复习课

- 质点动力学与非惯性参考系
- 动量定理、动能定理、角动量定理

质点运动学

运动在几种坐标系下的描述

直角坐标系

自然坐标系

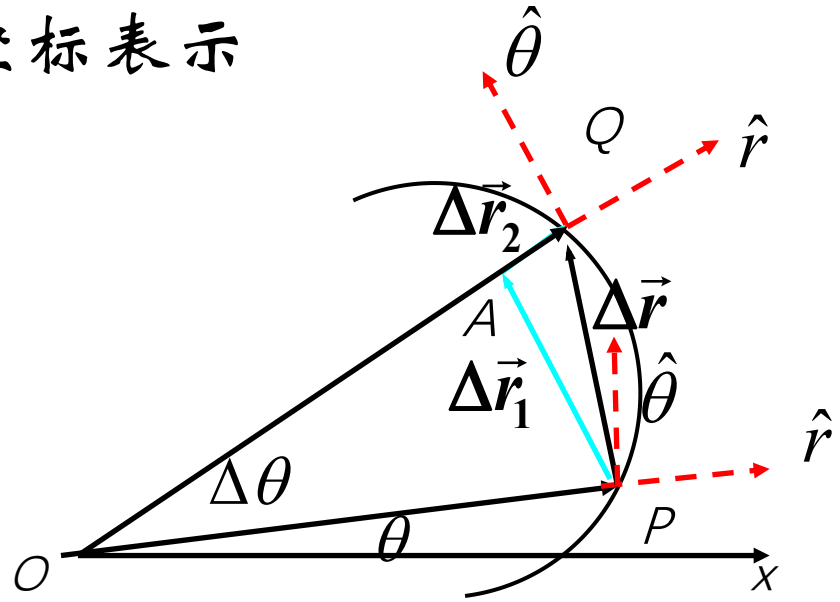
极坐标系

1.5 平面极坐标系中运动的描述

二、位矢、速度、加速度的极坐标表示

位矢： $\vec{r} = r\hat{r}$

速度：如图，在Δt时间间隔内质点的位移可表示为



$$OA = \left|\overrightarrow{OP}\right| = \left|\vec{r}(t)\right|$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t}$$

当 $\Delta t \to 0$ 时 $\Delta\vec{r}_2 \to dr\hat{r}$ $\Delta\vec{r}_1 \to rd\theta\hat{\theta}$

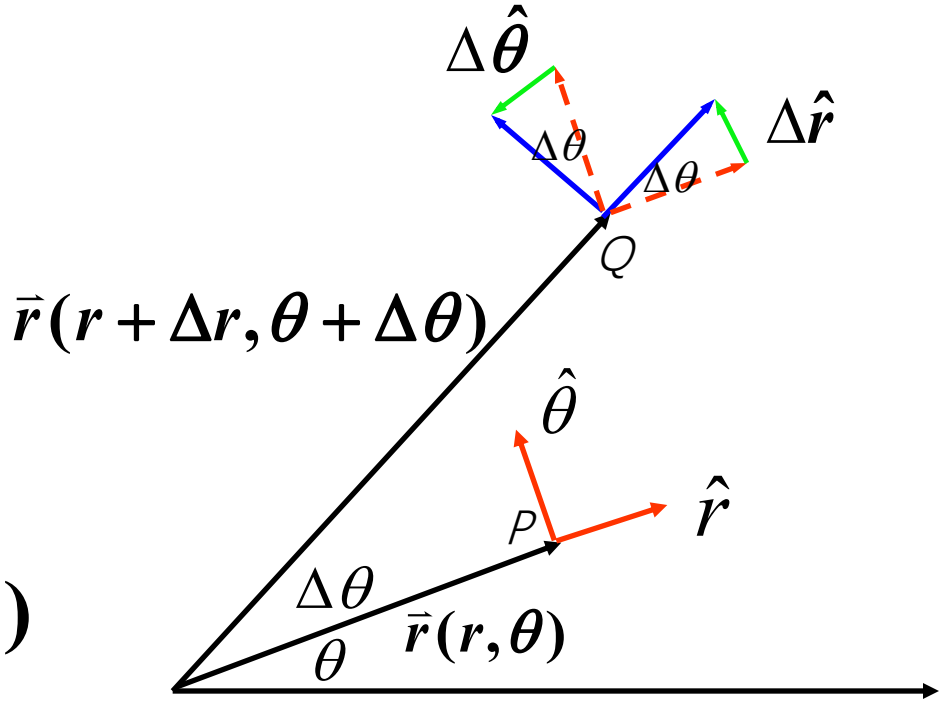
$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} = \mathrm{v}_r\hat{r} + \mathrm{v}_\theta\hat{\theta}$$

径向速度　横向速度

1.5 平面极坐标系中运动的描述

利用矢量图可得

$$\frac{d\hat{r}}{dt}=\dot{\theta}\hat{\theta} \qquad \frac{d\hat{\theta}}{dt}=-\dot{\theta}\hat{r}$$



$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta})$$

$$=\ddot{r}\hat{r}+\dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt}+\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta}+r\ddot{\theta}\hat{\theta}+r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt}$$

$$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}=a_r\hat{r}+a_\theta\hat{\theta}$$

径向加速度　横向加速度

1.33 杆以匀角速 $\boldsymbol{\omega}_0$ 绕过其固定端 O 且垂直于杆的轴转动. 在 $t=0$ 时，位于 O 点的小珠从相对于杆静止开始沿杆做加速度为 $\boldsymbol{a}_0$ 的匀加速运动. 求小珠在时刻 t 的速度和加速度.

解 由于小珠是在水平面上运动，取极坐标得

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}_f=a_0t\hat{\boldsymbol{r}}+\frac{1}{2}a_0\omega_0t^2\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

利用 $\dfrac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}=\hat{\boldsymbol{\theta}}\omega_0$， $\dfrac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\mathrm{d}t}=-\hat{\boldsymbol{r}}\omega_0$，对上式微商得

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=a_0\hat{\boldsymbol{r}}+a_0t\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}a_0\omega_0 2t\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{1}{2}a_0\omega_0t^2\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\mathrm{d}t}=\left(a_0-\frac{1}{2}a_0\omega_0^2t^2\right)\hat{\boldsymbol{r}}+2a_0\omega_0t\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

非惯性参考系， 科氏加速度

推导方法

书P54-P56

课件第三章，3.2

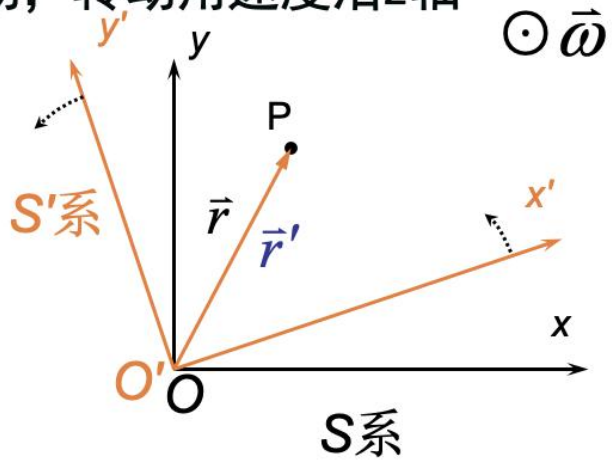
3.2 转动参考系

转动参考系S′ S′系相对S系匀速转动，转动角速度沿z轴

$\odot\vec{\omega}$

$$\vec{r}=\vec{r}'+0$$

$$\boxed{\dot{\vec{i}}'=\vec{\omega}\times\vec{i}' \qquad \dot{\vec{j}}'=\vec{\omega}\times\vec{j}'}$$



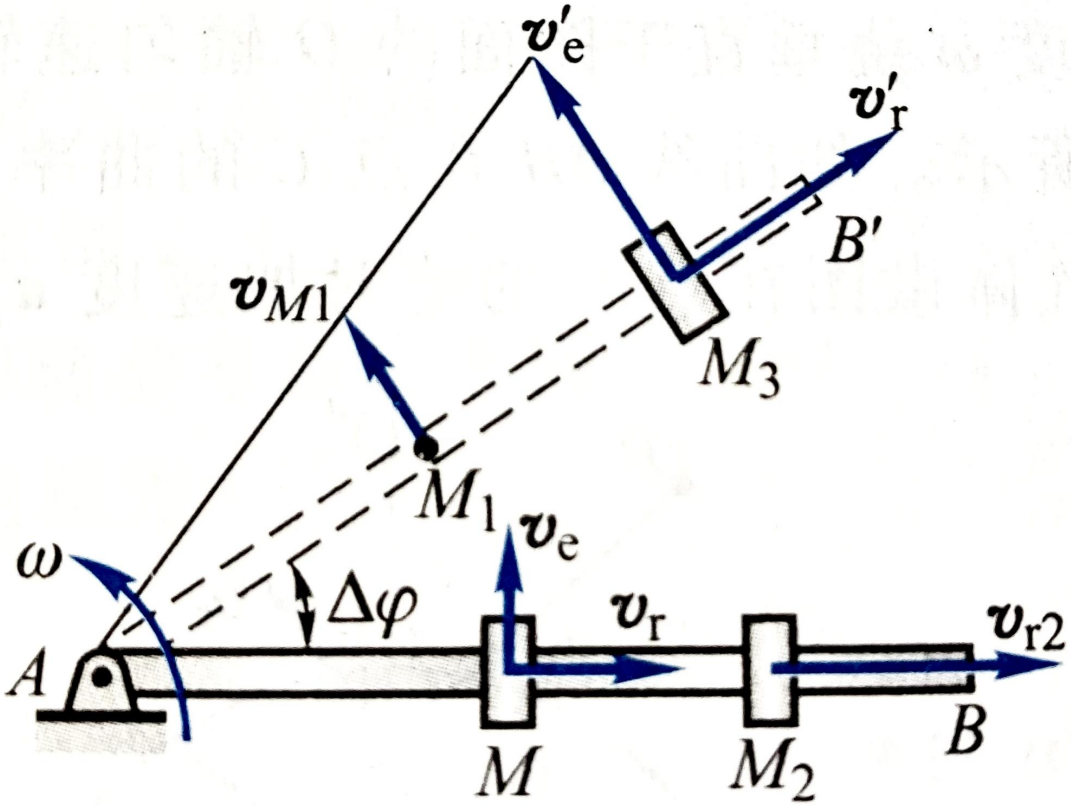
$$\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\dot{\vec{r}}'=\frac{d(x'\vec{i}')}{dt}+\frac{d(y'\vec{j}')}{dt}=(\dot{x}'\vec{i}'+x'\dot{\vec{i}}')+(\dot{y}'\vec{j}'+y'\dot{\vec{j}}')$$

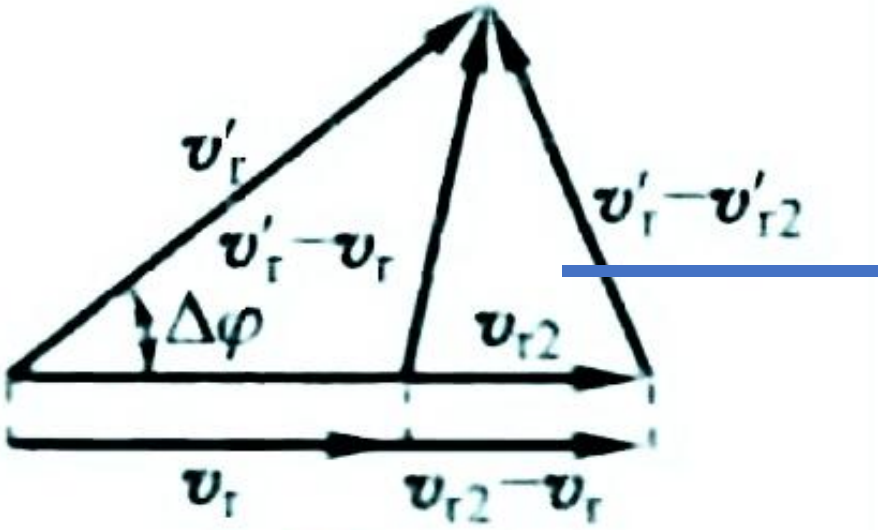
$$=(\dot{x}'\vec{i}'+\dot{y}'\vec{j}')+(x'\dot{\vec{i}}'+y'\dot{\vec{j}}')=\vec{v}'+(x'\vec{\omega}\times\vec{i}'+y'\vec{\omega}\times\vec{j}')$$

$$=\vec{v}'+(\vec{\omega}\times(x'\vec{i}')+\vec{\omega}\times(y'\vec{j}'))=\vec{v}'+\vec{\omega}\times(x'\vec{i}'+y'\vec{j}')$$

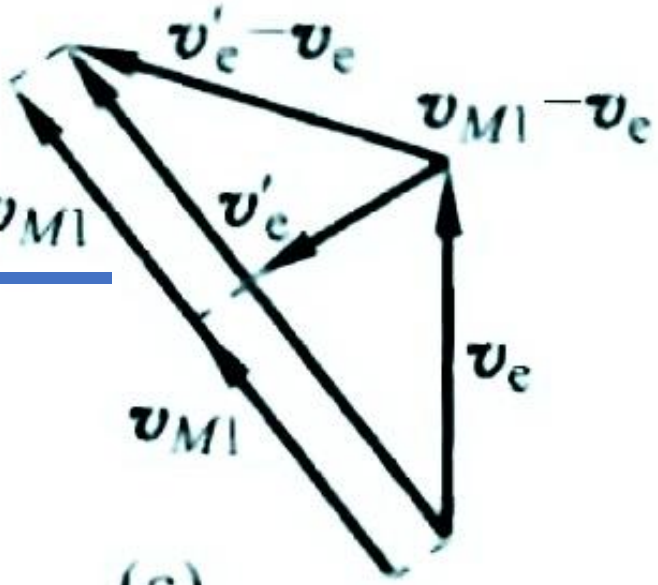
$$=\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r}'$$

关于科氏加速度


v'_e
v'_r
B'
v_{M1}
M_3
M_1
v_e
ω
$\Delta\varphi$
v_r
v_{r2}
A
M
M_2
B


v'_r
$v'_r - v_r$
$v'_r - v'_{r2}$
$\Delta\varphi$
v_{r2}
v_r
$v_{r2} - v_r$

(b)


$v'_e - v_e$
$v_{M1} - v_e$
$v'_e - v_{M1}$
v'_e
v_e
v_{M1}

(c)

非惯性参考系， 参考系的选择

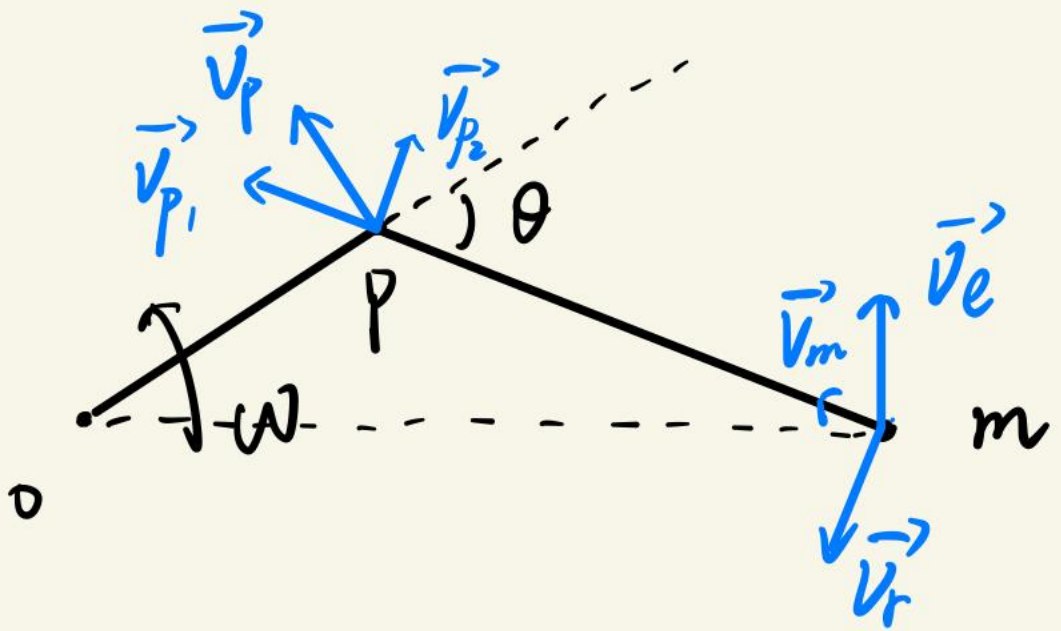
先分析速度，再分析加速度

同一个物体可以在不同的参考系内观察，绝对速度是不变的

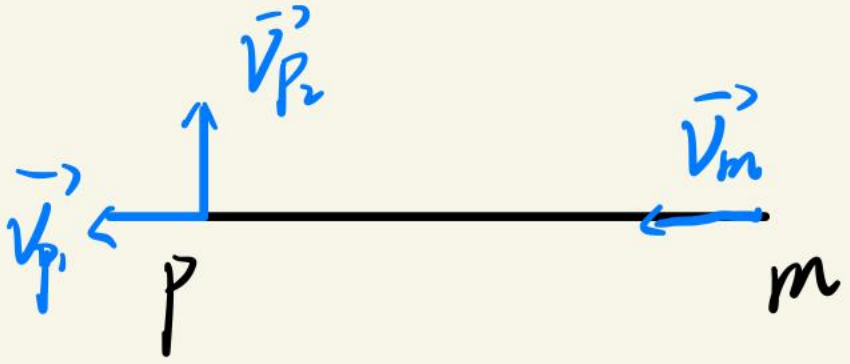
相对速度->科氏加速度

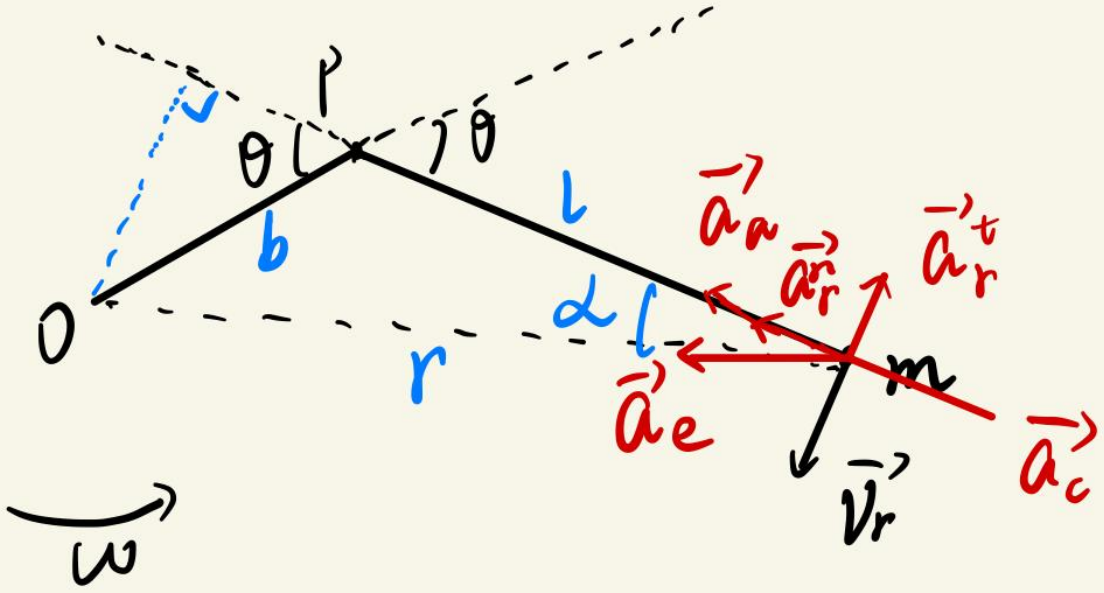
3.13 质量为 m 的小球置于光滑水平台面，用长为 l 的细线系于台面上的 P 点，水平台面绕着过 O 点的铅垂轴以恒定角速度 ω 旋转，P 点与 O 点的距离为 b，试列出小球的运动方程. 设在小球运动过程中，线始终保持拉直状态.

答：$l\ddot{\theta}+b\omega^2\sin\theta=0$，式中 θ 为细线与 P、Q 连线的夹角.



$$|\vec{v}_m| = |\vec{v}_{P_1}|$$





$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

$$= \vec{a}_e + \vec{a}_r^t + \vec{a}_r^n + \vec{a}_c$$

上式沿垂直于Pm方向投影

$$0 = -a_e \sin\alpha + a_r^t$$

$$a_r^t = a_e \sin\alpha = r\omega^2 \sin\alpha$$

$$= r\sin\alpha\,\omega^2 = \boxed{b\sin\theta\,\omega^2 = l\dot{\theta}^2}$$

动量定理

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

注意，这是矢量方程。列式子时要注意。

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

若F=0，则 $\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i =$ 恒矢量

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{P} = \frac{d}{dt}(M\dot{\vec{r}}_c) = M\ddot{\vec{r}}_c$$

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = M\frac{d}{dt}\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} = M\dot{\vec{r}}_c = M\vec{v}_c$$

1. 粘在一起后，质心位置发生变化
2. 系统不受外力。质心运动定理，定轴转动

6.5 在一长度为 a 的棒的两端固定两个质点 A 和 B，形成一个“哑铃”．整个体系的质心在没有引力的空间静止不动．两质点绕其质心以 ω 角速度旋转．在旋转中其中一个质点与一静止的第三个质点 C 相碰，并粘在一起．已知质点 A、B、C 的质量都是 M，棒的质量可略去不计．

（1）确定碰撞前那一瞬间三个质点共同的质心位置以及此时质心的速度；

（2）碰撞前那一瞬间三个质点的体系绕其质心旋转的角动量是多少？碰撞后三质点体系绕其质心旋转的角动量是多少？

（3）碰撞后系统绕质心的角速度是多少？

（4）碰撞前后的动能各是多少？

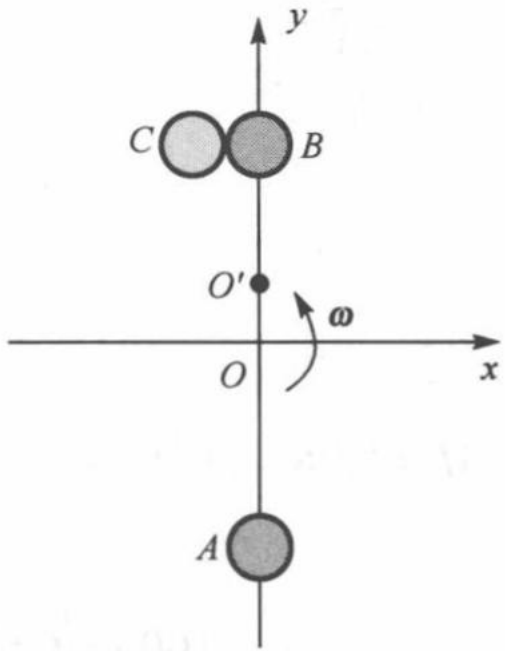


图 6.5a

解 （1）如图 6.5a 取坐标系，取坐标原点 O 为质点 A 和 B 的质心，设刚碰撞时 A 和 B 在 y 轴上，即第三个质点 C 也在 y 轴上．设 O' 点为 A、B、C 体系的质心，于是有

碰撞前 A、B、C 的坐标：$\boldsymbol{r}_A=-\dfrac{a}{2}\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{r}_B=\dfrac{a}{2}\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{r}_C=\dfrac{a}{2}\boldsymbol{j}$

碰撞前 A、B、C 的速度：$\boldsymbol{v}_A=\dfrac{a\omega}{2}\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{v}_B=-\dfrac{a\omega}{2}\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{0}$

动量定理

什么情况下质心位置不变？

质心初速度为0，且体系受力平衡

动量定理

碰撞问题，第五章课件5. 4

5.3 机械能守恒定律

非保守性内力作功之和$W_{内非保}$，外力作功之和$W_{外}$

惯性系中质点系动能定理:

$$W_{内保}+W_{内非保}+W_{外}=\Delta E_k$$

将保守性内力作功之和用它们的势能代替，动能定理可改写为

$$W_{内非保}+W_{外}=\Delta(E_k+E_p)$$

定义质点系动能与内势能之和为质点系机械能

$$E=E_k+E_p$$

5.3 机械能守恒定律

二、机械能守恒定律

动能由各质点速度确定，
势能由系统自身几何位置和形状确定，
速度和几何位形都是运动状态的表征，
因此机械能是由系统运动状态确定的力学量。

保守力作功

动能 ⟷ 势能

非保守力作功

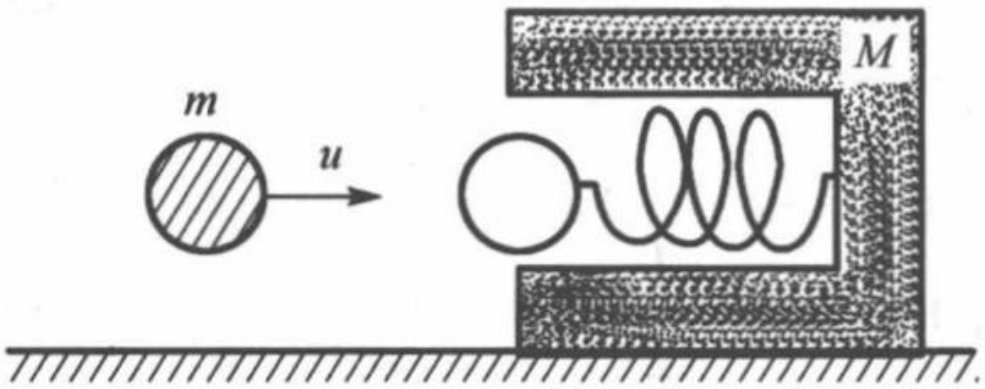
机械能 ⟷ 其它形式的能量

除机械能外，还有许多其它形式的能量

若过程中恒有：$dW_{内非保}=0,\ dW_{外}=0,$ 则 E 为守恒量

5.15 在光滑的水平面上，一质量为 M 的架子内连有一倔强系数为 k 的弹簧，如图所示. 一质量为 m 的小球以 u 的速度射入静止的架子内，并开始压缩弹簧. 设小球与架子内壁间

P88-P89，质心系中的功能原理和机械能守恒定律



“虚拟力”和“真实力”的区别：

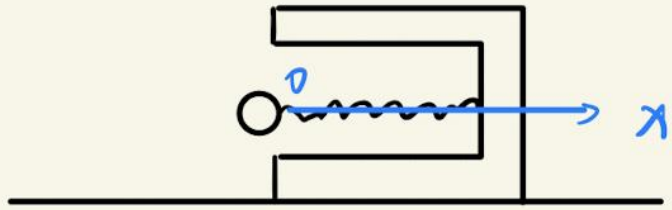
(1) 不能指出施力物体.

(2) 没有反作用力.

(3) 所有质点都受力，其指向一律与“牵连”加速度（坐标系的加速度）$\boldsymbol{a}_0$ 相反，且正比于质量（和重力规则类似）.

(4) 原则上讲，只要选择惯性系，就可以消除惯性力，而真实力一般不能这样来消除.

我们在“虚拟力”和“真实力”上加了引号，是因为这只是牛顿力学的说法，在近代物理中，“虚拟力”和“真实力”的界限已经不那么明显了. 下面我们深入地讨论这个问题.



以架子为参考系. 非惯性系

$$kx = Ma_e, \quad a_e = \frac{kx}{M}$$

⇐ 惯性系的物体受到的牵连加速度

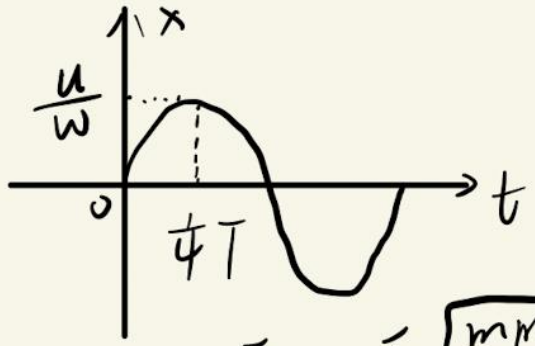
$$\begin{cases} F_1 = -kx \\ F_2 = -\frac{kx}{M}m \end{cases}$$

$$-kx - \frac{m}{M}kx = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = -\underbrace{\boxed{\frac{k(M+m)}{mM}}}_{\Rightarrow \omega^2} x$$

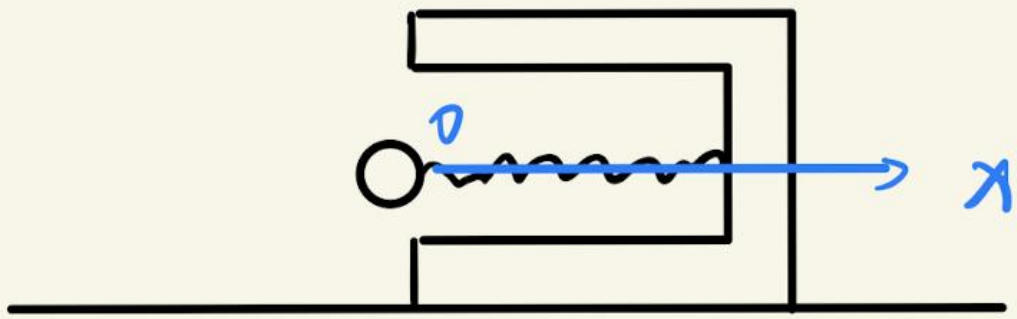
$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = u \end{cases} \Rightarrow x = \frac{u}{\omega}\sin\omega t$$

$$x = \frac{u}{\omega}\sin\omega t$$



$$t_0 = \frac{1}{4}T = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{mM}{k(M+m)}}$$

$$x_{max} = \frac{u}{\omega} = u\sqrt{\frac{mM}{k(M+m)}}$$



架子受力 $F = kx = Ma$，$a = \frac{k}{M}x$

$$\begin{cases} v = \int a\,dt = \int \frac{k}{M}\frac{u}{\omega}\sin\omega t\,dt + C \\ v(t_0) = v_0 = \frac{mu}{m+M} \end{cases}$$

$$mu = (m+M)v_0$$

$$v = -\frac{ku}{M\omega^2}\cos\omega t + \frac{m}{m+M}u$$

$$s = \int_0^{t_0} -\frac{ku}{M\omega^2}\cos\omega t + \frac{m}{m+M}u\,dt = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\frac{mu}{M+m}\sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}$$

质心、角动量、转动惯量

质心、转动惯量的求法

6.3 质心系的角动量定理

二、质心系的角动量守恒

当外力相对质心的总力矩为零时，体系相对质心的角动量为恒量

$$\boxed{\vec{L}' = const}$$

利用质心系的角动量守恒定理，可以清楚地解释运动员的跳水过程。

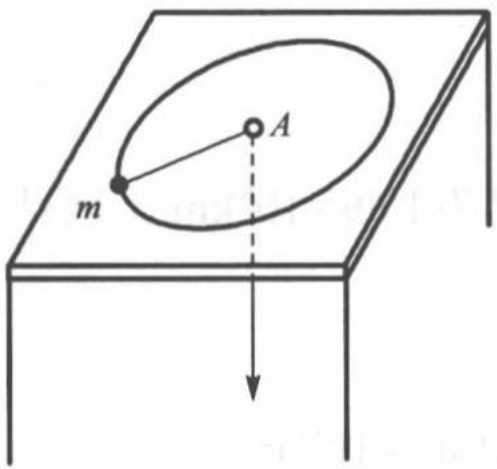
三、体系角动量与质心角动量

在惯性系中，质点系相对于定点的角动量为

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i$$

而 $\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i'$ $\quad \vec{\mathrm{v}}_i = \vec{\mathrm{v}}_c + \vec{\mathrm{v}}_i'$，代入上式得

6.4 绳的一端系一质量为 $m=50\text{g}$ 的物体，绳的另一端穿过一光滑桌面上的小孔 A 用手拉着. 如图所示，物体原以角速度 $\omega_0=3.0\text{rad/s}$ 在桌面上的半径为 $r_0=20\text{cm}$ 的圆周上运动. 现将绳往下拉 10cm，将物体作质点看待，求其角速度的变化和能量的变化. （绳子质量以及物体和绳子与桌面之间的摩擦力均可不计. ）



题 6.4 图

解 易见外力力矩为零，$\boldsymbol{M}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}=0$，知角动量守恒.

原角动量 $J=m\omega r_0^2$，现角动量 $J'=m\omega'\left(\dfrac{r_0}{2}\right)^2$，所以

$$\omega'=4\omega=12\text{rad/s}, \qquad \Delta\omega=\omega'-\omega=9\text{rad/s}$$

原能量 $E=\dfrac{m}{2}\omega^2 r_0^2$，现能量 $E'=\dfrac{m}{2}\omega'^2\left(\dfrac{r_0}{2}\right)^2=2m\omega^2 r_0^2$，所以

$$\Delta E=E'-E=\frac{3}{2}m\omega^2 r_0^2=2.7\times10^{-2}\text{J}$$

即角速度增加了 9rad/s，能量增加了 0.027J.

能量的差别体现在速度上

一些建议

- 熟悉课件、书上相关定理的说明
- 重要的习题再看一遍
- 尽量把方程列出来，把题目的条件逐个转换为方程