2022-2023学年第一学期数学分析(B1)期末试卷
参考答案及评分建议

一、 简单计算题. (每题 6 分, 共 24 分)

(1)

$$\text{所求} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^p+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^p\right) \qquad (2\text{分})$$

$$\xlongequal[\text{定积分定义}]{x^p\text{连续从而可积}} \int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x \qquad (2\text{分})$$

$$= \frac{1}{p+1}. \qquad (2\text{分})$$

(2) 连续函数 $f_n(x) = \sqrt{1+x^n}$ 在区间 $\left[1, \frac{1}{n}\right]$ 上有最大值 $\sqrt{1+(1+1/n)^n} \leq \sqrt{1+\mathrm{e}}$, 有最小值 $\sqrt{2}$. (2 分)

于是

$$\int_1^{1+1/n}\sqrt{2}\,\mathrm{d}x \leq \int_1^{1+1/n} f_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_1^{1+1/n}\sqrt{1+\mathrm{e}}\,\mathrm{d}x.$$

由于当 $n\to\infty$ 时, 上面左右两式的极限都是 0, (2 分)

由两边夹法则可知, 中间式的极限也是 0. (2 分)

(3)

$$V = \int_0^{\pi/2}\pi\sin^2(x)\,\mathrm{d}x \qquad (3\text{ 分})$$

$$= \pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4} \qquad (3\text{ 分})$$

(4)

$$\text{所求} \xlongequal{x=-y} -\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{y^2-1}} \qquad (2\text{分})$$

$$\xlongequal{y=\sec(\theta)} -\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)}}{\frac{1}{\cos(\theta)}\cdot\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta \qquad (2\text{分})$$

$$= -\int_{\pi/4}^{\pi/3}1\,\mathrm{d}\theta = -\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{12}. \qquad (2\text{分})$$

二、 计算不定积分. (每题 9 分 (其中积分常数占 1 分), 共 18 分)

(1) 若将表达式中的分母记为 $f(x) = 2\cos(x)+\sin(x)$, 则 $f'(x) = -2\sin(x)+\cos(x)$, 从而表达式中的分子为 $3\cos(x)+4\sin(x) = 2f(x)-f'(x)$. (4 分)

故

$$\begin{aligned}
\text{所求} &= \int \frac{2f(x)-f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = 2\int 1\,\mathrm{d}x - \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= 2x - \ln|f(x)| + C = 2x - \ln|2\cos(x)+\sin(x)| + C. \qquad (5\text{ 分})
\end{aligned}$$

(2) (解法不唯一, 酌情给分) 令 $x = a\tan(t)$, 则 $\mathrm{d}x = a\sec^2(t)\,\mathrm{d}t$, 于是所求 $= a^2\int \sec^3(t)\,\mathrm{d}t$. 由于

$$\begin{aligned}
\int \sec^3(t)\,\mathrm{d}t = \int \sec(t)\,\mathrm{d}\tan(t) &= \sec(t)\tan(t) - \int \tan(t)\,\mathrm{d}\sec(t) \\
&= \sec(t)\tan(t) - \int \tan^2(t)\sec(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sec(t)\tan(t) - \int (\sec^2(t)-1)\sec(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sec(t)\tan(t) - \int \sec^3(t)\,\mathrm{d}t + \int \sec(t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
\int \sec(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{\cos(t)}{\cos^2(t)}\mathrm{d}t &\overset{s=\sin(t)}{=\!=\!=} \int \frac{\mathrm{d}s}{1-s^2} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-s}+\frac{1}{1+s}\right)\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(t)}{1-\sin(t)}\right) + C = \ln(\tan(t)+\sin(t)) + C,
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
\int \sec^3(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\left(\sec(t)\tan(t) + \int \sec(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sec(t)\tan(t) + \ln(\sec(t)+\tan(t))\right) + C. \qquad (6\text{ 分})
\end{aligned}$$

代回原式, 我们有

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C. \qquad (3\text{ 分})$$

该结果也可以写成

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

三、 (本题 12 分)

$$\begin{aligned}
\text{原式} &\overset{x^2=t}{=\!=\!=} \int_0^{2\pi} \sin(t)\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad (4\text{ 分}) \\
&= \int_0^{\pi} \sin(t)\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} \sin(t)\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} \sin(t)\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} \sin(t)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi+t}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} \sin(t)\left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2\sqrt{\pi+t}}\right)\mathrm{d}t. \qquad (4\text{ 分})
\end{aligned}$$

在 $(0,\pi)$ 上我们有 $\sin(t)>0$ 以及 $\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2\sqrt{\pi+t}} > 0$. 故原式 > 0. (4 分)

四、 (本题 14 分) 我们可以将 $f(x)$ 重写为

$$f(x) = x^2 - x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

由于 $f(x)$ 是连续函数, 从而可积, 故 $f(0) = 0$, (1 分)

由微积分基本定理结合上式可知$f(x)$ 可导, 并且求导后我们得到

$$f'(x) = 2x - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - xf(x) + xf(x) = 2x - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (2\text{ 分})$$

基于相同的原因, 我们有 $f'(0) = 0$, (1 分)

并且可以求导得到

$$f''(x) = 2 - f(x). \qquad (2\text{ 分})$$

于是我们所求的 $f(x)$ 是微分方程定解问题

$$\begin{cases} y'' + y = 2, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

的解. (1 分)

由于微分方程所对应的特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0$ 的解为 $\lambda = \pm \mathrm{i}$. 于是微分方程所对应的齐次方程有通解

$$y = k_1\cos(x) + k_2\sin(x). \qquad (2\text{ 分})$$

而微分方程可以写作 $y'' + y = 2\mathrm{e}^{0\cdot x}$, 其中 $0 \neq \pm\mathrm{i}$, 因此, 该非齐次方程有常数解. 不难看出 $y_0 \equiv 2$ 是这样的特解. (2 分)

于是微分方程的通解为

$$y = 2 + k_1\cos(x) + k_2\sin(x). \qquad (1\text{ 分})$$

代回定解问题, 不难求出 $k_1 = -2$ 和 $k_2 = 0$. 因此, $f(x) = 2 - 2\cos(x)$. (2 分)

五、 (本题 12 分) 由于函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 从而可以取到最大值和最小值, 我们将其分别记作 M 和 m. 从而, 在这个区间上有 $m \leq f(x) \leq M$. 而函数 $g(x)$ 在该区间上非负, 于是我们又有

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x),$$

从而得到

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (4\text{ 分})$$

(i) 若 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 由于 $g(x)$ 在区间上连续, 不难推出 $g(x) \equiv 0$ (这是作业习题, 可以直接引用). 此时, 我们可以任取 $\xi \in [a,b]$. (4 分)

(ii) 若否, 则 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$. 此时, 我们有

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \le M.$$

由连续函数 $f(x)$ 的介值性可知, 存在 $\xi \in [a,b]$ 使得 $f(\xi) = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$. 这就是我们需要的 ξ. (4 分)

六、 (本题 12 分) 作分割 $T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. 设 $x', x'' \in [x_k, x_{k+1}]$, 则根据微分中值定理可知, 存在 ξ 满足

$$|\mathrm{e}^{f(x')} - \mathrm{e}^{f(x'')}| = \mathrm{e}^{\xi}|f(x') - f(x'')|, \tag{1}$$

其中 ξ 位于 $f(x')$ 与 $f(x'')$ 之间. (2 分)

因为可积函数有界, 我们可以设 $|f(x)| \le M$. (2 分)

于是由式 (1) 可得

$$|\mathrm{e}^{f(x')} - \mathrm{e}^{f(x'')}| \le \mathrm{e}^{M}|f(x') - f(x'')|. \tag{2}$$

以 ω_k 表示函数在 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的振幅. 在式 (2) 中让 x', x'' 在$[x_k, x_{k+1}]$ 上变化, 两边取上确界, 可得

$$0 \le \omega_k(\mathrm{e}^{f(x)}) \le \mathrm{e}^{M}\omega_k(f(x)), \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

从而,

$$0 \le \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(\mathrm{e}^{f(x)})\Delta x_k \le \mathrm{e}^{M} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f(x))\Delta x_k. \tag{3}$$

(2 分)

令 $\lambda = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \Delta x_k$. 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 所以 $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f(x))\Delta x_k = 0$.

(2 分)

令 $\lambda \to 0$, 对式 (3) 取极限, 我们不难得到 $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(\mathrm{e}^{f(x)})\Delta x_k = 0$. (2 分)

从而 $\mathrm{e}^{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上可积. (2 分)

七、 (本题 8 分) 我们有 $n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = n\int_0^1 x^n f(1)\,\mathrm{d}x + n\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))\,\mathrm{d}x$. 显然,

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(1)\,\mathrm{d}x = f(1)\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = f(1)\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = f(1). \qquad (2\text{ 分})$$

另一方面, 由于 $f(x)$ 是该区间上的连续函数, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $1-\delta \le x \le 1$ 时, $|f(x)-f(1)| \le \varepsilon$. 此时,

$$\left| n\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))\,\mathrm{d}x \right| \le \underbrace{n\int_{1-\delta}^1 x^n|f(x)-f(1)|\,\mathrm{d}x}_{(I)} + \underbrace{n\int_0^{1-\delta} x^n|f(x)-f(1)|\,\mathrm{d}x}_{(II)}.$$

其中,

$$(I) \le n\int_{1-\delta}^1 x^n\varepsilon\,\mathrm{d}x = \varepsilon\cdot n\cdot\frac{1-(1-\delta)^{n+1}}{n+1} \le \varepsilon\cdot\frac{n}{n+1} \le \varepsilon. \qquad (2\text{ 分})$$

另一方面, 连续函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界, 从而我们可以设 $|f(x)| \le M$. 于是,

$$(II) \le n\int_0^{1-\delta} x^n\cdot 2M\,\mathrm{d}x = 2M\cdot\frac{n(1-\delta)^{n+1}}{n+1} \le 2M(1-\delta)^{n+1}.$$

在 $0<\delta<1$ 固定的条件下, 令 $n\to\infty$, 我们有 $2M(1-\delta)^n \to 0$. 从而当 n 充分大时, $(II) \le \varepsilon$. (2 分)

综上可知, $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = f(1)$. (2 分)