

2017-2018 秋复变函数 B 期末试卷

一、（共 30 分）基础知识

1. 求解以下复方程：

$$(1) e^{iz} = 2017$$

$$(2) (z-3)^4 = 1$$

2. 已知调和函数 $v(x, y) = 4x^2 + ay^2 + x$ ，求常数 a 并求出以 $v(x, y)$ 为虚部且满足 $f(0) = 1$ 的解析函数 $f(z)$.

3. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nz^{n-1}}{2^n}$ ，求收敛半径 R 并在收敛域内求出此幂级数的和函数.

4. 已知 $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$ ，把 $f(z)$ 在区域 $0 < |z| < +\infty$ 展成洛朗级数.

5. 求 $z^5 + 5z^2 + 2z + 1 = 0$ 在 $1 < |z| < 2$ 内根的个数，并说明理由.

二、（共 30 分）计算以下复积分

$$(1) \int_0^{1+i} (2z + 3z^2) dz$$

$$(2) \oint_{|z|=3} \frac{e^{iz}}{z-2i} dz$$

$$(3) \oint_{|z|=4} \frac{\sin 5z}{z^2} dz$$

$$(4) \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\left(\frac{1}{1-z}\right)}{z^4} dz$$

$$(5) \oint_{|z-3|=2} \frac{e^z}{|z|^2} |dz|$$

三、（共 14 分）计算以下定积分

$$(1) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-2\cos\theta)^2}$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 4x}{x(x^4+1)} dx$$

四、（10分）利用拉普拉斯变换解微分方程初值问题：

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = te^{3t} \\ y(0) = 0, y'(0) = 2017. \end{cases}$$

五、（6分）设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在围道 C 及其内部解析， $g(z)$ 在围道 C 上没有零点，在 C 内 $g(z)$ 有唯一零点 a ，已知 $f(a) = p_1 \neq 0$ ， $f'(a) = p_2$ ， $f''(a) = p_3$ ，而 $g'(a) = 0$ ， $g''(a) = q_1 \neq 0$ ，

$g'''(a) = q_2$ ， $g''''(a) = q_3$. 计算积分： $\oint_C \frac{f(z)}{g(z)} dz$.

六、（共10分）设 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ ($a_0 \neq 0$) 的收敛半径 $R > 0$ ，

(1) 记 $M(r) = \max_{|z| \leq r} |f(z)|$ ，($r < R$)，利用柯西积分公式证明： $|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n! M(r)}{r^n}$

(2) 证明：在圆 $|z| < \frac{|a_0| r}{|a_0| + M(r)}$ 内 $f(z)$ 无零点. (其中 $r < R$)