正项级数收敛性及其判别法

定理 1 (Cauchy **判别法**) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数.

(i) 如果从某项起有 $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$, 则级数收敛;

(ii) 如果有无穷多个 n, 使 $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, 则级数发散;

(iii) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, 则当 $q < 1$ 时, 则级数收敛, 当 $q > 1$ 时, 级数发散, 当 $q = 1$ 时, 还无法判断级数收敛还是发散.

证明 不妨设对所有的 n 都有 $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$, 也就是有 $a_n \leqslant q^n$. 故由 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 的收敛性及比较判别法, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

如果有无穷多个 n 使 $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, 故 $\{a_n\}$ 不以零为极限, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

对于极限形式, 只要注意到一定存在一个正数 ε, 使得对于充分大的 n, 有 $\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon < 1$ 或者 $\sqrt[n]{a_n} > q - \varepsilon > 1$. 大家可自行完成证明.

例 1 求证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 发散.

证明 因为

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{e}{2} > 1.$$

故由 Cauchy 判别法知该级数发散.

注：Cauchy 判别法的极限形式中，$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ 可以改为较弱的 $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. 即，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geqslant n} \sqrt[k]{a_k}\right) = q.$$

例 2 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性, 其中

$$a_{2n-1} = \frac{1}{2^n},\ a_{2n} = \frac{1}{3^n},\ n = 1, 2, 3, \cdots .$$

解 因为

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a_{2n}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

所以

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

定理 2 (D'Alembert **判别法**) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数.

(i) 如果从某项起有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$, 则级数收敛;

(ii) 如果从某项起有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, 则级数发散;

(iii) 如果前后项之比具有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, 则当 $q < 1$ 时, 级数收敛, 而当 $q > 1$ 时, 级数发散, 当 $q = 1$ 时, 还不能判断.

证明 不妨设对所有的 n 都有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$, 故有

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant q,\ \frac{a_3}{a_2} \leqslant q,\ \cdots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant q,$$

把这些不等式两端相乘, 就得到

$$a_n \leqslant \frac{a_1}{q} q^n.$$

由于$\frac{a_1}{q}$ 是一个常数, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

如果 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, 则 $a_{n+1} \geqslant a_n$, 即 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots$, 此时级数的通项 a_n 不会趋于零, 因此级数发散.

例 3 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ $(x \geqslant 0)$ 的敛散性.

解 因为

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{x}{n}\right)^n}\\ &= \frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{x}{e},\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

故由 D'Alembert 判别法知当 $x > e$ 时级数发散, 而当 $0 \leqslant x < e$ 时级数收敛. 当 $x = e$ 时,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1.$$

由 D'Alembert 判别法知该级数也发散.

注: D'Alembert 判别法的极限形式可以改为, 当 $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 当 $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

定理 3 (Cauchy **积分判别法**) 如果 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有定义的非负且单调减少函数, 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ 同敛散.

证明 由 $f(x)$ 的单调性可知, 当 $k \leqslant x \leqslant k+1$ 时有

$$f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k),$$

于是

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k).$$

将上述不等式对 $k = 1, 2, \cdots, n$ 相加, 就得知, 对任何 $n \in \mathbb{N}$ 有

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leqslant \int_1^{n+1} f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

若 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 则由上式左半可知 $\sum_{k=2}^{n+1} f(k)$ 有界, 因而 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛. 若 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 发散, 则由上式右半可知 $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ 无界, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散. 证毕.

例 4 证明级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\alpha}n}$ 当 $\alpha>1$ 时收敛, 当 $\alpha\leqslant 1$ 时发散.

证明 级数与积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^{\alpha}x}$ 同敛散. 而

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^{\alpha}x}=\begin{cases}\frac{(\ln 2)^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \alpha>1;\\ +\infty, & \alpha\leqslant 1.\end{cases}$$

故原级数当 $\alpha>1$ 时收敛, 而当 $\alpha\leqslant 1$ 时发散.

注意 无论是 Cauchy 判别法, 还是 D'Alembert 判别法, 都是和几何级数进行比较. 我们不能说这两个判别法哪一个更强. 当这两种判别法都失效时, 就需要建立新的判别法.

引理 1 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是两个正数列. 如果当 $n \geqslant n_0$ 时, 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

那么当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

证明 根据条件有

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \cdots \frac{a_{n_0+p}}{a_{n_0+p-1}} \leqslant \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}} \cdot \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}} \cdots \frac{b_{n_0+p}}{b_{n_0+p-1}}.$$

因而

$$\frac{a_{n_0+p}}{a_{n_0}} \leqslant \frac{b_{n_0+p}}{b_{n_0}}.$$

这说明存在常数 $M>0$ 使得当 $n>n_0$ 时, 有

$$a_n \leqslant M b_n.$$

由比较判别法, 即知结论成立.

定理 4 (Raabe **判别法**) 设 $\{a_n\}$ 是正数列.

1° 如果存在 $r > 1$ 和自然数 n_0, 使得当 $n \geqslant n_0$ 时, 有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant r,$$

那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

2° 如果存在自然数 n_0 使得当 $n \geqslant n_0$ 时, 有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1,$$

那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

3° 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \alpha$, 那么当 $\alpha > 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; 当 $\alpha < 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明 1° 取 $\sigma \in (1, r)$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+\frac{1}{n})^\sigma - 1}{\frac{1}{n}} = \sigma < r$, 知, 存在自然数 n_1 使得当 $n \geqslant n_1$ 时, 有

$$n\left((1+\frac{1}{n})^\sigma - 1\right) < r.$$

因此当 $n \geqslant \max(n_0, n_1)$ 时, 有

$$n\left((1+\frac{1}{n})^\sigma - 1\right) < n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right),$$

即

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\frac{1}{(n+1)^\sigma}}{\frac{1}{n^\sigma}}.$$

因为 $\sum\limits_{n\to\infty}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}$ 收敛, 根据引理即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

2° 和 3° 也可容易证明.

问题 定理中 $\alpha = 1$ 时, 结论如何?

例 5 设 α, β, γ 都是正数. 称

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} x^n$$

为超几何级数.

因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)} x = x,$$

所以, 由 D'Alembert 判别法知该级数当 $x < 1$ 时收敛, 当 $x > 1$ 时发散.

当 $x = 1$ 时,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1+\gamma-\alpha-\beta)+(\gamma-\alpha\beta)n}{(\alpha+n)(\beta+n)} = 1+\gamma-\alpha-\beta.$$

故, 对于 $x = 1$, 根据 Raabe 判别法, 该级数当 $\gamma > \alpha+\beta$ 时收敛, 当 $\gamma < \alpha+\beta$ 时发散.

还有比 Raabe 判别法更精细的判别法, 如 Gauss 判别法等等. 但是并不存在一种判别法能够判别一切正项级数是否收敛. 事实上, 对于给定的一个收敛的正项级数, 总可以构造一个收敛的更慢的正项级数.

定义 1 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个收敛的正项级数. 如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 比 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛的快, 或称 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 比 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的慢.

习题 设 $\{a_n\}$ 是正数列, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 记 $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$. 则对于 $0 < p < 1$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n^p}$ 收敛, 而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n^p} < \frac{1}{1-p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)^{1-p}.$$