中 国 科 学 技 术 大 学
2016 - 2017学年第二学期期终考试试卷(A)

装订线　答题时不要超过此线

考试科目：________线性代数(B)________　得分：____________

所在院、系：____________　姓名：__________　学号：____________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
复查							

一、【共25分】填空题:

1. 向量组$\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}$是线性空间$V$的一组基，线性变换$\boldsymbol{\mathcal{A}}$在此基下的矩阵是$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

则$\boldsymbol{\mathcal{A}}$在基$(\boldsymbol{\alpha_1},\ \boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\alpha_2},\ \boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\alpha_3})$下的矩阵为______________.

2. 设$\boldsymbol{\mathcal{A}}$是3维复线性空间V上的线性变换，$\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}$是$V$中3个线性无关的向量，且

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\alpha_1} = \boldsymbol{\alpha_1},\ \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\alpha_2} = -\boldsymbol{\alpha_3},\ \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\alpha_3} = \boldsymbol{\alpha_2} + 2\boldsymbol{\alpha_3},$$

那么$\boldsymbol{\mathcal{A}}$的三个特征值为______________.

3. 在n维欧氏空间V中，向量$\boldsymbol{x}$在标准正交基$\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_n}$下的坐标是$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha_i}) =$ ________，$|\boldsymbol{x}| =$ ________.

4. 对称阵$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的正、负惯性指数分别为 $r =$ ____，$s =$ ____.

5. 已知二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + ax_3^2 + 4x_1x_3 + 2tx_2x_3$经正交变换$x = Py$可化为标准型$y_1^2 + 2y_2^2 + 7y_3^2$，则$t =$ ________.

二、【共20分】判断题：判断下列命题是否正确，并简要说明理由或举出反例.

1. 有限维实线性空间V上总可以定义适当的内积，使之成为欧氏空间.

2. n维欧氏空间上的任意n个非零向量，都可经Schmidt正交化方法得到一组标准正交基.

3. n阶方阵A, B有相同的特征值、迹、秩、行列式，则A, B相似.

4. 若对称阵A正定，则对任意正整数 k 有A^k正定.

三、【20分】设 $V=\left\{c_1e^x+c_2x+c_3:\ c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}\right\}$，按照函数的加法与数乘构成$\mathbb{R}$上的线性空间. $\mathcal{D}=\frac{d}{dx}$为求导运算.

(1) 证明：$\mathcal{D}$为V上的线性变换；

(2) 求$\mathcal{D}$在基$(1,x,e^x)$下的矩阵；

(3) 求$\mathcal{D}$的特征值与特征向量；

(4) 是否存在V的一组基，使得$\mathcal{D}$在该基下的矩阵为对角阵？若存在，则给出这样的一组基；反之，证明不存在.

四、【15分】已知二次型$Q(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+8x_2^2-x_3^2-12x_2x_3$.

(1). 写出二次型$Q(x_1,x_2,x_3)$的矩阵A.

(2). 求正交变换$y=Px$，将二次型$Q(x_1,x_2,x_3)$化为标准型，并指出矩阵A是否正定.

五、【10分】设有分块对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & A_s \end{pmatrix},$$

其中$A_i\,(i=1,2,\cdots,s)$为方阵，证明：A可对角化的充分必要条件是每个A_i皆可对角化.

六、【10分】A为n阶可逆实方阵，证明：

(1) A可以分解为$A = QR$，其中Q为正交阵，$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & r_{33} & \cdots & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$为实上三角阵且$r_{ii} > 0$.

(2) 满足(1)中条件的分解是唯一的.