10.1.4 有界集上的积分

设 $f(x,y)$ 是定义在有界集 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的函数. 按下面的方式将它延拓到 $\mathbb{R}^2$ 的函数: 令

$$f_D(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D; \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

定义 1 设 $f(x,y)$ 是定义在有界集 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的函数. I 是一个二维区间, 且 $D \subset I$. 若 $f_D(x,y)$ 在 I 上可积, 则称 f 在 D 上可积. 积分值就是 $f_D(x,y)$ 在 I 上的积分值, 记为

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \quad \text{或} \quad \int_D f d\sigma.$$

显然, 由于 $f_D(x,y)$ 在 D 外的值为零, 这个积分的定义与区间 I 的选取无关. 而且当 f 在 D 上可积时, 则 f 在从 D 去掉一个零面积集的集合上还是可积的, 且积分不变.

定理 1 设 D 是有界集. 如果 f 在 D 上可积, 那么 f 在 D 上有界.

根据 Lebesgue 定理, 有界集 D 上的有界函数 f 可积的充分必要条件是 f_D 的间断点全体是一个零测集. 下面是一个充分条件.

定理 2 设 $f(x,y)$ 是有界集 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的有界函数. 如果 ∂D 以及 f 在 D 上的间断点全体都是零测集, 那么 f 在 D 上可积.

定理 3 设 D 是有界集. 若 f 和 g 都在 D 上可积, c_1, c_2 是常数, 则 $c_1 f + c_2 g$ 也在 D 上可积, 且

$$\int_D (c_1 f + c_2 g) d\sigma = c_1 \int_D f d\sigma + c_2 \int_D g d\sigma.$$

定理 4 设 D 是有界集. 若 f 和 g 都在 D 上可积, 则 fg 也在 D 上可积.

定理 5 设 D 是有界集, f 和 g 都在 D 上可积.

(1) 若 $f \geqslant 0$, 则 $\int_D f d\sigma \geqslant 0$;

(2) 若 $f \geqslant g$, 则 $\int_D f d\sigma \geqslant \int_D g d\sigma$.

定理 6 设 D 是有界集. 如果 f 在 D 上可积, 那么 $|f|$ 也在 D 上可积, 且有

$$\left|\int_D f d\sigma\right| \leqslant \int_D |f| d\sigma.$$

定理 7 (积分的集合可加性) 设 D_1 和 D_2 是有界集, 并且 $D_1 \cap D_2$ 是零面积集. 如果 f 在 D_1 和 D_2 上都可积, 那么 f 也在 $D_1 \cup D_2$ 上可积, 并且

$$\int_{D_1 \cup D_2} f d\sigma = \int_{D_1} f d\sigma + \int_{D_2} f d\sigma.$$

证明　这时除去一个零面积集 $D_1 \cap D_2$ 之外, 等式

$$f_{D_1 \cup D_2} = f_{D_1} + f_{D_2}$$

成立. 设矩形 $I \supset D_1 \cup D_2$, 则有

$$\begin{aligned}
\int_{D_1} f\,d\sigma + \int_{D_2} f\,d\sigma &= \int_I f_{D_1} d\sigma + \int_I f_{D_2} d\sigma \\
&= \int_I \left(f_{D_1} + f_{D_2}\right) d\sigma \\
&= \int_I f_{D_1 \cup D_2} d\sigma \\
&= \int_{D_1 \cup D_2} f\,d\sigma.
\end{aligned}$$

定义 2 (**有界集的面积**) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是有界集. 若取值为 1 的常值函数在 D 上可积, 则称 D 是一个有面积的集, 其面积定义为 $\sigma(D) = \int_D 1\, d\sigma$.

定理 8 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是有界集. 则 D 是零面积集当且仅当 D 有面积且面积为零, 即 $\sigma(D) = \displaystyle\int_D 1\, d\sigma = 0$.

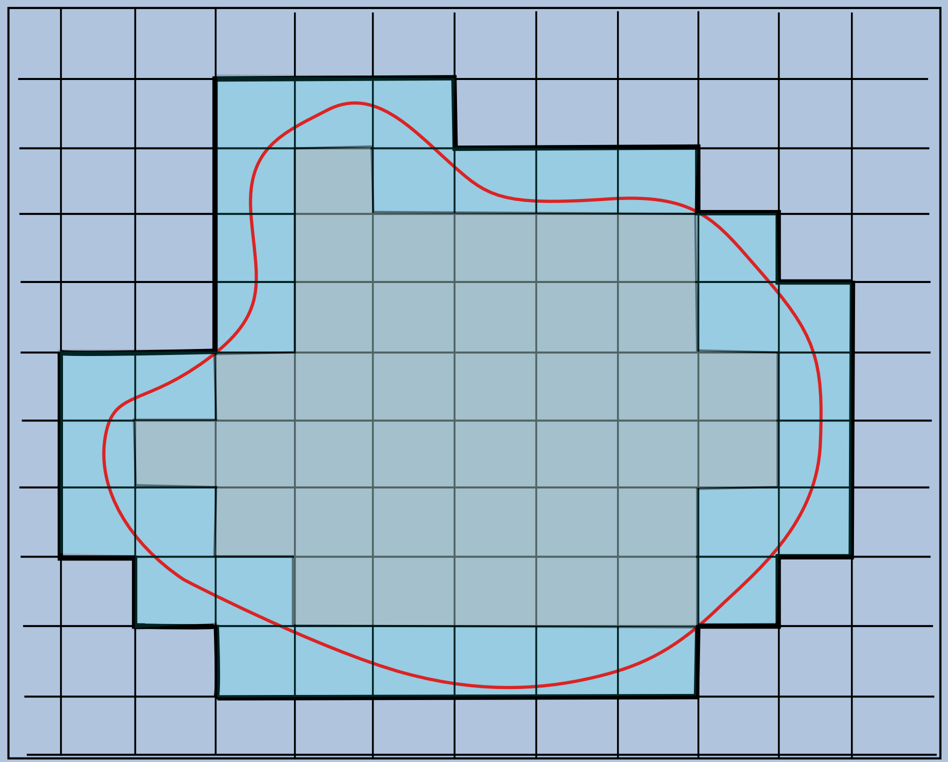
定理 9 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是有界集. 则 D 有面积当且仅当 ∂D 是零面积集.

定理 10 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是有面积的集. 则 f 在 D 上可积且积分等于 A 的充分必要条件是: 对 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, 若将 D 分割为有限个互不重叠的有面积的小块 $D_1, \cdots, D_n$, 记 λ_i 为 D_i 的直径. 只要分割的宽度 $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i$ 满足 $\lambda < \delta$, 那么对 $\forall\, p_i \in D_i$, 都有

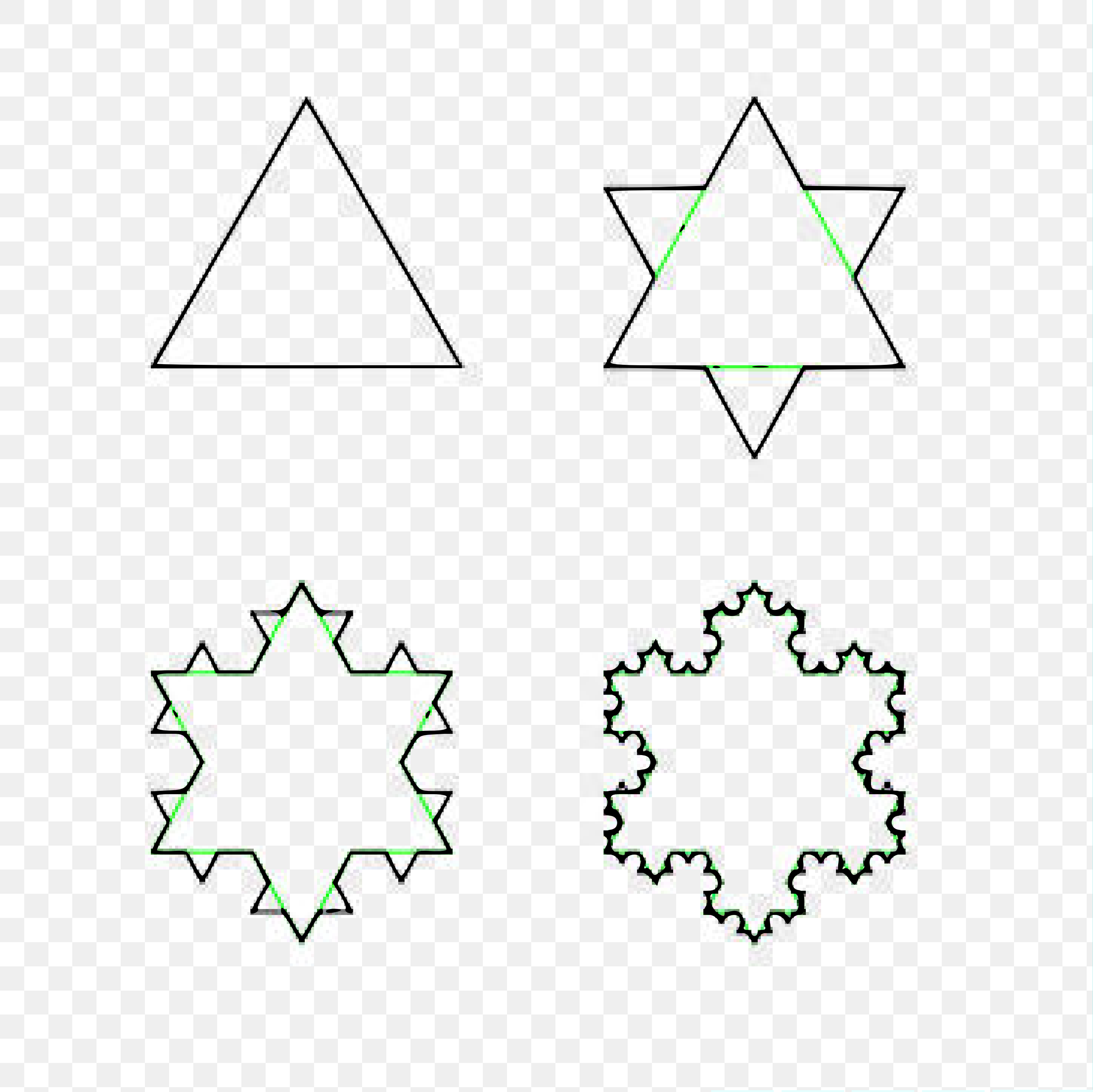
$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\sigma(D_i) - A \right| < \varepsilon.$$

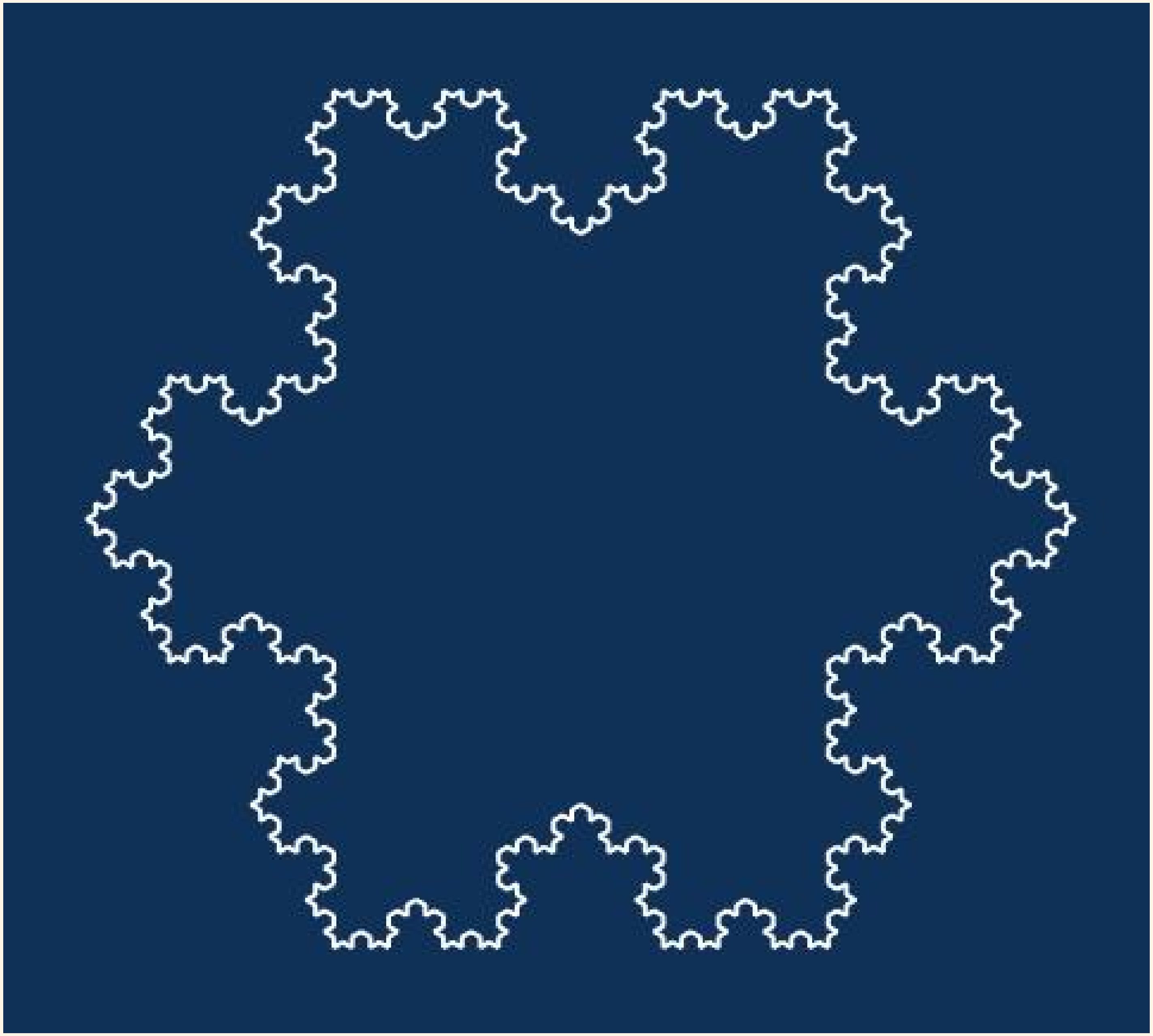
面积的另一个定义 设 S 是一个有界集合, 则存在一个矩形 $I = [a,b] \times [c,d]$ 使得 $S \subset I$, 设 I 的分割 T 将 I 分成如下小矩形: $I_1, I_2, \cdots, I_n$. 记那些完全包含在 S 内的小矩形全体的面积之和为 $A_n^-(S)$, 那些与 S 有公共点的小矩形全体的面积之和 $A_n^+(S)$, 显然, 如果 S 有面积的话, 则面积 $A(S)$ 一定介于 $A_n^-(S)$ 和 $A_n^+(S)$ 之间.

不难看出随着分割越来越细, $A_n^-(S)$ 单调递增有上界, 而 $A_n^+(S)$ 单调下降有下界, 因此两个数列都有有限极限. 如果 $A_n^-(S)$ 和 $A_n^+(S)$ 的极限相等, 则定义该极限为点集 S 的面积.



容易看出, 矩形区域中的有理点全体没有面积, 但它是零测集.





定理 11 (**积分平均值定理**) 设 K 是 $\mathbb{R}^2$ 中由有限条光滑曲线围成的有界闭区域, 函数 f, g 在 K 上连续, 且 g 在 K 上不变号. 则存在 $\xi \in K$ 使得

$$\int_K fg d\sigma = f(\xi) \int_K g d\sigma.$$

证明　连续函数 g 和 fg 都在 K 上可积. 因为 K 是有界闭集, 所以 f 在 K 上取到最小值 m 和最大值 M. 设在 K 上 $g \geqslant 0$, 这样对一切 $p \in K$ 有

$$mg(p) \leqslant f(p)g(p) \leqslant Mg(p).$$

在 K 上积分, 得

$$m \int_K g d\sigma \leqslant \int_K fg d\sigma \leqslant M \int_K g d\sigma.$$

如果 $\int_K g\, d\sigma = 0$, 那么 g 在 K 上恒为零, 所证等式自然成立. 如果 $\int_K g\, d\sigma > 0$, 那么

$$m \leqslant \left(\int_K g d\sigma\right)^{-1} \int_K fg d\sigma \leqslant M.$$

因为 K 是连通的, f 在 K 上连续, 故由介值定理知, 存在 $\xi \in K$, 使得

$$f(\xi) = \left(\int_K g d\sigma\right)^{-1} \int_K f g d\sigma.$$

这就是要证的.

特别取 $g = 1$ 就得到:

推论 1 设 K 是 $\mathbb{R}^2$ 中由有限条光滑曲线围成的有界闭区域, 若函数 f 在 K 上连续, 则存在 $\xi \in K$ 使得

$$\int_K f d\sigma = f(\xi)\sigma(K).$$

定理 12 设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 K 上可积. 如果 K 是这样的区域: 它由 $x=a, x=b, y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$ $(y_1(x)\leqslant y_2(x))$ 围成, 即

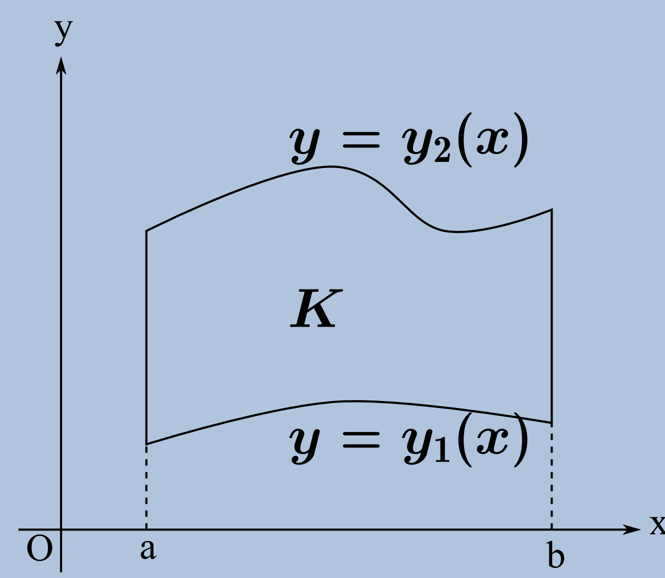
$$K=\{(x,y):\ y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\ a\leqslant x\leqslant b\},$$

其中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 如果对每一个 $x\in[a,b]$, $f(x,y)$ 在 $[y_1(x),y_2(x)]$ 上可积, 则

$$\varphi(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

在 $[a,b]$ 可积, 并有

$$\int_a^b \varphi(x)dx=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$
$$=\int_K f d\sigma.$$

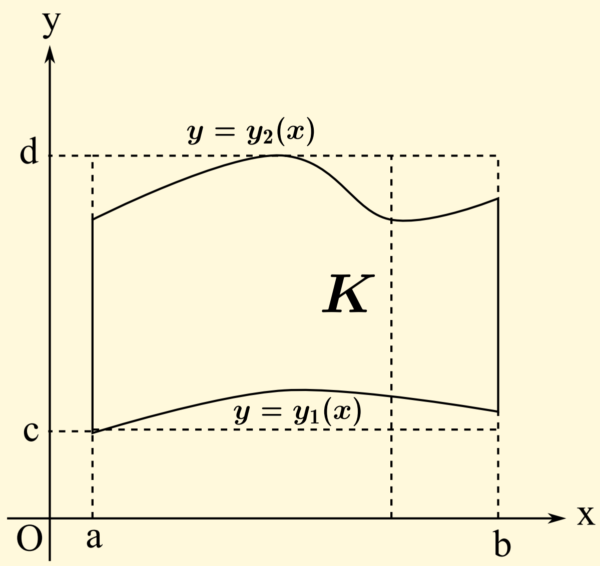


证明　设 $c=\inf\{y_1(x)\}$, $d=\sup\{y_2(x)\}$. 则 $K\subset I=[a,b]\times[c,d]$. 因为 f 在 K 上可积, 所以 f_K 在 I 上可积, 且

$$\int_K f d\sigma=\int_I f_K d\sigma.$$

由条件对每一个固定的 $x\in[a,b]$, $f(x,\cdot)$ 在 $[y_1(x),y_2(x)]$ 上可积, 因而 $f(x,\cdot)$ 在 $[c,d]$ 上可积. 根据矩形上积分的累次积分公式, 有

$$\begin{aligned}
&\int_I f_K d\sigma=\int_a^b dx\int_c^d f_K(x,y)dy\\
=&\int_a^b dx\left(\int_{y_2(x)}^d+\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}+\int_c^{y_1(x)}\right)f_K(x,y)dy\\
=&\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f_K(x,y)dy\\
=&\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.
\end{aligned}$$



定理 13 设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 K 上可积. 如果 K 是这样的区域: 它由 $y=c, y=d, x=x_1(y)$ 和 $x=x_2(y)$ $(x_1(y)\leqslant x_2(y))$ 围成, 即

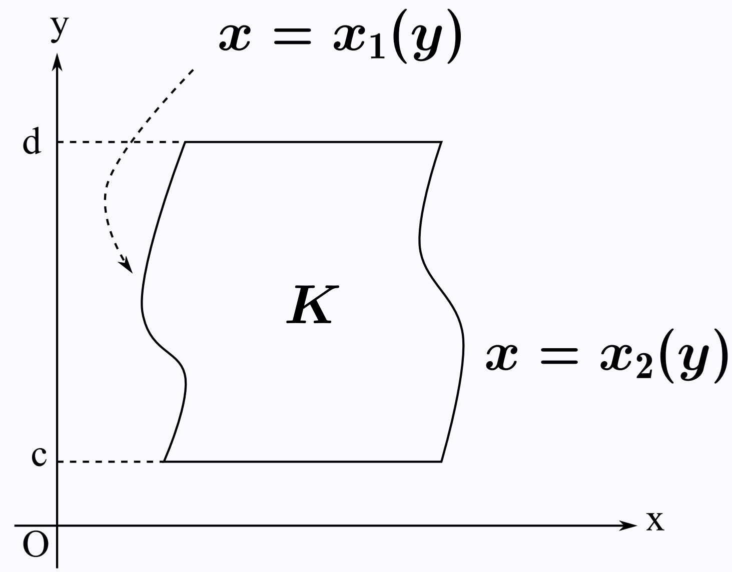
$$K=\{(x,y):\ x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y),\ c\leqslant y\leqslant d\},$$

其中 $x_1(y)$ 和 $x_2(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续. 如果对每一个 $y\in[c,d]$, $f(x,y)$ 在 $[x_1(y),x_2(y)]$ 上可积, 则

$$\psi(y)=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

在 $[c,d]$ 可积, 并有

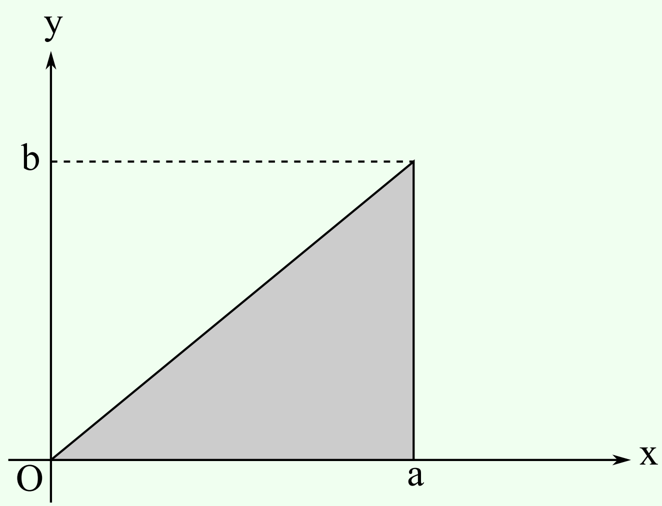
$$\int_c^d \psi(y)dy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx = \int_K f d\sigma.$$



例 1 求 $\iint_D x^2y^2dxdy$, 其中 D 由 $y=0, x=a$ 和 $y=\frac{b}{a}x$ 围成.

解 因为 $D=\{(x,y)|\ 0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant \frac{b}{a}x\}$, 故

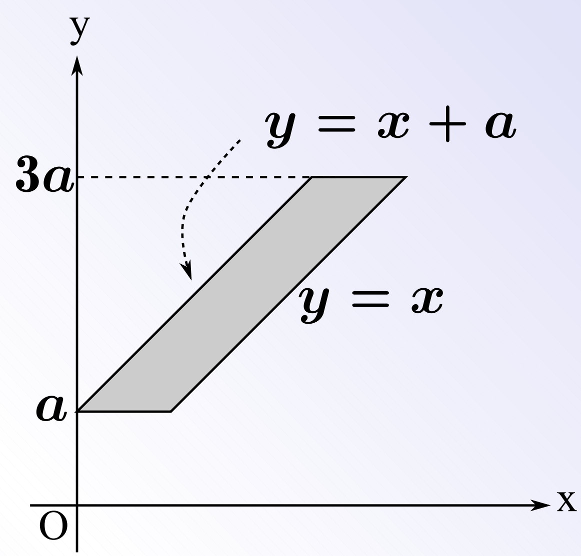
$$\begin{aligned}\iint_D x^2y^2dxdy &= \int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}x} x^2y^2dy\\ &= \frac{b^3}{3a^3}\int_0^a x^5dx = \frac{1}{18}a^3b^3.\end{aligned}$$



例 2 求 $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, 其中 D 是由 $(a>0)$ $y=a, y=3a, y=x$ 和 $y=x+a$ 围成的平行四边形.

解 $D:\ a\leqslant y\leqslant 3a, y-a\leqslant x\leqslant y$, 故

$$\begin{aligned}&\iint_D (x^2+y^2)dxdy\\&=\int_a^{3a}dy\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)dx\\&=\int_a^{3a}\left(ay^2+\frac{y^3}{3}-\frac{(y-a)^3}{3}\right)dy\\&=14a^4.\end{aligned}$$



如果要先对 y 积分, 就需要把 D 分成三个区域.

例 3 求由 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 和 $x^2+z^2\leqslant a^2$ 相交部分的立体的体积 V.

解 这个立体在第一卦限那部分是一个曲顶柱体, 其顶为 $z=\sqrt{a^2-x^2}$, 底是平面区域 $x^2+y^2\leqslant a^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0$. 由对称性可知

$$
\begin{aligned}
V &= 8\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0}} \sqrt{a^2-x^2}\,dxdy \\
&= 8\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \\
&= 8\int_0^a (a^2-x^2)\,dx \\
&= \frac{16}{3}a^3.
\end{aligned}
$$