一. 复习

(1) 期望

$E[X]=\sum_{x} x f(x)$ ，当 X 取值自然数时：$E[X]=\sum_{n=0}^{\infty} P(X>n)$

证：$E[X]=\sum_{n=1}^{\infty} nP(X=n)=\sum_{n=1}^{\infty} n(P(X>n-1)-P(X>n))=\sum_{n=0}^{\infty} P(X>n)$

(cauchy-schwarz) $(E[XY])^2 \le E[X^2]E[Y^2]$

(2) 方差.协方差

$Var(X)=E(X-EX)^2=\min_{a} E(X-a)^2 \qquad E[X]=\arg\min_{a} E(X-a)^2$

$Cov(X,Y)=E[(X-EX)\cdot(Y-EY)]=E[XY]-E[X]\cdot E[Y]$

(cauchy-schwarz) $|Cov(X,Y)| \le \sqrt{Var(X)Var(Y)}$

$Var(\sum_{i=1}^{n} X_i)=\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)+2\sum_{i<j} Cov(X_i,X_j)$

协方差的双线性性：$Cov(aX+bY,Z)=aCov(X,Z)+bCov(Y,Z)$

$Cov(X,aY+bZ)=aCov(X,Y)+bCov(X,Z)$

(3) 条件期望/分布

$(X,Y) \quad P(Y=y)>0$

$f_{X|Y}(x|y)=P(X=x|Y=y)=\dfrac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}$

$F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)$

$E[X|Y=y]=\sum_{x} x f_{X|Y}(x|y)\in R \qquad E[X|Y]$ r.v. $\qquad E[E[Y|X]]=E[Y]$

如何理解条件期望？投影

$E[Y|X]=\arg\min_{\varphi(X)} E[(Y-\varphi(X))^2]$ —— X是已知的信息，此时对Y作出的最好估计

X.Y独立时，$E[Y|X]=E[Y]=\arg\min_{a} E[(Y-a)^2]$

- (X,Y)为联合离散型随机向量. X,Y二阶矩存在. 记 $\varphi(X)=E[Y|X]$. 若 g 为可测函数且 g(X) 二阶矩存在. 证：$E(Y-\varphi(X))^2 \le E(Y-g(X))^2$.

证：(利用 $E(g(X)h(Y)|X)=g(X)E(h(Y)|X)$)

$E(Y-g(X))^2=E[((Y-\varphi(X))+(\varphi(X)-g(X)))^2]=E(Y-\varphi(X))^2+\underbrace{E(\varphi(X)-g(X))^2}_{\ge 0}$

$+2E[(Y-\varphi(X))\cdot(\varphi(X)-g(X))]$

$E[(Y-\varphi(X))\cdot(\varphi(X)-g(X))]=E[E[(Y-\varphi(X))\cdot(\varphi(X)-g(X))|X]]$

$\overset{(*)}{=}E[(\varphi(X)-g(X))\cdot(\underbrace{E[Y|X]-\varphi(X)}_{=0})]=0$

区分: $F_X(\overset{r.v}{X})$. $F_X(x)$. $F_Y(\overset{r.v}{X})$

$F_{X,Y}(x,y) \Rightarrow F_X(x).\ F_Y(y).\ F_{Y|X}(y|x).\ F_{X|Y}(x|y)$

但 $F_X(x).F_Y(y) \not\Rightarrow F_{X,Y}(x,y)$

$F_X(x).F_{Y|X}(y|x) \Rightarrow F_{X,Y}(x,y)$

(4) 母函数 $G_X(s)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)s^k \overset{}{=} E[s^X]$, X 取非负整数值.

$X_1,\cdots,X_n$ 相互独立. $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$. X_i 母函数 $G_i(s)$, 则 $G_Y(s)=\prod_{i=1}^{n}G_i(s)$

(5) 常见分布 f(x). E[X]. var(X). 母函数.

(i) $X\sim B(n,p)$ $\quad P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ $\quad k=0,1,\cdots,n$

$X_1\sim B(n_1,p)$ $\quad X_2\sim B(n_2,p)$ $\quad X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \Rightarrow X_1+X_2\sim B(n_1+n_2,p)$

(ii) $X\sim G(p)$ $\quad P(X=k)=q^{k-1}\cdot p$, $k=1,2,\cdots$

无记忆性: $P(X=k+n\,|\,X>k)=P(X=n)$

(iii) $X\sim P(\lambda)$ $\quad P(X=k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$ $\quad k=0,1,2\cdots$

$X_1\sim Poi(\lambda_1)$ $\quad X_2\sim Poi(\lambda_2)$ $\quad X_1\perp\!\!\!\perp X_2 \Rightarrow X_1+X_2\sim Poi(\lambda_1+\lambda_2)$

(iv) $X\sim f(r,p)$ $\quad P(X=k)=C_{k-1}^{r-1}p^r q^{k-r}$ $\quad k=r,r+1,\cdots$

$X=X_1+\cdots+X_r$ $\quad X_1,\cdots,X_r$ 独立 $\quad X_i\sim G(p)$ $\quad X_i$ 表示第 i-1 次成功到第 i 次成功所需次数.

(6) 随机游走 (☆ 变换)

二. 习题

示性函数:

$I_A(w)=\begin{cases}1, & w\in A\\ 0, & w\notin A\end{cases}$ $\quad P(I_A=1)=P(A)=E(I_A)$

配对问题 (点数相同. 拿到自己伞. 置换) 是否 (是: 1. 否: 0). 计数

1. 电梯 n 层. m(<n) 人均匀随机停. 记 X 为电梯停的次数. 求 E[X].

解: 令 $I_i=\{1$, 第 i 层有人停 $\quad i=1,2,\cdots,n$

$\lfloor 0$ ，否则

$X=\sum_{i=1}^{n} I_i \qquad E[X]=E[\sum_{i=1}^{n} I_i]=\sum_{i=1}^{n} E[I_i]=\sum_{i=1}^{n} E[1-I_i^c]$

$=\sum_{i=1}^{n}[1-(1-\frac{1}{n})^m]=n(1-(1-\frac{1}{n})^m)$

2.

(35分) S_n表示从$[n]=\{1,2,\ldots,n\}$到$[n]$双射全体，从S_n中(均匀地)随机选取一个σ，定义不动点数为$X(\sigma)=\#\{k:\sigma(k)=k\}$，对换数为$Y(\sigma)=\#\{(i,j):\sigma(i)=j,\sigma(j)=i,i<j\}$。回答

(i)详细给出一个有关的概率空间.

(ii)X与Y是否独立？说明理由.

(iii)计算X的分布列.

(iv)求Y的期望.

解：(i) $\Omega=S_n=\left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}: i_k\in[n]\text{且各不相同}\right\}$

$F=\{S_n\text{中元素所有可能子}\}\cup\{\phi\}$

$\forall A\in F:\ P(A)=\frac{|A|}{n!}$

(ii) $P(X(\sigma)=n)=\frac{1}{n!} \qquad P(Y(\sigma)=1)>0$ 但 $P(X(\sigma)=n, Y(\sigma)=1)=0 \Rightarrow$ 不独立.

(iii) 同上课所讲"拿伞问题"

(iv) 令 $I_{ij}=\begin{cases}1 & \sigma(i)=j,\sigma(j)=i,\ i<j\\ 0 & \text{否则}\end{cases} \qquad Y=\sum_{i<j} I_{ij} \qquad E(I_{ij})=1\cdot\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)}$

$E(Y)=E(\sum_{i<j} I_{ij})=\sum_{i<j} E(I_{ij})=\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{2}$

3.

(20分) 给定$b>a>0$，离散随机变量X取值于区间$[a,b]$，试回答

(i)证明$\mathrm{Var}(X)\le\frac{1}{4}(b-a)^2$;

(ii)当X变化时，找出并验证乘积$\mathbf{E}[X]\mathbf{E}[1/X]$的取值范围.

证：(i) $\mathrm{Var}(X)=\min_{a} E(X-a)^2\le E(X-\frac{a+b}{2})^2\le\frac{(b-a)^2}{4}$

(ii) $E(X)E(\frac{1}{X})\ge(E(\sqrt{X}\cdot\sqrt{\frac{1}{X}}))^2=1$ 取等：例如 $X=\frac{a+b}{2}$

$\mathrm{cov}(X,\frac{1}{X})=E(X\cdot\frac{1}{X})-E(X)E(\frac{1}{X})=1-E(X)E(\frac{1}{X})$

$$|cov(X,\tfrac{1}{X})| \le \sqrt{var(X)var(\tfrac{1}{X})} \le \sqrt{\frac{(b-a)^2}{4}\cdot\frac{(\frac{1}{b}-\frac{1}{a})^2}{4}} = \frac{(b-a)^2}{4ab}$$

$$1-E(X)E(\tfrac{1}{X}) \ge -\frac{(b-a)^2}{4ab} \Rightarrow E(X)E(\tfrac{1}{X}) \le \frac{(a+b)^2}{4ab}$$ 取等 $P(X=a)=\frac{1}{2}$, $P(X=b)=\frac{1}{2}$

4.

(15分) ζ小盆友有N块积木，N服从参数为λ的泊松分布，δ小盆友独立地以1/2概率拿走每一块. 若δ小盆友的积木块数为K，求$E[K]$ 和$E[N|K]$.

解: $E[K]=E[E[K|N]]=E[\frac{1}{2}N]=\frac{1}{2}E[N]=\frac{1}{2}\lambda$

$$E[N|K=k]=\sum_{n=k}^{+\infty} n\cdot f_{N|K}(n|k)$$

$$f_{N|K}(n|k)=\frac{P(K=k,N=n)}{P(K=k)}=\frac{P(K=k|N=n)P(N=n)}{\sum_{n=k}^{+\infty}P(K=k|N=n)P(N=n)}=\frac{C_n^k\cdot(\frac{1}{2})^n\cdot\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}}{\sum_{n=k}^{+\infty}C_n^k\cdot(\frac{1}{2})^n\cdot\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}}$$

$$=\frac{(\frac{\lambda}{2})^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\frac{\lambda}{2}}$$

$$E[N|K=k]=\sum_{n=k}^{+\infty}\underbrace{n}_{n-k+k}\cdot\frac{(\frac{\lambda}{2})^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\frac{\lambda}{2}}=k+\frac{\lambda}{2}$$

$$E[N|K]=K+\frac{\lambda}{2}$$

5.

设$S_N = X_1+\cdots+X_N$为N个相互独立随机变量之和，其中每个随机变量等概率地取值$1,2,\dots,m$. 求
(1)S_N概率母函数; (2) 关于k的序列$P(S_N\le k)$的母函数; (3) 又设N为参数为$p\in(0,1)$的几何分布, 且N与$\{X_j: j=1,2,\dots,\}$ 独立, 试回答(2)中问题.

解: (1) $G_{S_N}(s)=E[s^{S_N}]=(E[s^{X_1}])^N=(\frac{1}{m}(s+s^2+\cdots+s^m))^N=(\frac{1-s^{m+1}}{m(1-s)})^N$

(2) $G(s)=\sum_{k=0}^{\infty}P(S_N\le k)\cdot s^k=\sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{k}P(S_N=j))\cdot s^k=\sum_{j=0}^{\infty}(\sum_{k=j}^{\infty}s^k)P(S_N=j)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{s^j}{1-s}P(S_N=j)$

$$=\frac{G(S_N)}{1-s}=\frac{(1-s^{m+1})^N}{(1-s)^{N+1}\cdot m^N}$$

(3) $G_N(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(N=n)s^n=\sum_{n=1}^{+\infty}p(1-p)^{n-1}\cdot s^n=\frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{+\infty}(s(1-p))^n=\frac{p}{1-p}\cdot\frac{s(1-p)}{1-s(1-p)}=\frac{ps}{1-s(1-p)}$

$$G_{S_N}(s)=G_N(G_X(s))=\frac{p\cdot\frac{1-s^{m+1}}{m(1-s)}}{1-\frac{s(1-s^m)}{m(1-s)}(1-p)}=\cdots$$

$P(S_N\le k)$的母函数: $\frac{G_{S_N}(s)}{1-s}=\cdots$

6.

(20分) 直线上简单随机游动$S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$，$S_0=0$，这里$P(X_1=1)=p$，$P(X_1=-1)=1-p$，$0<p<1$. 记$S_0,S_1,\ldots,S_n$中互不相同的值个数为R_n. 试证明

(i) $\mathbf{P}(R_n=R_{n-1}+1)=\mathbf{P}(S_1\cdots S_n\neq 0)$;

(ii) 当$n\to\infty$时，$\frac{1}{n}\mathbf{E}[R_n]\to\mathbf{P}(S_k\neq 0,\ \forall k\geq 1)$;

(iii) $\mathbf{P}(S_k\neq 0,\ \forall k\geq 1)=|2p-1|$.

$\varphi(A)=B$

A: $R_n=R_{n-1}+1$

即 S_n 取值与 $S_0,\cdots,S_{n-1}$ 不同.

即 $X_n(w)\neq 0$，$X_n(w)+X_{n-1}(w)\neq 0$，$\cdots$，$X_n(w)+\cdots+X_1(w)\neq 0$

B: $S_1,\cdots,S_n\neq 0$

$X_1(w)\neq 0$，$X_1(w)+X_2(w)\neq 0$，$\cdots$，$X_1(w)+\cdots+X_n(w)\neq 0$

证：(i) $R_n=R_{n-1}+1$ 即 S_n 取值与 $S_0,\cdots,S_{n-1}$ 不同.

对路径 $(X_1,\cdots,X_n)$ 作变换 $\varphi:(X_1,\cdots,X_n)\longrightarrow(X_n,\cdots,X_1)$ 一一对应

$A=\{(X_1,\cdots,X_n): R_n=R_{n-1}+1\}$ $\quad B=\{(X_1,\cdots,X_n): S_1,\cdots,S_n\neq 0\}$ $\quad \varphi(A)=B$

$P(A)=P(\varphi(A))=P(B)$ $\quad P(R_n=R_{n-1}+1)=P(S_1,\cdots,S_n\neq 0)$

(ii) $E[R_n]=1+E[\sum_{k=1}^{n}1_{\{R_k=R_{k-1}+1\}}]=1+\sum_{k=1}^{n}P(R_k=R_{k-1}+1)=1+\sum_{k=1}^{n}P(S_1,\cdots,S_k\neq 0)$

$\frac{1}{n}E[R_n]=\frac{1}{n}(1+\sum_{k=1}^{n}P(S_1,\cdots,S_k\neq 0))\longrightarrow P(S_k\neq 0,\forall k\geq 1)$ 当 $n\to+\infty$ 时

(iii) ① $p>\frac{1}{2}$ 即 $p>q$. 先考虑如下问题：若 $S_1=1$. $V_i=\min\{n: S_n=i\}$ 求 $P(V_0>V_N)$

令 $p_i=P(S_1=i,V_0>V_N)$. 则：$p_0=0$，$p_N=1$ $\Rightarrow p_i=p\cdot p_{i+1}+(1-p)\cdot p_{i-1}$

$p(p_{i+1}-p_i)=q(p_i-p_{i-1})\Rightarrow p_{i+1}-p_i=\frac{q}{p}(p_i-p_{i-1})=(\frac{q}{p})^{n-1}(p_1-p_0)$

$\Rightarrow p_N-p_0=\sum_{k=1}^{N}(p_k-p_{k-1})=\sum_{k=1}^{N}(\frac{q}{p})^{k-1}\cdot p_1=\frac{1-(\frac{q}{p})^N}{1-\frac{q}{p}}\cdot p_1 \quad\Rightarrow p_1=\frac{1-\frac{q}{p}}{1-(\frac{q}{p})^N}$

$P(S_1=1,S_k>0,\forall k)=P(S_1=1,V_0>V_k,\forall N)=1-\frac{1-p}{p}=\frac{2p-1}{p}$

$P(S_1=-1,S_k<0,\forall k)=0$ $\qquad$ §5.3(6) corollary $\quad P(\text{访问过正轴})=\min\{1,\frac{p}{q}\}$

$\Rightarrow P(S_k\neq 0,\forall k)=p\cdot\frac{2p-1}{p}=2p-1$

② $p\leq q$ 时同理.

7. $\{X_k, k\geq 1\}$ (r.v.) 独立同分布，且与 N (r.v.) 独立，$Y=\sum_{k=1}^{N} N_k$，证：$E[Y]=E[N]\cdot E[X]$，

$Var(Y)=E[N]\cdot Var(X)+Var(N)\cdot(E(X))^2$

证：记 X_k 的母函数为 $F(s)$，N 的母函数为 $G(s)$，则 Y 的母函数 $Y(s)=G(F(s))$

$Y'(s)=G'(F(s))\cdot F'(s)$，　$Y''(s)=G''(F(s))\cdot(F'(s))^2+G'(F(s))\cdot F''(s)$

$E[Y]=Y'(1)=G'(F(1))F'(1)=G'(1)F'(1)=E[N]\cdot E[X]$

$Var(Y)=Y''(1)+Y'(1)-(Y'(1))^2$

$=G''(1)(F'(1))^2+G'(1)F''(1)+G'(1)F'(1)-(G'(1)F'(1))^2$

$=G'(1)(F''(1)+F'(1)-(F'(1))^2)+(F'(1))^2(G''(1)+G'(1)-(G'(1))^2)$

$=E[N]\cdot Var(X)+(E[X])^2+Var(N)$

8. 直线上简单随机游走 $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$，$S_0=0$，X_i 独立同分布，$P(X_i=1)=p$，$P(X_i=-1)=1-p$，$0<p<1$.

(1) 求 $E[S_n]$，$Var(S_n)$，$COV(S_m,S_n)$

(2) Y 服从 $G(p)$ 且与 $\{X_i\}$ 独立，求 $Var(S_Y)$

(3) 对正整数 k，求 S_{n+k} 关于 S_n 的条件分布列 $f_{S_{n+k}|S_n}$ 与条件期望 $E[S_{n+k}|S_n]$.

解：(1) $E[S_n]=E[\sum_{k=1}^{n}X_k]=\sum_{k=1}^{n}E[X_k]=n(p\cdot 1+(1-p)\cdot(-1))=(2p-1)\cdot n$

$Var(S_n)=\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)=\sum_{i=1}^{n}(E[X_i^2]-(E[X_i])^2)=n(1-(2p-1)^2)=4np(1-p)$

$COV(S_m,S_n)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}COV(X_i,X_j)=\sum_{i=1}^{\min(m,n)}Var(X_i)=4\min\{m,n\}p(1-p)$

(2) 由 T7，$Var(S_Y)=E[Y]\cdot Var[X_1]+Var[Y]\cdot(E[X_1]^2)$

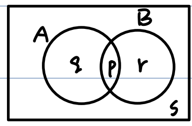
$=\frac{1}{p}\cdot 4p(1-p)+\frac{1-p}{p^2}\cdot(2p-1)^2=\frac{(1-p)(8p^2-4p+1)}{p^2}$

(3) $P(S_{n+k}=a+b\mid S_n=a)=P(S_k=b\mid S_0=0)=\begin{cases}C_k^{\frac{k+b}{2}}p^{\frac{k+b}{2}}(1-p)^{\frac{k-b}{2}} & 2\mid k+b\\ 0 & 2\nmid k+b\end{cases}$

$E[S_{n+k}|S_n]=E[S_n+X_{n+1}+\cdots+X_{n+k}|S_n]=S_n+\sum_{i=n+1}^{n+k}E[X_i]=S_n+k(2p-1)$

9. 试证明 $|P(A\cap B)-P(A)P(B)|\le\frac{1}{4}$ 并讨论等号成立的条件.

证:



① $p=P(A\cap B)$ $q=P(A\setminus B)$ $r=P(B\setminus A)$

$s=P(A^c\cap B^c)$ $p+q+r+s=1$

$|P(A\cap B)-P(A)P(B)|=|p-(p+q)(p+r)|=|p(1-p-q-r)-qr|=|ps-qr|$

$\le\max\{ps,qr\}\le\frac{1}{4}\max\{(p+s)^2,(q+r)^2\}\le\frac{1}{4}$.

取等:($p=s=\frac{1}{2}$ 或 $q=r=\frac{1}{2}$) 且 ($ps=0$ 或 $qr=0$)

② $E[I_A]=P(A)$ $E[I_B]=P(B)$ $E[I_AI_B]=E[I_{AB}]=P(AB)$

$|E[I_AI_B]-E[I_A]E[I_B]|=|\mathrm{Cov}(I_A,I_B)|\le\sqrt{\mathrm{Var}(I_A)\mathrm{Var}(I_B)}=\sqrt{P(A)(1-P(A))\cdot P(B)\cdot(1-P(B))}\le\frac{1}{4}$