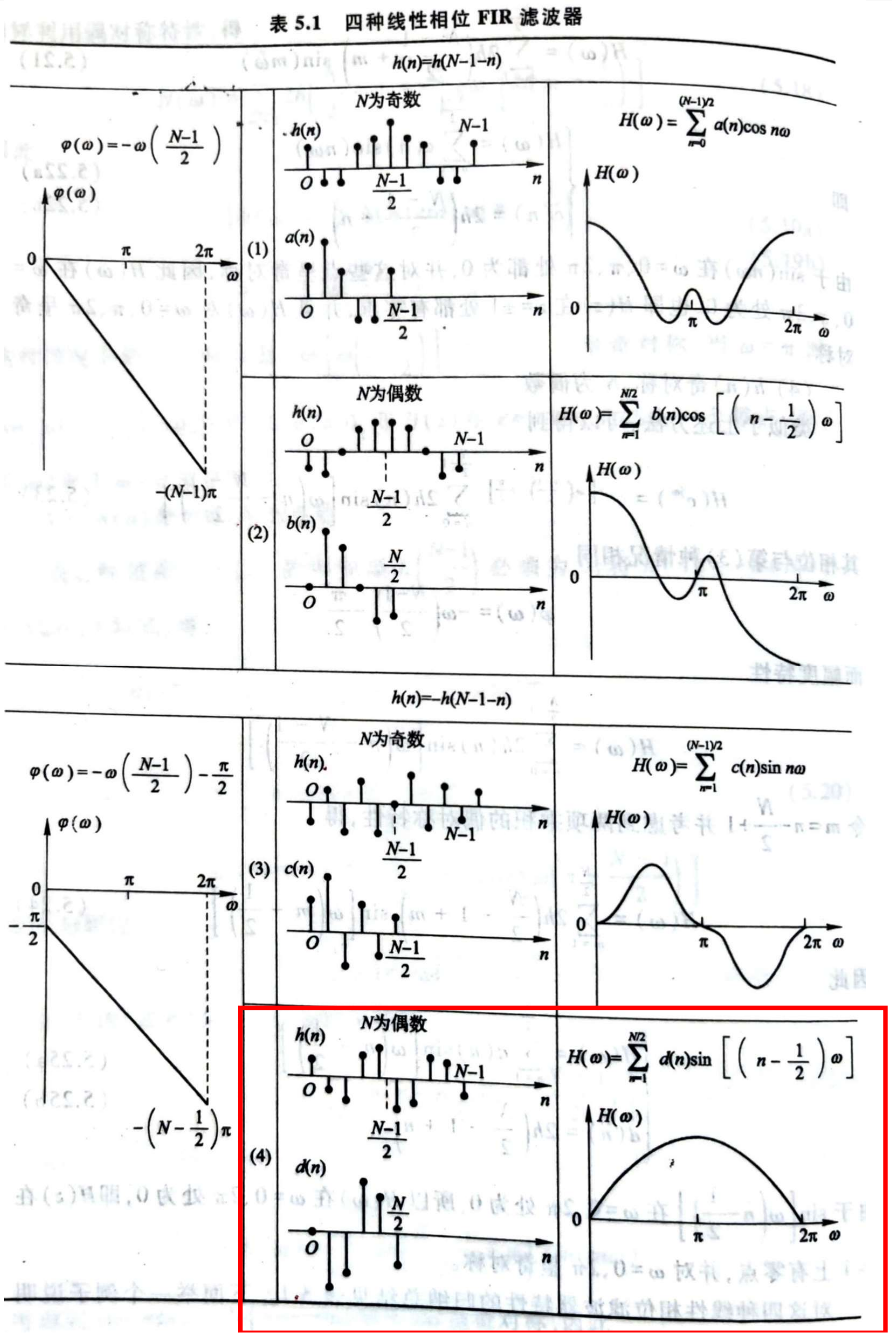
截止频率为： $\omega_c = \omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2} = 0.55\pi$

Hamming窗的主瓣宽度为$8\pi/N$，由此可确定滤波器阶数

$$\frac{8\pi}{N} = \Delta\omega \Rightarrow N = \frac{8\pi}{\Delta\omega} = 80$$

由于设计的滤波器为高通滤波器，因此N为偶数，$h(n)$奇对称即可以满足设计要求（第四类线性相位滤波器）。

➢ 窗函数法



$H(\omega)$关于$2k\pi$奇对称，关于$(2k+1)\pi$偶对称

构造理想的高通滤波器:

$$H_d\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases} e^{-j\left(\omega\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}, \omega_c \le \omega \le 2\pi-\omega_c \\ 0, \text{otherwise} \end{cases}$$

或者

$$H_d\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases} e^{-j\left(\omega\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}, \omega_c \le \omega \le \pi \\ -e^{-j\left(\omega\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}, -\pi \le \omega \le -\omega_c \\ 0, \text{otherwise} \end{cases}$$

其中，线性相位延迟常数$\alpha=\dfrac{N-1}{2}=39.5$

求$h_d(n)$：

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\omega_c}-e^{-j(\omega\alpha+\frac{\pi}{2})}e^{j\omega n}d\omega+\int_{\omega_c}^{\pi}e^{-j(\omega\alpha+\frac{\pi}{2})}e^{j\omega n}d\omega\right]$$

$$=\frac{\cos\left(\left[(n-\alpha)\pi\right]\right)-\cos\left(\left[(n-\alpha)\omega_c\right]\right)}{\pi(n-\alpha)}$$

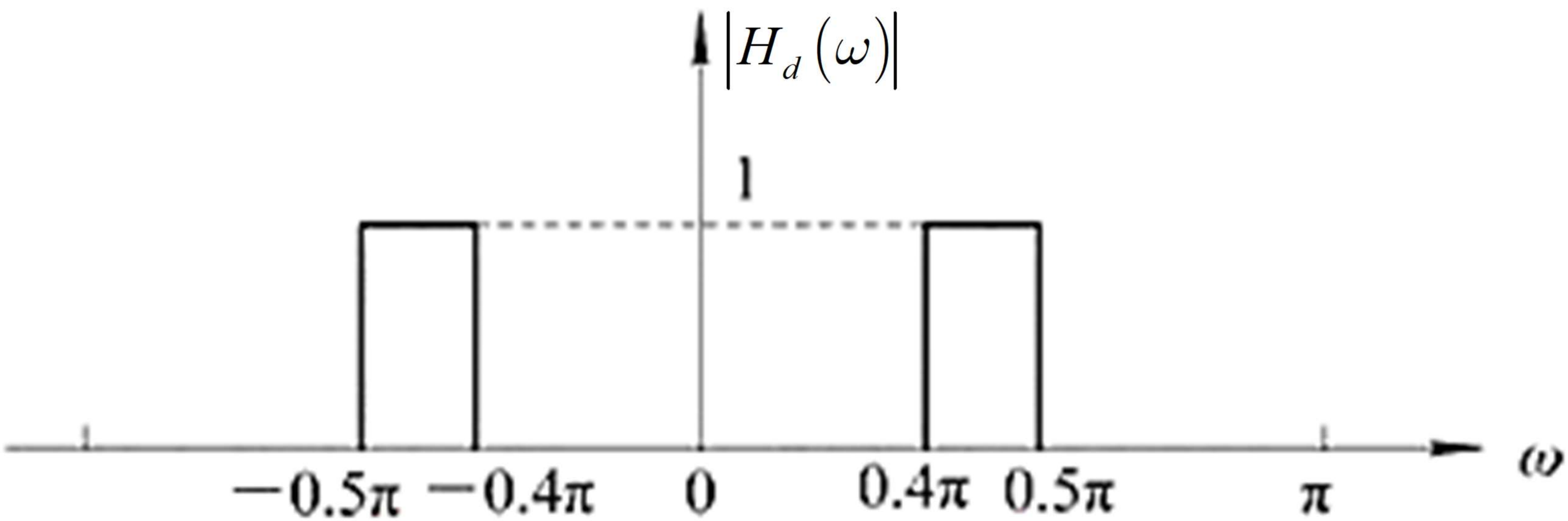
采用80阶Hamming窗设计，因此有：

$$w(n)=0.54-0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$

$$h(n)=h_d(n)w(n)$$

$$=\left[0.54-0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{79}\right)\right]\frac{\cos\left(\left[(n-39.5)\pi\right]\right)-\cos\left(\left[(n-39.5)0.55\pi\right]\right)}{\pi(n-39.5)}\bullet R_{80}(n)$$

6.4 试用频率取样法设计线性相位FIR带通数字滤波器，设$N = 33$，理想幅度特性$|H_d(\omega)|$如下图所示：



频率抽样设计法

线性相位FIR	N是奇数	N是偶数
$h(n) = h(N-1-n)$	第一类	第二类
$h(n) = -h(N-1-n)$	第三类	第四类

★第一类：四种滤波器都可设计

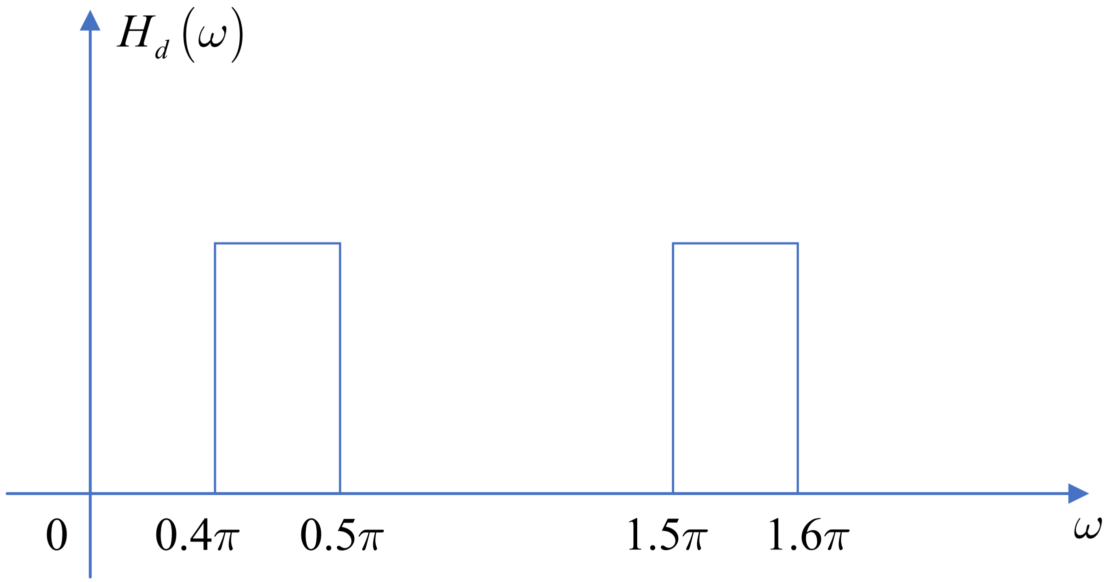
第二类：可设计低、带通滤波器，不能设计高通和带阻

★第三类：只能设计带通滤波器，其它滤波器都不能设计

第四类：可设计高通、带通滤波器，不能设计低通和带阻滤波器

方法1：设计第一类线性相位FIR滤波器

$H(\omega)$关于$k\pi$偶对称



$$H_k = H_d(\omega)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = \begin{cases} 1, k = 7,8,25,26 \\ 0, k = 0 \sim 6, 9 \sim 24, 27 \sim 32 \end{cases}$$

$$\theta(k) = \theta(\omega)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = -\frac{N-1}{2}\cdot\frac{2\pi}{N}k$$

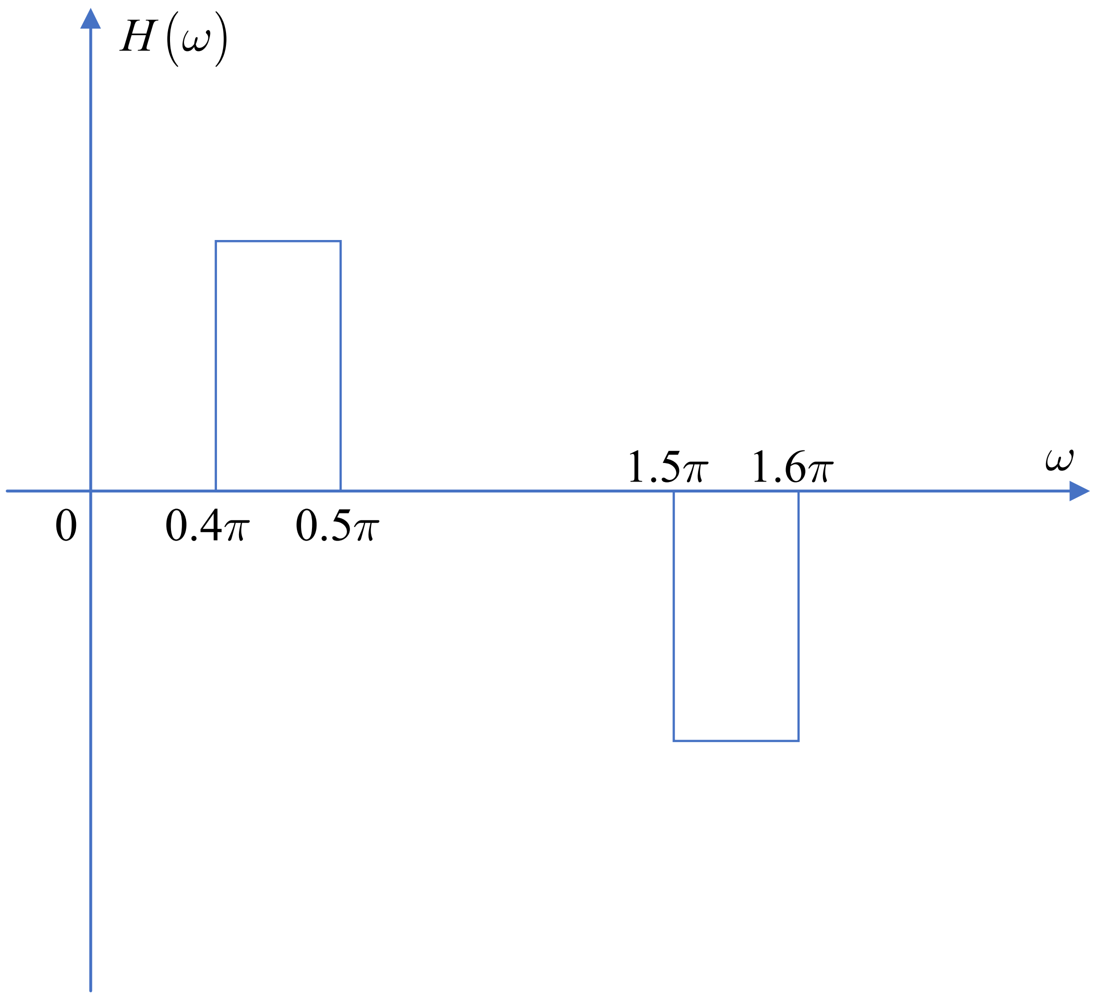
$$H(k) = H_k e^{j\theta(k)} = \begin{cases} e^{-j\frac{32}{33}\pi k}, k = 7,8,25,26 \\ 0, k = 0 \sim 6, 9 \sim 24, 27 \sim 32 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h(n) &= \mathrm{IDFT}\left[H(k)\right] \\ &= \frac{1}{33}\left\{\cos\left[\frac{14\pi}{33}(n-16)\right] + \cos\left[\frac{16\pi}{33}(n-16)\right]\right\} \cdot R_{33}(n) \end{aligned}$$

$$n = 0,1,\ldots,32$$

方法2：设计第三类线性相位FIR滤波器

$H(\omega)$关于$k\pi$奇对称，必有$H(k\pi) = 0$



$$H_k = H_d(\omega)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = \begin{cases} 1, k = 7,8 \\ -1, k = 25,26 \\ 0, k = 0 \sim 6, 9 \sim 24, 27 \sim 32 \end{cases}$$

$$\theta(k) = \theta(\omega)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = -\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2} \cdot \frac{2\pi}{N} k$$

$$H(k) = H_k e^{j\theta(k)} = \begin{cases} e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{32}{33}\pi k\right)}, k = 7,8 \\ -e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{32}{33}\pi k\right)}, k = 25,26 \\ 0, k = 0 \sim 6, 9 \sim 24, 27 \sim 32 \end{cases}$$

$$h(n) = \mathrm{IDFT}\left[H(k)\right], n = 0,1,\ldots,32$$