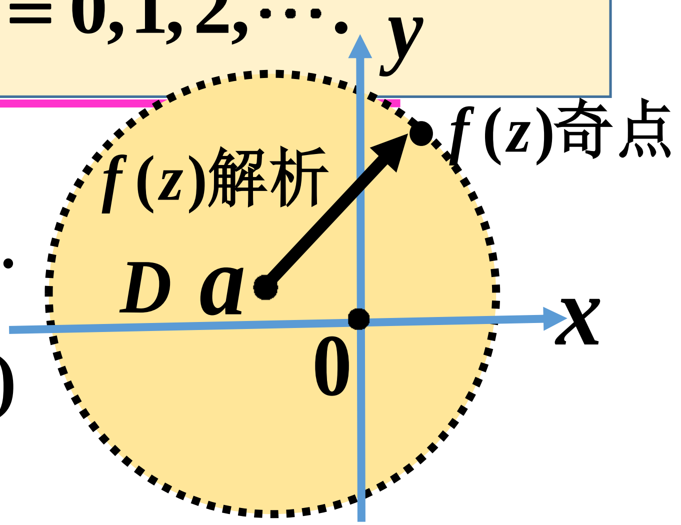
定理12(P85) 设 $f(z)$在点 a 解析, 若以 a 为中心作一个圆D, 并令圆的半径不断扩大，直至圆周首次碰上$f(z)$ 的 奇点为止, 则在此圆域D内， $f(z)$可展开成幂级数：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n,\quad a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\quad n=0,1,2,\cdots.$$



收敛半径$R=|$展开点$a-f(z)$的离a最近奇点$|$.

(若$f(z)$在全平面解析，则收敛半径$R=+\infty$.)

称幂级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ 为$f(z)$在a点的泰勒展开,

或者：$f(z)$在圆$|z-a|<R$ 内的泰勒展开.

注：幂级数展开点a须是被展开函数的解析点.

当$|z|<1$时，$\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$，是$\dfrac{1}{1-z}$在$z=0$的泰勒展开.

特别重要

熟记

$z=1$是$\dfrac{1}{1-z}$的唯一奇点，故$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$的收敛半径$R=|0-1|=1.$

当$|z|<1$时，$\dfrac{1}{1+z}=\dfrac{1}{1-(-z)}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n=1-z+z^2-z^3+z^4-z^5+\cdots.$

$$e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots,$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots,$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots.$$

(P 87)

熟记

$e^z,\cos z,\sin z$在全平面解析，故它们收敛半径$R=+\infty.$

例. 将 $\dfrac{1}{(3+iz)^2}$ 在 $z=0$ 展开为幂级数. (习题103页3(8)可仿照类似此例.)

解 由 $(3+iz)^2=0$ 解得奇点 $z=-\dfrac{3}{i}=3i$，故 $R=|0-3i|=3$。

(1)因 $\left(\dfrac{1}{3+iz}\right)'=-\dfrac{i}{(3+iz)^2}$，故 $\dfrac{1}{(3+iz)^2}=i\cdot\left(\dfrac{1}{3+iz}\right)'$.

在 $|z|<3$ 内，$\dfrac{1}{3+iz}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{i}{3}z}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\dfrac{i}{3}\right)^n z^n.$ $\left|\dfrac{i}{3}z\right|<1.$

(2) 逐项求导得 $\left(\dfrac{1}{3+iz}\right)'=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(-\dfrac{i}{3}\right)^n nz^{n-1}.$

故 $\dfrac{1}{(3+iz)^2}=i\cdot\left(\dfrac{1}{3+iz}\right)'=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(-\dfrac{i}{3}\right)^{n+1}nz^{n-1}=-\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\left(-\dfrac{i}{3}\right)^{m+2}(m+1)z^m,$

$\boxed{令\ n-1=m}$

$|z|<3$。#

例. 将 $\dfrac{z-1}{(3+iz)^2}$ 在 $z=1$ 展开为幂级数. (P103页3(8)仿照此例.)

解 由 $(3+iz)^2=0$ 解得奇点 $z=-\dfrac{3}{i}=3i$，故 $R=|1-3i|=(\sqrt{10})$.

因 $\left(\dfrac{1}{3+iz}\right)'=-\dfrac{i}{(3+iz)^2}$，故 $\dfrac{z-1}{(3+iz)^2}=i(z-1)\cdot\left(\dfrac{1}{3+iz}\right)'$.

在 $|z-1|<(\sqrt{10})$ 内，先将 $\dfrac{1}{3+iz}$ 在 $z=1$ 展开，然后逐项求导，最后

最后乘以 $i(z-1)$ 后化简. #

详细过程参考此PPT的P42.

分母带平方：先分子换成1，分母去外层平方，展开，再逐项求导.

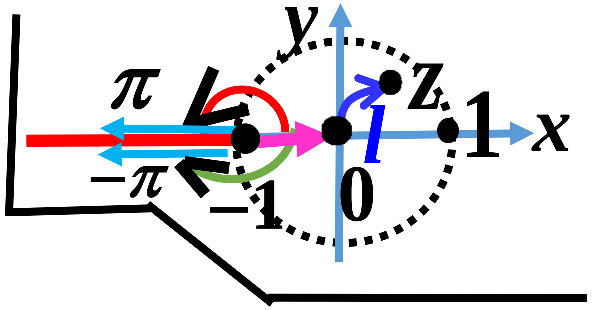
例8(P 88). 讨论$\mathrm{Ln}(1+z)$的各单值解析分支在$z=0$ 的泰勒展开.

解 $\mathrm{Ln}(1+z)=\ln|1+z|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z+1)$, 支点$-1,\infty$.

沿负实轴从-1 到 ∞ 割开复平面, 可分出无穷多个单值解析分支:

$\mathrm{Ln}_k(1+z)=\ln|1+z|+\mathrm{i}\{\arg(1+z)+2k\pi\}$, $k\in\mathbb{Z}$. 规定$-\pi<\arg(1+z)<\pi$.

在支割线上, 点-1 离展开点0 距离最短, $|0-(-1)|=1$.



收敛域为$|z|<1$. $\{\mathrm{Ln}_0(1+z)\}'=\dfrac{1}{1+z}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n$. (1)

$\{\mathrm{Ln}_0(1+z)\}\big|_{z=0}=\mathrm{Ln}_0 1=\ln 1+\mathrm{i}\arg 1=0.$ 对$|z|<1$ 内任一点z,

取含在$|z|<1$内从0到 z 的光滑曲线l. 对(1)沿 l逐项积分, 得

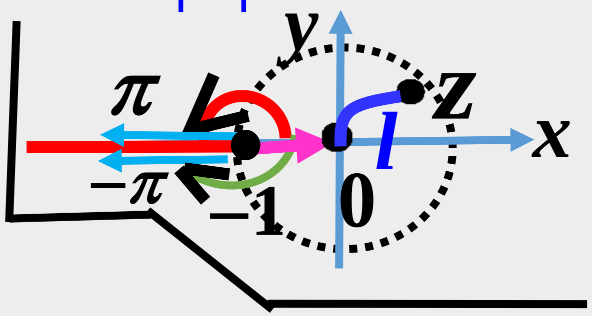
$\mathrm{Ln}_0(1+z)-\underbrace{\mathrm{Ln}_0 1}_{=0}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^z z^n\,\mathrm{d}z=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1}$. 令 $n+1=m$, 得

$\mathrm{Ln}_0(1+z)=\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{m-1}}{m}z^m$, $|z|<1.$ $\mathrm{Ln}_k(1+z)=\mathrm{Ln}_0(1+z)+2k\pi\mathrm{i}=$

支割线$z\le -1$上离展开点$z=0$ 最近的点是$z=-1$,

故收敛半径$R=\left|0-(-1)\right|=1$, 收敛域为$|z|<1$.

$$\{\mathrm{Ln}_0(1+z)\}' = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n. \qquad (1)$$



$$\{\mathrm{Ln}_0(1+z)\}\big|_{z=0} = \mathrm{Ln}_0 1 = \ln 1 + \mathrm{i}\arg 1 = 0.$$

对$|z|<1$ 内任一点z, 取含在$|z|<1$内从0到 z 的光滑曲线l. 对(1)沿 l逐项积分, 得

$$\mathrm{Ln}_0(1+z) - \underbrace{\mathrm{Ln}_0 1}_{=0} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^z z^n\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1}.$$ 令$n+1=m$, 得

$$\mathrm{Ln}_0(1+z) = \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}z^m, \quad |z|<1.$$

$$\mathrm{Ln}_k(1+z) = \mathrm{Ln}_0(1+z) + 2k\pi\mathrm{i} = 2k\pi\mathrm{i} + \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}z^m, \quad |z|<1, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

例10'(P 89) 求 $\dfrac{ze^{z^2}}{\cos z}$ 在 $z=0$ 的泰勒展式(到第四项). (展开第四项指到 z^3 项.)★

解 记 $f(z)=\dfrac{ze^{z^2}}{\cos z}$. 由 $\cos z=0$ 解得 $f(z)$ 奇点 $z=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$, $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$

离 $z=0$ 最近的奇点为 $\pm\dfrac{\pi}{2}$, 故 $R=\left|0\mp\dfrac{\pi}{2}\right|=\dfrac{\pi}{2}$. 故 $f(z)$ 在 $|z|<\dfrac{\pi}{2}$ 内解析.

(2) 设 $f(z)=\dfrac{ze^{z^2}}{\cos z}=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots, |z|<\dfrac{\pi}{2}$, a_n 待定. ★★

$f(z)$ 是奇函数, 根据 $f(z)+f(-z)=0$, 可以证明

$$a_0=a_2=\cdots=a_{2n}=\cdots=0,$$ ★★

故 $f(z)=a_1z+a_3z^3+\cdots=z(a_1+a_3z^2+\cdots)$. (只剩奇次项)★★★

$$=\frac{ze^{z^2}}{\cos z}=\frac{z\left\{1+z^2+\frac{1}{2!}(z^2)^2+\cdots\right\}}{1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4+\cdots}.$$

两边乘以分母得

故 $\cancel{z}\left\{1+z^2+\frac{1}{2!}(z^2)^2+\cdots\right\}=\cancel{z}(a_1+a_3z^2+\cdots)\left(1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4+\cdots\right)$.

故 $1+z^2+\frac{1}{2!}(z^2)^2+\cdots=(a_1+a_3z^2+\cdots)\left(1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4+\cdots\right).$

$$=a_1+\left(-\frac{1}{2!}a_1z^2+a_3z^2\right)+\cdots=a_1+\left(a_3-\frac{a_1}{2}\right)z^2+\cdots.$$

比较两边系数得

$$\begin{cases} a_1=1, \\ a_3-\dfrac{a_1}{2}=1. \end{cases} \quad 解之得 \quad \begin{cases} a_1=1, \\ a_3=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

故 $f(z)=z+\frac{3}{2}z^3+\cdots,\quad |z|<\frac{\pi}{2}.$ #

(5) 待定系数法

用待定系数法可以求解P103的3(7).

例 求 $\frac{ze^{z^2}}{\cos z}$ 在 $z=0$ 的泰勒展开(到第四项).

故 $f(z)=a_1z+a_3z^3+\cdots=z(a_1+a_3z^2+\cdots).$

(奇函数, 只有奇次幂项)

(展开第四项指到 z^3 项.)

$$=\frac{ze^{z^2}}{\cos z}=\frac{z\left\{1+z^2+\frac{1}{2!}(z^2)^2+\cdots\right\}}{1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4+\cdots}.$$

(类似, 将 $\tan z,\cot z$ 展开到第 n 项.)

(类似将 $\sec z,\csc z$ 展开到第 n 项.)

故两边乘以分母得

故 $\cancel{z}\left\{1+z^2+\frac{1}{2!}(z^2)^2+\cdots\right\}=\cancel{z}(a_1+a_3z^2+\cdots)\left(1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4+\cdots\right).$

P104第4题. 设$\dfrac{1}{1-z-z^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}C_n z^n$，证明：$C_{n+2}=C_{n+1}+C_n$，$n\geq 0$，求其收敛半径.

提示：1) 根据分母$1-z-z^2=0$, 求出所有奇点. 收敛半径$R=\min\limits_{\eta\in\{奇点\}}|0-\eta|$.

请大家自己完成.

2) 用待定系数法. 对$\dfrac{1}{1-z-z^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}C_n z^n$，两边乘以分母得

$$\underline{1=(1-z-z^2)\sum_{n=0}^{+\infty}C_n z^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n z^n-\sum_{n=0}^{+\infty}C_n z^{\underline{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}C_n z^{\underline{n+2}}$$

$$=\sum_{m=0}^{+\infty}C_m z^m-\sum_{m=1}^{+\infty}C_{m-1}z^m-\sum_{m=2}^{+\infty}C_{m-2}z^m$$

$$=\sum_{m=2}^{+\infty}(\underbrace{C_m-C_{m-1}-C_{m-2}}_{=0})z^m+\underbrace{C_0}_{=1}+(\underbrace{C_1-C_0}_{=0})z.$$

比较两边系数, 得$m\geq 2$时, $C_m=C_{m-1}+C_{m-2}$，取 $m=n+2$ 得结论成立. #

例11(P 89). 求 $f(z)=\exp\left(\frac{z}{z-1}\right)$ 在 $z=0$ 的泰勒展式的前四项. (展开到 z^3.)

解 只有一个奇点 $z=1$, $R=|0-1|=1$. 在 $|z|<1$ 内,

$$\frac{z}{z-1}=z\cdot\frac{1}{z-1}=-z\cdot\frac{1}{1-z}=-z\left\{1+z+z^2+z^3+O\left(z^4\right)\right\}=-z-z^2-z^3+O(z^4).$$

$$f(z)=\exp\left\{-z-z^2-z^3+O\left(z^4\right)\right\}$$

$$\boxed{\exp z=e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+O\left(z^4\right)}$$

$$=1+\left\{-z-z^2-z^3+O\left(z^4\right)\right\}+\frac{\left\{-z-z^2-z^3+O\left(z^4\right)\right\}^2}{2!}+\frac{\left\{-z-z^2-z^3+O\left(z^4\right)\right\}^3}{3!}+O\left(z^4\right)$$

$$=\left\{1-z-z^2-z^3+O\left(z^4\right)\right\}+\frac{z^2+2z^3+O\left(z^4\right)}{2}+\frac{-z^3+O\left(z^4\right)}{6}+O\left(z^4\right)$$

$$=1-z-\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{6}z^3+O\left(z^4\right).$$

解析函数的零点 (用在$z=0$的泰勒展开)

定义 设 $f(z)$ 在 z_0 点解析，若 $f(z_0)=0$，则称 z_0 是 $f(z)$ 的零点.

设 z_0 是 $f(z)$ 的零点，且设 $f(z)$ 在 z_0 某邻域 $U:|z-z_0|<\rho$ 内解析，则由(P85)定理12，

$$f(z)=a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots,\quad a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\quad n\ge 1,$$

$a_0=f(z_0)=0.$ 此时只可能出现两种情况：

1) 要么所有系数 $a_n=0,\ n=0,1,2,3,\cdots$，此时，$\forall z\in U$，$f(z)\equiv 0$；

2) 要么所有系数不全为0，则$\exists m\in\mathbb{Z}^+$，使得 $a_m\ne 0$，但是

$a_0=a_1=a_2=\cdots=a_{m-1}=0$， 即 $f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots$，

这时，称 z_0 是$f(z)$ 的m 级零点，或m 阶零点. 称1 级零点为单零点.

定理14(P90) z_0 是解析函数$f(z)$的m 阶零点的充要条件是：★★★

$$f(z_0)=f'(z_0)=f''(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0,\quad f^{(m)}(z_0)\ne 0.$$

设z_0 是 解析函数 $f(z)$ 的零点，则存在 z_0 某邻域 U，使得在U内，只能出现两种情况：

1) f 在z_0泰勒展开中所有系数$a_n=0$, $n=0,1,2,3,\cdots$，此时 $\forall z\in U$，$f(z)\equiv 0$;

2) f 在z_0泰勒展开中所有系数不全为0，则存在$m\in\mathbb{Z}^+$，使得

$a_m\neq 0$，但是 $a_0=a_1=a_2=\cdots=a_{m-1}=0$，即 $f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots$，

这时，称z_0 是 $f(z)$ 的m 级零点，或m 阶零点．称1 级零点为单零点．

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

定理14(P 90) z_0 是解析函数$f(z)$的m 阶零点的充要条件是：★★★

$$f(z_0)=f'(z_0)=f''(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0,\ f^{(m)}(z_0)\neq 0.$$

例 $z=0$是 $f(z)=z-\sin z$ 的几级零点？

解 在 $z=0$的邻域内，$f(z)=z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)=\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\cdots$,

故$z=0$是$(z-\sin z)$的三级零点． ★★

定理15(P90) z_0 是解析函数$f(z)$的m 阶零点的充要条件是：★★★

在z_0某个邻域U内 $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, $g(z)$在z_0 解析且 $g(z_0)\neq 0$; 熟记

证明 必要性($\Rightarrow$). 设 z_0 是解析函数$f(z)$ 的m 级零点, 则在z_0 某个邻域 U 内,

$$a_m \neq 0, \quad f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+a_{m+2}(z-z_0)^{m+2}+\cdots$$

$$=(z-z_0)^m\left\{a_m+a_{m+1}(z-z_0)+a_{m+2}(z-z_0)^2+\cdots\right\}\triangleq(z-z_0)^m g(z),$$

其中 $g(z)=a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\cdots$, 在 U 内收敛, $g(z_0)=a_m\neq 0.$

由定理11(P84－85)知, $g(z)$在z_0邻域U内解析. 必要性得证.

z_0 是 $f(z)$ 的m 级零点, 是指 存在$m\in\mathbb{Z}^+$, 使得在 z_0 邻域U 内,

$$f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots+a_{m+p}(z-z_0)^{m+p}+\cdots,\quad a_m\neq 0,$$

即 $f(z)=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\dfrac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z-z_0)^{n+1}+\cdots,\quad f^{(n)}(z_0)\neq 0.$

定理15(P 90) z_0 是解析函数$f(z)$的m 阶零点的充要条件是：★★★

在z_0某个邻域U内 $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, $g(z)$在 z_0 解析且 $g(z_0)\neq 0$.

证明 充分性($\Leftarrow$). 设在z_0某个邻域U内 $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, $g(z)$在 z_0 解析, $g(z_0)\neq 0$.

由定理12(P 85)知，$g(z)$可以在解析点z_0可以展开为幂级数：

$$g(z)= b_0+b_1(z-z_0)+b_2(z-z_0)^2+\cdots,\quad \text{且 } b_0=g(z_0)\neq 0.$$

则 $f(z)=b_0(z-z_0)^m+b_1(z-z_0)^{m+1}+\cdots$, 故 z_0 是 $f(z)$ 的m 级零点. #

证明 必要性($\Rightarrow$). 设 z_0 是解析函数$f(z)$ 的m 级零点, 则在z_0 某个邻域 U 内,

$$a_m\neq 0,\quad f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+a_{m+2}(z-z_0)^{m+2}+\cdots$$

$$=(z-z_0)^m\left\{a_m+a_{m+1}(z-z_0)+a_{m+2}(z-z_0)^2+\cdots\right\}\triangleq(z-z_0)^m g(z),$$

$g(z)=a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\cdots$, 幂级数, 在 U 内收敛, 解析, $g(z_0)=a_m\neq 0$.

定理15(P90) z_0 是解析函数$f(z)$的m 阶零点的充要条件是:★★★
在z_0某个邻域U内 $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, $g(z)$在 z_0 解析且 $g(z_0)\neq 0.$

定理15推论 z_0 是解析函数 $f(z)$ 的m 阶零点的充要条件是:
存在z_0的某个充分小邻域V, 使得
在V内, $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, $g(z)$解析且 $g(z)\neq 0.$

证明 由条件和定理15(P90)知, 存在z_0的某个邻域U, 使得在U 内,
$f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, $g(z)$在z_0解析且$g(z_0)\neq 0.$

故存在z充分小邻域V, 使得在V内, $g(z)$解析从而连续. 因$g(z_0)\neq 0$,
可以进一步缩短V的半径, 使得在V内$g(z)$解析且$g(z)\neq 0$. #

定理16(解析函数零点孤立性) 设 $f(z)$ 在 z_0 解析，且 $f(z_0)=0$.

则要么在z_0 某个邻域U 内$f(z)\equiv 0$,

要么存在z_0 的一个邻域U, 使得 在U 内z_0是$f(z)$ 唯一零点.

略证：设$f(z)$ 在 z_0 解析，且 $f(z_0)=0$. 在z_0 某个邻域U 内,

则要么在 z_0 某邻域U 内$f(z)\equiv 0$, 要么$\exists m\in\mathbb{Z}^+$, 使得 z_0 是 $f(z)$ 的m 级零点.

若 z_0 是 $f(z)$ 的m 级零点, $m\in\mathbb{Z}^+$, 则由定理15(P 90)推论, 则

在z_0某个邻域U内 $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, $g(z)$ 解析(连续)且 $g(z)\neq 0$.

除了$z=z_0$外, $(z-z_0)^m\neq 0$. 故在U内z_0是$f(z)$的唯一零点. #

定理15(P 90)推论 z_0 是解析函数$f(z)$的m 阶零点的充要条件是:★★★

在z_0某个邻域U内 $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, $g(z)$解析且 $g(z)\neq 0$.

例. 设z_0是$f(z)$的m级零点，又是$g(z)$的 n 级零点$(m \geq n)$,

问$\dfrac{f(z)}{g(z)}$在点 z_0 具有何种性质？(P100第9(3)题)

解 由定理15推论，存在z_0的某个充分小邻域U，使得在U 内，

$$f(z)=(z-z_0)^m u(z),\ \ u(z)\text{解析且}u(z)\neq 0,$$

$$g(z)=(z-z_0)^n v(z),\ \ v(z)\text{解析且}v(z)\neq 0.$$

$$\frac{f(z)}{g(z)}=(z-z_0)^{m-n}\frac{u(z)}{v(z)},\quad \frac{u(z)}{v(z)}\text{解析},\quad \frac{u(z)}{v(z)}\neq 0.$$

当$m=n$ 时，在U 内，$\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{u(z)}{v(z)}\neq 0$，故 z_0 不是$\dfrac{f(z)}{g(z)}$的零点.

当$m>n$ 时，故定理15知，z_0是$\dfrac{f(z)}{g(z)}$的$m-n$ 阶零点. #

- 泰勒展开是$f(z)$在解析点附近单连通区域内的级数展开.
- 是否可以将$f(z)$在奇点附近多联通区域内展开为级数?

5.4 罗朗(Laurent)级数

(奇点附近多联通区域内级数展开)

➢ $f(z)$在奇点 $z=a$ 附近,可展开为如下形式的级数:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n+\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$$

($f(z)$在a点奇性引起)

$$=\sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m}(z-a)^{-m}+\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n. \qquad (5.11)$$

这样的双边级数称为罗朗(Laurent)级数,其中

$$\sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m}(z-a)^{-m}=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{a_{-m}}{(z-a)^m}=\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{a_{-3}}{(z-a)^3}+\cdots+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+\cdots$$

罗朗(Laurent)级数收敛概念

罗朗级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ 由两个级数构成：

罗朗级数　　负幂项部分　　正幂项和常数项部分

$$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n}_{\text{收敛}} = \underbrace{\sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m}(z-a)^{-m}}_{\text{收敛}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n}_{\text{收敛}}.$$

★

定义：若 $\sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m}(z-a)^{-m}$，$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ 都收敛，

则称罗朗级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ 收敛.

罗朗(Laurent)级数 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ 收敛域

(4.3.2): $\sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m}(z-a)^{-m}$ $\xlongequal{\text{令}\zeta=\frac{1}{z-a}}$ $\sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m}\zeta^m$ (关于 ζ 幂级数)

设收敛半径为 $\frac{1}{r}$

$|\zeta|<\frac{1}{r}$ 时，收敛到一个解析函数 $f(\zeta)=f\left(\frac{1}{z-a}\right)$

当 $\frac{1}{|z-a|}<\frac{1}{r}$ 时，(4.3.2)收敛到解析函数 $f\left(\frac{1}{z-a}\right)$.

(4.3.2)收敛域：$|z-a|>r\geq 0$.

(4.3.3): $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$

设收敛半径为 R

在 $|z-a|<R$ 内收敛到解析函数 $g(z)$.

(4.3.3)收敛域 $|z-a|<R$.

若(1) 若 $r<R$：两收敛域有公共部分 $0\leq r<|z-a|<R$. 圆环域

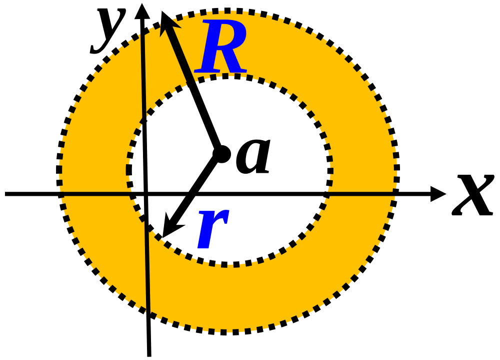
罗朗(Laurent)级数收敛域

(2) 若 $r=R$：罗朗级数至多在 $|z-a|=R$ 上某些点收敛.

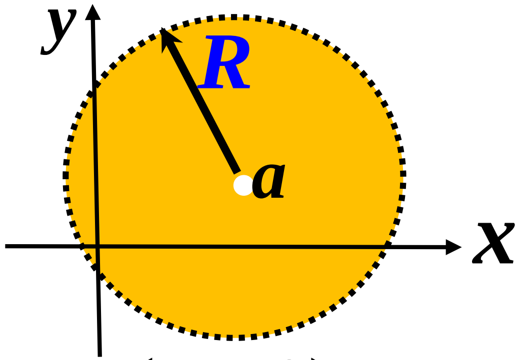
(3) 若 $r>R$：两收敛域无公共部分，罗朗级数处处发散.

罗朗级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ 的收敛域为:

圆环域 $r < |z-a| < R.$

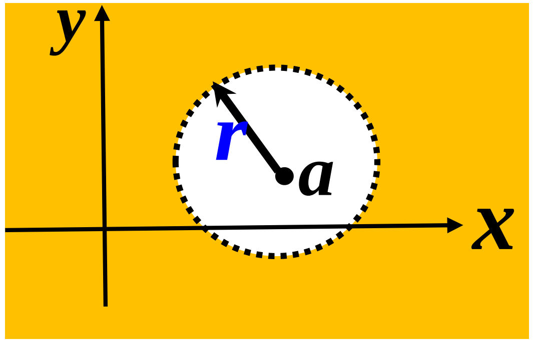


特殊圆环域(也是罗朗级数可能的收敛域):



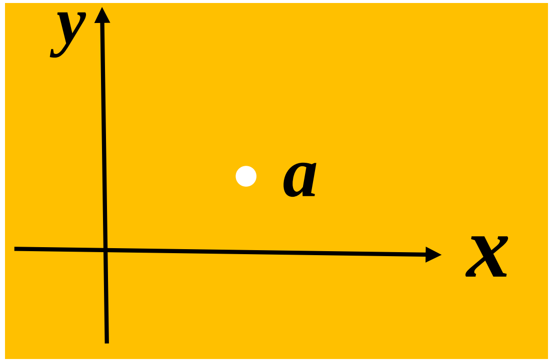
$(r=0)$

$0 < |z-a| < R$



$(R=+\infty)$

$|z-a| > r$



$(r=0,\ R=+\infty)$

$|z-a| > 0$

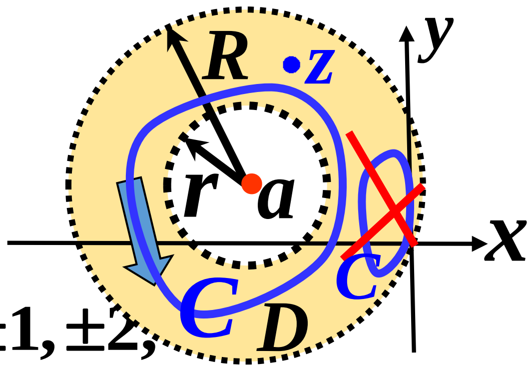
罗朗级数在收敛圆环域内收敛到解析函数.

反之, 在圆环域内解析的函数也必可展成罗朗级数，即

定理17(P 92)设$f(z)$在圆环域 $D: r<|z-a|<R$内解析, 则

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n,\quad \forall z\in D,$$

a是圆环域D 的中心.



其中$a_n=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad n=0,\pm1,\pm2,$

C 是圆环域D内任一条围绕点展开点a的逆时针简单闭路.

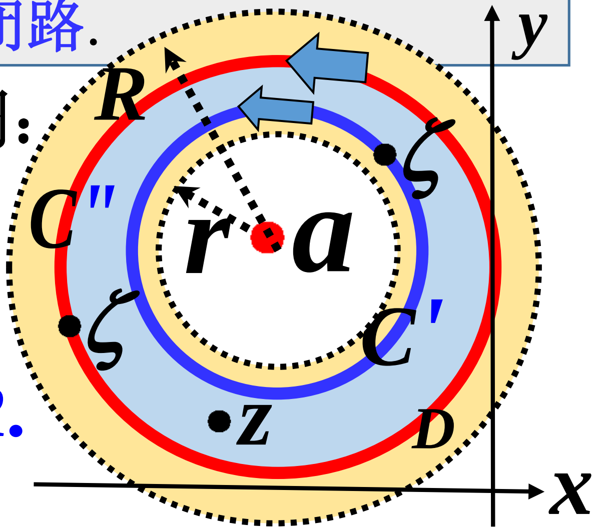
-------(圆环域内解析函数的)罗朗展开定理

注：$f(\zeta)$在C内部不一定解析(有奇点)，故$a_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$一般不成立.

定理17(P92) 设$f(z)$在圆环域$D: r<|z-a|<R$内解析, 则$\forall z\in D$,

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n,\quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

C 是圆环域D内任一条围绕点a的逆时针方向简单闭路.



证明: $\forall z\in D$, 在D内以a为中心作两个逆时针同心圆周:

$$C'': \ |\zeta-a|=\delta'',\quad C': \ |\zeta-a|=\delta',$$

使得C',C'' 都在D 内, C'' 在C' 外侧,

z 包含在C',C'' 之间, 即$r<\delta'<|z-a|<\delta''<R.$

$C=C''+C'^{-}$构成复闭路,

$f(\zeta)$在C及其所围区域内解析,故由复闭路柯西积分公式(定理5 P59) 知

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{C''}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

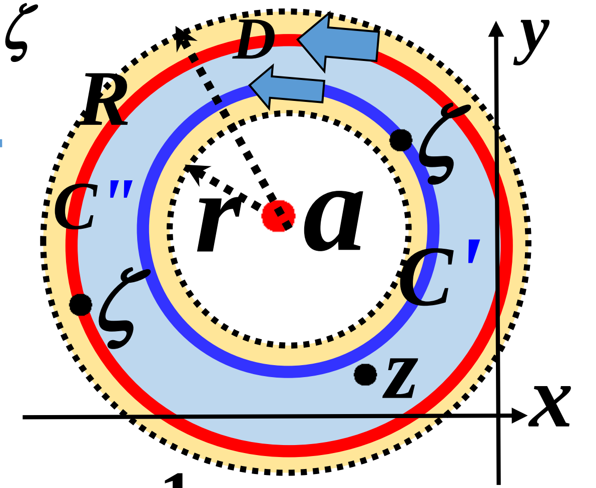
正幂项和常数项部分　负幂项部分

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{C''}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

(1) $\forall\zeta\in C''$, $|\zeta-a|=\delta''>|z-a|$，与定理12(P 85)证明完全类似，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C''}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{C''}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{C''}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n d\zeta$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n,\text{ 其中}a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C''}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta,\ n=0,1,2,\cdots$$



(2) $\forall\zeta\in C'$, $|\zeta-a|=\delta'<|z-a|$, $\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right|<1$,

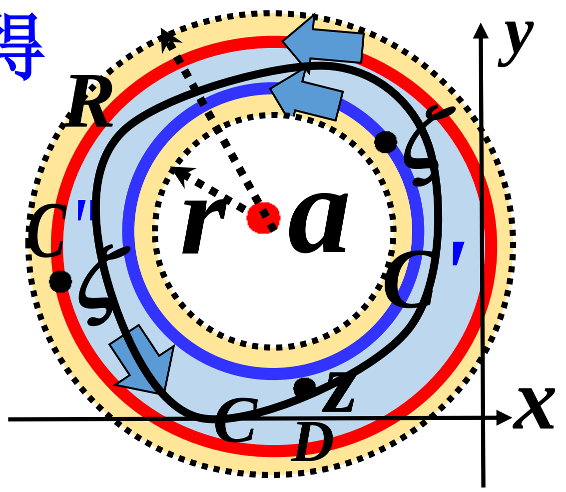
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)-(z-a)}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\zeta)}{-(z-a)}\cdot\frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\zeta)}{-(z-a)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n d\zeta=-\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}f(\zeta)(\zeta-a)^n d\zeta\right\}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}$$

(令$m=-(n+1)$)($n=-m-1$)

$$=-\sum_{m=-\infty}^{-1}a_m(z-a)^m,\text{ 其中 }a_m=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{m+1}}d\zeta,\ m=-1,-2,\cdots.$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C''}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$ 综合(1)(2)得



$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n+\sum_{m=-\infty}^{-1}a_m(z-a)^m=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n,$$

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C''}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta, & n=0,1,2,\cdots,\\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C'}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta, & n=-1,-2,\cdots.\end{cases}$$

在D内任取一条围绕点a的逆时针方向简单闭路C,

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}$在由$C''$和$C$(同理, C和C')所围的区域边界及内部解析,

由多联通区域柯西积分定理(P 55 定理3) 可知,

$$\int_{C''}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta=\int_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta.$$

$$\int_{C'}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta=\int_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta.$$

故$a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$,

$n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$ #

• 设$f(z)$在圆环域$D: r<|z-a|<R$内解析，

则 $f(z)$ 在同一个圆环域D内的罗朗展式是唯一的.

证明：假设在D 内，$f(z)$有两种罗朗展式：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}b_n(z-a)^n,\quad z\in D. \qquad (*)$$

下面证明$\forall k\in\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，$a_k=b_k$.

取C 是圆环域D内任一条围绕点a的逆时针简单闭路.

对任意固定的$k\in\mathbb{Z}$, $(*)$式两边乘以$(z-a)^{-k-1}$并在C上积分得

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\int_C(z-a)^{n-k-1}\,\mathrm{d}z=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}b_n\int_C(z-a)^{n-k-1}\,\mathrm{d}z. \quad (**)$$

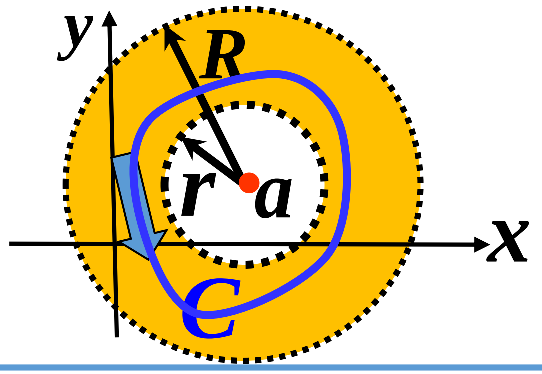
由P56例5, $\displaystyle\int_C\frac{1}{(z-a)^{-n+k+1}}\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & -n+k+1=1,\text{ 即}n=k\text{时},\\ 0, & -n+k+1\neq1,\text{ 即}n\neq k\text{时}.\end{cases}$

$(**)\Rightarrow 2k\pi\mathrm{i}\,a_k=2k\pi\mathrm{i}\,b_k$, 故 $a_k=b_k$. 由k任意性得结论. #

求圆环域内解析函数的罗朗展开式

(1) 直接展开法

设 $f(z)$ 在圆环域 $D: r < |z-a| < R$ 内解析,



直接利用定理17(P92)中的公式计算系数 a_n：

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta, \quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots \quad (\#)$$

直接法计算复杂.参见P94例12解法1.

C 是圆环域D内任一条围绕点a的逆时针方向简单闭路

以及此PPT的P55-60.

比如, 取 C: $|z-a| = \frac{r+R}{2}$, 求出a_n. 然后, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$.

(2) 间接展开法 ★★★★★

间接法计算方便,须熟练掌握. 参见P94-96例12解法2.

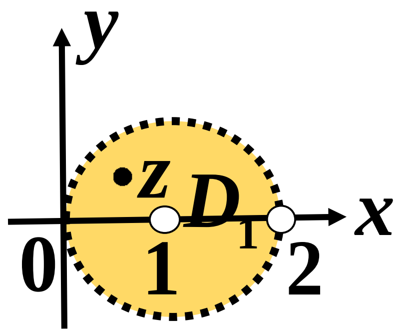
与解析圆域内幂级数展开非常类似,

- 灵活利用e^z, $\cos z$, $\sin z$在$z=0$ 的泰勒展式;
- 灵活应用:当$|z|<1$ 时, $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n$.

例12(P 94-96) 求 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ $\begin{cases} 1)\text{在点} z=1 \text{的罗朗展开;} \\ 2)\text{在} D: 2<|z|<+\infty \text{的罗朗展开.} \end{cases}$

解法2 用间接法.

$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, 只有两奇点 $\begin{cases} z_1=1, \\ z_2=2. \end{cases}$



1) 求在 $z=1$ 的罗朗展开, 取 $R=|2-1|=1.$

在 $0<|z-1|<1$ 内, $f(z)$解析, 故可展为$(z-1)$ 的罗朗级数.

$$f(z)=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{(z-1)-1}=\frac{1}{z-1}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{1-(z-1)}$$

$$=-\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{n-1}=-\sum_{m=-1}^{+\infty}(z-1)^m,\quad 0<|z-1|<1.$$

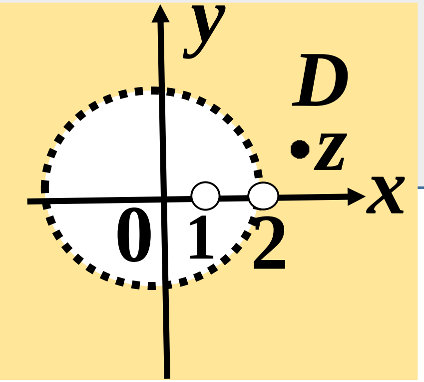
令$m=n-1$,

则$n=0$时, $m=-1.$

例12(P 94-96) 求 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ $\begin{cases}1)\text{在点}z=1\text{的罗朗展开;}\\ 2)\text{在}D:2<|z|<+\infty\text{的罗朗展开.}\end{cases}$

解法2 用间接法.

$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, 只有两奇点 $\begin{cases}z_1=1,\\ z_2=2.\end{cases}$



2) 在 $D:2<|z|<\infty$ 内, $f(z)$解析可展为 z 的罗朗级数.

$0<\left|\dfrac{2}{z}\right|<1,\ 0<\left|\dfrac{1}{z}\right|<\dfrac{1}{2}$, 故

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{2^{m-1}-1}{z^m}=\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{2^{m-1}-1}{z^m},\quad 2<|z|<+\infty.\ \#$$

令 $m=n+1$,

则 $n=0$ 时, $m=1.$

$(m=1\text{时}\,2^{m-1}-1=0)$

注意：当$|z|<1$时，$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$，$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n$.

当$1<|z|<+\infty$时，$\cancel{\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n}$.

当$1<|z|<+\infty$时，$0<\left|\frac{1}{z}\right|<1$，故

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{-z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}}=-\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{z^m}.$$

令$m=n+1$，则$n=0$时，$m=1$.

当$1<|z|<+\infty$时，$\frac{1}{1-z}=-\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{z^m}$.

当$1<|z|<+\infty$时，$\frac{1}{1+z}=-\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{z^m}$.

例12(P 94-96) 求 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ $\begin{cases} 1)\text{在点}z=1\text{的罗朗展开;} \\ 2)\text{在}D: 2<|z|<+\infty\text{的罗朗展开.} \end{cases}$

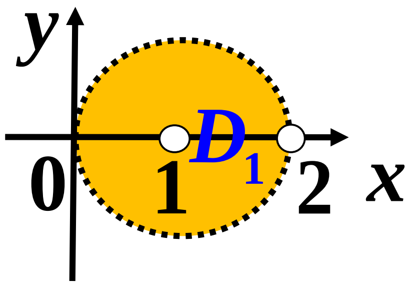
解法1 用直接法.

$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, 只有两奇点 $\begin{cases} z_1=1, \\ z_2=2. \end{cases}$

1) 考虑 $D_1 \triangleq \{z \mid 0<|z-1|<1\}$. • 先注意圆环域中心和函数解析性.

D_1 是以1为中心的圆环域. $f(z)$在D_1 内解析,

故由定理17(P92)知，在D_1 内可展为



$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(z-1)^n.$$ 因 $f(z)=\dfrac{1}{z-1}\cdot\dfrac{1}{z-2}$,

故只需将 $\dfrac{1}{z-2}$ 在D_1 内展成形如 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-1)^n$ 的罗朗级数即可.

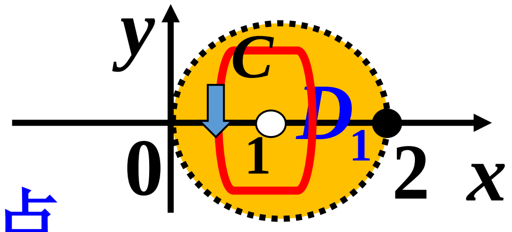
1) 考虑 $D_1 \triangleq \{z \mid 0 < |z-1| < 1\}$.

因 $f(z)=\dfrac{1}{z-1}\cdot\dfrac{1}{z-2}$，故只需将 $\dfrac{1}{z-2}$ 在 D_1 内展成形如 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-1)^n$ 的罗朗级数即可.

由定理17(P 92)知，$a_n=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_C \frac{1/(\zeta-2)}{(\zeta-1)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots),\quad (\square)$

其中 C 是圆环域 D_1 内任意一条围绕点1的正向简单闭路.

$1/(\zeta-2)$ 在 C 及其内部都解析.



对 n 进行讨论1是否是 $(\square)$ 中被积函数的奇点，

据此利用柯西积分公式或柯西积分定理或多联通区域柯西积分定理，

根据 $(\square)$ 计算 a_n.

具体计算参见此PPT的P55-60. #

P68习题17 试证明无界区域柯西积分公式：设 $f(z)$ 在闭路C及其外部区域 D 内解析，

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=A\neq\infty,\quad 则\quad \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta=\begin{cases}-f(a)+A, & a\in D,\\ A, & a\in C的内区域.\end{cases}$$

证明：取 $M>0$ 充分大, 使得闭路 C 完全含在圆周 $C_{a,M}$： $|\zeta-a|=M$ 内部，

记由$C_{a,M}$和C^{-}所围成的多联通区域为G, $G\subset D$. 则由条件知, $f(z)$ 在 G 内解析.

1) 若 $a\in D$, 则$a\in G$. 根据多联通区域柯西积分公式(P59定理5),

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left\{\int_{|\zeta-a|=M}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta-\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta\right\}=f(a),\quad 即\ \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta=-f(a)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta-a|=M}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta.\quad (1)$$

$$即\quad \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta-a|=M}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta-A=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta-a|=M}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta-A\cdot\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta-a|=M}\frac{1}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta-a|=M}\frac{f(\zeta)-A}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta.$$

由长大不等式,
$$\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta-a|=M}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta-A\right|=\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta-a|=M}\frac{f(\zeta)-A}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta\right|\leq\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\max\limits_{|\zeta-a|=M}|f(\zeta)-A|}{M}\cdot 2\pi M=\max_{|\zeta-a|=M}|f(\zeta)-A|.$$

因为 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=A$, 令$M\to+\infty$得 $\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{|\zeta-a|=M}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta=A$. 故 $\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta=-f(a)+A$.

P68习题17 试证明无界区域柯西积分公式：设 $f(z)$ 在闭路C及其外部区域 D 内解析，

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=A\neq\infty,\quad \text{则}\ \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta=\begin{cases}-f(a)+A, & a\in D,\\ A, & a\in C\text{的内区域}.\end{cases}$$

证明：取 $M>0$ 充分大，使得闭路 C 完全含在圆周 $C_{a,M}$：$|\zeta-a|=M$ 内部，

记由$C_{a,M}$和C^{-} 所围成的多联通区域为G，$G\subset D$. 则由条件知，$f(z)$ 在 G 内解析.

2) 若 $a\in C$的内区域，则 $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-a}$ 在G内解析. 根据多联通区域柯西积分定理(P55 定理3)，

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{|\zeta-a|=M}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta-\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta\right\}=0,\quad \text{即}\ \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=M}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta. \quad (2)$$

由1)，根据 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=A$， 可以证明：$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\zeta-a|=M}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta=A.$

$$\text{故}\ \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta=A.\quad \#$$

作业：P103-105

3(7)($\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}$ 仿照P89例10，待定系数法)

(8) $\left(\begin{array}{l}\text{注意：}\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\cdots\text{，故}\frac{z}{(1-z)^2}=z\cdot\_\_\_\_\_\_.\quad(**)\\ \text{然后先求}\frac{1}{1-z}\text{的展开，再逐项求导，最后代入}(**).\end{array}\right)$

8(利用m级零点定义及泰勒展开的系数公式，参考此PPT 的51 页)

9(参考此PPT的第17页)

10(1) $\left(\text{提示：先将}\frac{1}{1-z}\text{展开为级数，再乘以}\frac{1}{z^2}\text{后化简；}\right)$

11(1)(2)(3)

附：常见函数的泰勒展开式

1) $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \quad |z| < \infty.$

2) $\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad |z| < \infty.$

3) $\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad |z| < \infty.$

4) $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots, \quad |z| < 1.$

5) $\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + \cdots, \quad |z| < 1.$

6) $\mathrm{Ln}_k(1+z) = 2k\pi \mathrm{i} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} = 2k\pi \mathrm{i} + z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} - \cdots,$

$k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \cdots, \quad |z| < 1.$

例10(P 89). 求 $\sec z$ 在 $z=0$ 的泰勒展开(计算到第五项) .(到 z^4 项)

解 (1) $\sec z=\dfrac{1}{\cos z}$. 由 $\cos z=0$ 解得奇点 $z=\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

离 $z=0$ 最近的奇点为 $\pm\dfrac{\pi}{2}$，故 $R=\left|0\mp\dfrac{\pi}{2}\right|=\dfrac{\pi}{2}$. 故 $\sec z$ 在 $|z|<\dfrac{\pi}{2}$ 内解析.

(2) $\sec z$ 是偶函数, 由 $\sec z=\sec(-z)$ 可证它泰勒展式奇次幂项系数为0, 即

$\sec z=a_0+a_2z^2+a_4z^4+\cdots+a_{2n}z^{2n}+\cdots=\dfrac{1}{\cos z}$. 两边乘以分母 $\cos z$, 得

$$1=(\cos z)\left(a_0+a_2z^2+a_4z^4+\cdots\right)$$

$$=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\right)\left(a_0+a_2z^2+a_4z^4+\cdots\right)\ \text{(利用P 78定理4)}$$

$$=a_0+\left(a_2z^2-\frac{z^2}{2!}\cdot a_0\right)+\left\{a_4z^4-\frac{z^2}{2!}\cdot\left(a_2z^2\right)+\frac{z^4}{4!}\cdot a_0\right\}+\cdots$$

$$=a_0+\left(a_2-\frac{1}{2!}a_0\right)z^2+\left(a_4-\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{4!}a_0\right)z^4+\cdots.$$ 比较两边系数得

$$\sec z = a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots + a_{2n} z^{2n} + \cdots = \frac{1}{\cos z}.$$ 乘以分母得

$$1 = (\cos z)\left(a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots\right)$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right)\left(a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots\right)$$ (利用P 78定理4)

$$= a_0 + \left(a_2 - \frac{1}{2!}a_0\right)z^2 + \left(a_4 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4!}a_0\right)z^4 + \cdots.$$ 比较两边系数得

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_2 - \frac{1}{2}a_0 = 0, \\ a_4 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4!}a_0 = 0. \end{cases}$$ 解之得 $$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_2 = \frac{1}{2}, \\ a_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4!} = \frac{5}{4!}. \end{cases}$$

故 $\sec z = 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{5}{4!}z^4 + \cdots, \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$ #

求解析函数$f(z)$在$z=a$的泰勒展开方法

- 令$w=z-a$, 则$f(z)=f(w+a)$,

然后利用e^w，$\cos w$，$\sin w$，$\frac{1}{1-w}$在$w=0$的泰勒展式;

(1)当$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$为有理分式时，$P(z)$和$Q(z)$为z的多项式，

先求解分母等于0的根, 得奇点, 据此求收敛半径R和收敛圆;

然后与实函数类似, 对有理式进行分解，再求泰勒展开.

(2) 对于$f(z)=C(z-a)^m\psi(z)$, C是非零复常数, $(m=0,\pm1,\pm2,\ldots)$:

先将$\psi(z)$在$z=a$展开，最后两边再乘以$C(z-a)^m$.

(3) 若 $f(z)=C(z-a)^m g'(z)$, C是非零复常数, $(m=0,\pm1,\pm2,\ldots)$, 则

先将$g(z)$在$z=a$泰勒展开, 再关于z逐项求导，最后乘以$C(z-a)^m$.

(4) 在收敛圆内，若$F'(z)=g(z)$, $F(z)=\int_{z_0}^{z}g(z)\,dz+F(z_0)$,

将$g(z)$在$z-a$泰勒展开, 再逐项关于z求积分得$F(z)$的展式.

(5) 待定系数法

$\boxed{\text{由例10(P 89)知}}$ 求解析函数 $f(z)$ 在 $z=a$ 的泰勒展式方法

(5) 待定系数法：可以展开到指定的第n项, 即展开到$(z-a)^{n-1}$项.

设 $f(z)=\dfrac{h(z)}{g(z)}$, (#) 若$h(z)$, $g(z)$都易在$z=a$展开为幂级数：

分子$h(z)=h_0+h_1(z-a)+h_2(z-a)^2+\cdots+h_{n-1}(z-a)^{n-1}+\cdots$,

分母 $g(z)=g_0+g_1(z-a)+g_2(z-a)^2+\cdots+g_{n-1}(z-a)^{n-1}+\cdots$.

设 $f(z)=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots+a_{n-1}(z-a)^{n-1}+\cdots$, (&)

a_k都待定. (#)两边乘以分母得, $h(z)=f(z)g(z)$, 故

$$h_0+h_1(z-a)+h_2(z-a)^2+\cdots+h_{n-1}(z-a)^{n-1}+\cdots,$$

$$=\left\{a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots+a_{n-1}(z-a)^{n-1}+\cdots\right\}\left\{g_0+g_1(z-a)+g_2(z-a)^2+\cdots+g_{n-1}(z-a)^{n-1}+\cdots\right\}$$

$$=a_0g_0+(a_0g_1+a_1g_0)(z-a)\ +\left\{a_0g_2+a_1g_1+a_2g_0\right\}(z-a)^2+\cdots$$

$$+\left\{a_0g_{n-1}+a_1g_{n-2}+a_2g_{n-3}+\cdots+a_{n-1}g_0\right\}(z-a)^{n-1}+\cdots$$ (利用P 78定理4)

比较上式两边前n 项系数得关于$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 的方程组：

$a_0g_0=h_0$, $a_0g_1+a_1g_0=h_1$, ..., $a_0g_{n-1}+a_1g_{n-2}+a_2g_{n-3}+\cdots+a_{n-1}g_0=h_{n-1}$.

解之得 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$, 代入(&), 得$f(z)$ 在 $z=a$ 的泰勒展式.

在用待定系数法求 $f(z)=\dfrac{h(z)}{g(z)}$ 在 $z=0$ 的直到第 n 项的泰勒展式，

可以先利用 $f(z)$ 的奇偶性，简化 $f(z)$ 的初设泰勒展开式：

在 $|z-a|<R$ (收敛半径) 内，

(1)若 $f(z)$ 是偶函数，即 $f(z)=f(-z)$，则

$$f(z)=\frac{1}{2}\{f(z)+f(-z)\}=a_0+a_2z^2+a_4z^4+\cdots+a_{2n}z^{2n}+\cdots$$ (只剩偶次项).

(2) 若 $f(z)$ 是奇函数，则 $f(z)=-f(-z)$，则

$$f(z)=\frac{1}{2}\{f(z)-f(-z)\}=a_1z+a_3z^3+a_5z^5+\cdots+a_{2n+1}z^{2n+1}+\cdots$$ (只剩奇次项).

例. 将 $\dfrac{z-1}{(3+iz)^2}$ 在 $z=1$ 展开为幂级数. (P103页3(8)仿照此例.)

解 由 $(3+iz)^2=0$ 解得奇点 $z=-\dfrac{3}{i}=3i$, 故 $R=|1-3i|=(\sqrt{10})$.

(1)因 $\left(\dfrac{1}{3+iz}\right)'=-\dfrac{i}{(3+iz)^2}$, 故 $\dfrac{z-1}{(3+iz)^2}=i(z-1)\cdot\left(\dfrac{1}{3+iz}\right)'$.

在 $|z-1|<(\sqrt{10})$ 内, 令 $w=z-1$, 则 $|w|<(\sqrt{10})$,

$$\frac{1}{3+iz}=\frac{1}{3+i+iw}=\frac{1}{3+i}\cdot\frac{1}{1+\frac{iw}{3+i}}=\frac{1}{3+i}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{i}{3+i}\right)^n(z-1)^n.$$

$\left|\dfrac{iw}{3+i}\right|<1.$

(2) 逐项求导得 $\left(\dfrac{1}{3+iz}\right)'=\dfrac{1}{3+i}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\dfrac{i}{3+i}\right)^n n(z-1)^{n-1}.$

故 $\dfrac{1}{(3+iz)^2}=i(z-1)\cdot\left(\dfrac{1}{3+iz}\right)'=-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\dfrac{i}{3+i}\right)^{n+1}n(z-1)^n=\cdots$(系数化简). #

分母带平方:先分子换成1,分母去外层平方,展开,再逐项求导.

例. 将 $\dfrac{1}{(3+iz)^2}$ 在$z=1$展开为幂级数. (习题103页3(8)可仿照类似此例.)

解 由$(3+iz)^2=0$解得奇点 $z=-\dfrac{3}{i}=3i$, 故$R=|1-3i|=(\sqrt{10})$.

(1)因$\left(\dfrac{1}{3+iz}\right)'=-\dfrac{i}{(3+iz)^2}$, 故 $\dfrac{1}{(3+iz)^2}=i\cdot\left(\dfrac{1}{3+iz}\right)'\cdot$

在$|z-1|<(\sqrt{10})$内, 令$w=z-1$, 则$z=1+w$, $|w|<(\sqrt{10})$,

$$\frac{1}{3+iz}=\frac{1}{3+i+iw}=\frac{1}{3+i}\cdot\frac{1}{1+\frac{iw}{3+i}}=\frac{1}{3+i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n i^n w^n}{(3+i)^n}.$$

$\boxed{\left|\dfrac{iw}{3+i}\right|<1.}$

(2) 逐项求导得

$$\left(\frac{1}{3+iz}\right)'=\frac{1}{3+i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\frac{(-1)^n i^n (z-1)^n}{(3+i)^n}\right\}'=\sum_{n=1}\frac{(-1)^n i^n}{(3+i)^{n+1}}n(z-1)^{n-1}.$$

$$故\ \frac{1}{(3+iz)^2}=i\cdot\left(\frac{1}{3+iz}\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n i^{n+1}}{(3+i)^{n+1}}n(z-1)^{n-1}=$$

$\boxed{令n-1=m}$

(1)因 $\left(\frac{1}{3+iz}\right)' = -\frac{1}{(3+iz)^2}\cdot i$， 故 $\frac{1}{(3+iz)^2} = i\cdot\left(\frac{1}{3+iz}\right)'$.

在收敛圆 $|z-1|<(\sqrt{10})$ 内，令 $w=z-1$，则 $|w|<(\sqrt{10})$，$z=w+1$，

$$\frac{1}{3+iz} = \frac{1}{3+i+iw} = \frac{1}{3+i}\cdot\frac{1}{1+\frac{iw}{3+i}} = \frac{1}{3+i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n i^n w^n}{(3+i)^n}.$$ 求导得

(2) $$\left(\frac{1}{3+iz}\right)' = \frac{1}{3+i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\frac{(-1)^n i^n (z-1)^n}{(3+i)^n}\right\}' = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n i^n}{(3+i)^{n+1}} n(z-1)^{n-1}.$$

$$\frac{1}{(3+iz)^2} = i\cdot\left(\frac{1}{3+iz}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n i^{n+1}}{(3+i)^{n+1}} n(z-1)^{n-1}$$

$\boxed{令 n-1=m}$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{m+1} i^{m+2}}{(3+i)^{m+2}}(m+1)(z-1)^m = -\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{-i}{3+i}\right)^{m+2}(m+1)(z-1)^m$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{10}-\frac{3}{10}i\right)^{n+2}(n+1)(z-1)^n,\quad |z-1|<(\sqrt{10}).\quad \#$$

例. 将$\dfrac{z}{(3+\mathrm{i}z)^2}$的展开为$z$ 的幂级数. (P103页3(8)仿照此例.)

(展开点为0)

解 由$(3+\mathrm{i}z)^2=0$解得唯一奇点$z=-\dfrac{3}{\mathrm{i}}=3\mathrm{i}$，$R=|0-3\mathrm{i}|=3$.

(1)先将$g(z)\triangleq\dfrac{1}{(3+\mathrm{i}z)^2}$展开为$z$ 的幂级数.

因$\left(\dfrac{1}{3+\mathrm{i}z}\right)'=-\dfrac{\mathrm{i}}{(3+\mathrm{i}z)^2}$，故先将$\dfrac{1}{3+\mathrm{i}z}$展开.

$$\frac{1}{3+\mathrm{i}z}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{\mathrm{i}}{3}z}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{\mathrm{i}z}{3}\right)^n,\quad |z|<3.$$ 两边求导得

$$-\frac{\mathrm{i}}{(3+\mathrm{i}z)^2}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{\mathrm{i}}{3}\right)n\left(-\frac{\mathrm{i}z}{3}\right)^{n-1},\quad |z|<3.$$ 整理得

$$\frac{1}{(3+\mathrm{i}z)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{9}n\left(-\frac{\mathrm{i}z}{3}\right)^{n-1},\quad |z|<3.$$

$$-\frac{\mathrm{i}}{(3+\mathrm{i}z)^2}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{\mathrm{i}}{3}\right)n\left(-\frac{\mathrm{i}z}{3}\right)^{n-1},\ |z|<3.$$ 整理得

$$\frac{1}{(3+\mathrm{i}z)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{9}n\left(-\frac{\mathrm{i}z}{3}\right)^{n-1},\ |z|<3.$$

(2) $$\frac{z}{(3+\mathrm{i}z)^2}=z\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{9}n\left(-\frac{\mathrm{i}z}{3}\right)^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{9}n\left(-\frac{\mathrm{i}}{3}\right)^{n-1}z^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mathrm{i}^{n-1}n}{3^{n+1}}z^n,\ |z|<3.\ \#$$

例. 将 $\dfrac{z}{(3+\mathrm{i}z)^2}$ 在 $z=1$ 展开为幂级数.

解 由 $(3+\mathrm{i}z)^2=0$ 解得奇点 $z=-\dfrac{3}{\mathrm{i}}=3\mathrm{i}$, 故 $R=|3\mathrm{i}-1|=(\sqrt{10})$.

(1)因 $\left(\dfrac{1}{3+\mathrm{i}z}\right)'=-\dfrac{1}{(3+\mathrm{i}z)^2}\cdot\mathrm{i}$, 故 $\dfrac{z}{(3+\mathrm{i}z)^2}=\mathrm{i}z\cdot\left(\dfrac{1}{3+\mathrm{i}z}\right)'$.

在收敛圆 $|z-1|<(\sqrt{10})$ 内, 令 $w=z-1$, 则 $z=w+1$,

$$\frac{1}{3+\mathrm{i}z}=\frac{1}{3+\mathrm{i}+\mathrm{i}w}=\frac{1}{3+\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{1+\frac{\mathrm{i}w}{3+\mathrm{i}}}=\frac{1}{3+\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\mathrm{i}^n w^n}{(3+\mathrm{i})^n}.$$

逐项求导得

$$\left(\frac{1}{3+\mathrm{i}z}\right)'=\frac{1}{3+\mathrm{i}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\mathrm{i}^n n w^{n-1}}{(3+\mathrm{i})^n}\cdot\frac{dw}{dz}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-\mathrm{i})^n}{(3+\mathrm{i})^{n+1}}n(z-1)^{n-1}.$$

(1)因$\left(\frac{1}{3+iz}\right)' = -\frac{1}{(3+iz)^2}\cdot i$，故$\frac{z}{(3+iz)^2} = iz\cdot\left(\frac{1}{3+iz}\right)'$.

在收敛圆$|z-1|<(\sqrt{10})$内，令$w=z-1$,则 $z=w+1$,

$$\frac{1}{3+iz} = \frac{1}{3+i+iw} = \frac{1}{3+i}\cdot\frac{1}{1+\frac{iw}{3+i}} = \frac{1}{3+i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n i^n w^n}{(3+i)^n}.$$

(2) 逐项求导得

$$\left(\frac{1}{3+iz}\right)' = \frac{1}{3+i}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n i^n n w^{n-1}}{(3+i)^n}\cdot\frac{dw}{dz} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-i)^n}{(3+i)^{n+1}}n(z-1)^{n-1}.$$

$$\frac{z}{(3+iz)^2} = iz\cdot\left(\frac{1}{3+iz}\right)' = i\{(z-1)+1\}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-i)^n}{(3+i)^{n+1}}n(z-1)^{n-1}$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-i)^{n+1}}{(3+i)^{n+1}}n(z-1)^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-i)^{n+1}}{(3+i)^{n+1}}n(z-1)^{n-1}$$

$\boxed{n-1=m}$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-i)^{n+1}}{(3+i)^{n+1}}n(z-1)^n - \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-i)^{m+2}}{(3+i)^{m+2}}(m+1)(z-1)^m$$

$$\frac{z}{(3+\mathrm{i}z)^2} = \mathrm{i}z\cdot\left(\frac{1}{3+\mathrm{i}z}\right)' = \mathrm{i}\{(z-1)+1\}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-\mathrm{i})^n}{(3+\mathrm{i})^{n+1}}n(z-1)^{n-1}$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-\mathrm{i})^{n+1}}{(3+\mathrm{i})^{n+1}}n(z-1)^n - \underline{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-\mathrm{i})^{n+1}}{(3+\mathrm{i})^{n+1}}n(z-1)^{\underline{n-1}}} \qquad \boxed{n-1=m}$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\mathrm{i})^{n+1}}{(3+\mathrm{i})^{n+1}}n(z-1)^n - \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-\mathrm{i})^{m+2}}{(3+\mathrm{i})^{m+2}}(m+1)(z-1)^m$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\mathrm{i})^{n+1}}{(3+\mathrm{i})^{n+1}}n(z-1)^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\mathrm{i})^{n+2}}{(3+\mathrm{i})^{n+2}}(n+1)(z-1)^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\mathrm{i})^{n+1}\{n(3+\mathrm{i})-\mathrm{i}(n+1)\}}{(3+\mathrm{i})^{n+2}}(z-1)^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\mathrm{i})^{n+1}(3n-\mathrm{i})}{(3+\mathrm{i})^{n+2}}(z-1)^n. \quad \#$$

例 $f(z)=z^2+z^3$ 有零点$z_1=0$, $z_2=-1$, 它们是几级零点?

解 1)在$z=0$的泰勒展式是自身$f(z)=z^2+z^3$,

故$z=0$ 是$f(z)$的二级零点.

2)在$z=-1$ 的泰勒展式:

$$f(z)=z^2+z^3=\{(z+1)-1\}^2+\{(z+1)-1\}^3$$

$$=\{(z+1)^2-2(z+1)+1\}+\{(z+1)^3-3(z+1)^2+3(z+1)-1\}$$

$$=(z+1)-2(z+1)^2+(z+1)^3.$$

故$z=-1$是$f(z)$的一级零点.

若存在$m\in\mathbb{Z}^+$, 使得 $a_1=a_2=\cdots=a_{m-1}=0$,

但是$a_m\neq 0$, 即在 z_0 邻域U 内,

$$f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots+a_{m+p}(z-z_0)^{m+p}+\cdots,$$

则称 z_0 是 $f(z)$ 的m 级零点.

定理14,15(P 90) z_0 是解析函数$f(z)$的m 级零点的充要条件是：

1) $f(z_0)=f'(z_0)=f''(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0,\ \ f^{(m)}(z_0)\neq 0.$ 熟记

2)在z_0某个邻域U内 $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, $g(z)$在 z_0 解析且 $g(z_0)\neq 0.$

由定理14(P 90)和定理12(P 85)得

若z_0 是解析函数$f(z)$的n 级零点, 则 $f^{(n)}(z_0)\neq 0,$

$$f(z)=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z-z_0)^{n+1}+\cdots.$$

$$\Downarrow$$

(P 104第8题). 若z_0为解析函数$f(z)$的至少n 级零点, 为$g(z)$的n 级零点,

$$\text{则}\ \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\cdots}{\frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\cdots}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{g^{(n)}(z_0)}.\ \#$$

利用定理15(P 90)，可以求解 P 104 的第9题.

定理17(P 92) 设$f(z)$在圆环域 $D: r<|z-a|<R$ 内解析， 则$\forall z\in D$,

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n,\quad a_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

C 是圆环域D内任一条围绕点a的逆时针方向简单闭路.

罗朗展开定理17(P 92) 的证明：

(1) 灵活应用复闭路上的柯西积分公式和柯西积分定理；

(2) 当$|z|<1$时，$\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$. (P 79例2)

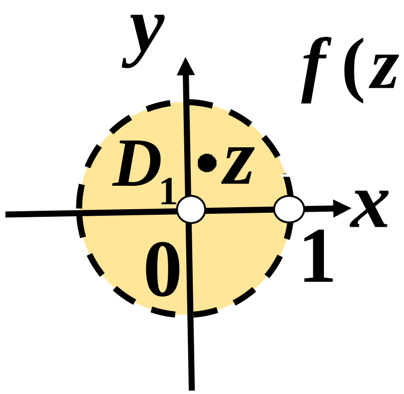
- 设$f(z)$在 圆环域$D: r<|z-a|<R$ 内解析,

则$f(z)$在D内的罗朗展式是唯一的.

例 将$f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$ 在圆环域 1) $0<|z|<1$; 2) $1<|z|<+\infty$ 内展成级数.

解 $f(z)$只有两个奇点0和1. 1)在圆环域D_1：$0<|z|<1$内解析，

故由定理17，$f(z)$在D_1 内可展成形如 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ 的罗朗级数.



$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} z^n=\sum_{n=0}^{+\infty} z^{n-1}$$

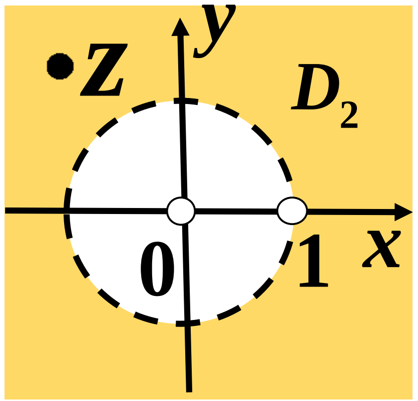
$$=\sum_{m=-1}^{+\infty} z^m,\quad 0<|z|<1.\qquad \left(\begin{array}{l} m=n-1, \\ n=0\text{时}, m=-1. \end{array}\right)$$

例 将$f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$在圆环域 1) $0<|z|<1$; 2) $1<|z|<+\infty$; 内展成级数.

解 $f(z)$只有两个奇点0和1.

2) $f(z)$在圆环域$\underline{D_2: 1<|z|<+\infty}$内解析,

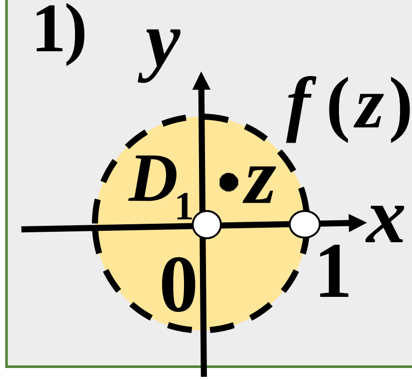
故由定理17(P92)，$f(z)$ 在D_2 内可展成形如 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ 的罗朗级数.



$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}\cdot\left(-\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+2}}=-\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{1}{z^m},\quad 1<|z|<+\infty.\quad \left(\begin{aligned}&m=n+2,\\&n=0\text{时}，\ m=2.\end{aligned}\right)$$

1)



$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}z^{n-1}=\sum_{m=-1}^{+\infty}z^m,\ 0<|z|<1.$$

$$(m=n-1,\ \ n=0\text{时},\ m=-1.)$$

例12(P 94) 求 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ $\begin{cases}1)\text{在点}z=1\text{的罗朗展开;}\\2)\text{在}D:2<|z|<+\infty\text{的罗朗展开.}\end{cases}$

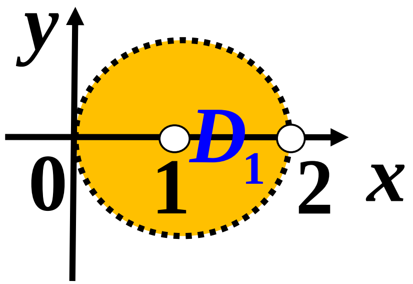
解法1 用直接法.

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)},\quad \text{只有两奇点}\begin{cases}z_1=1,\\z_2=2.\end{cases}$$

1) 考虑$D_1 \triangleq \{z \mid 0<|z-1|<1\}$. • 先注意圆环域中心和函数解析性.

D_1 是以1为中心的圆环域. $f(z)$在D_1 内解析,

故由定理17(P92)知，在D_1 内可展为



$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_n(z-1)^n.\quad \text{因 } f(z)=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z-2},$$

故只需将$\dfrac{1}{z-2}$在D_1 内展成形如$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-1)^n$ 的罗朗级数即可.

1) 考虑$D_1 \triangleq \{z \mid 0<|z-1|<1\}$.

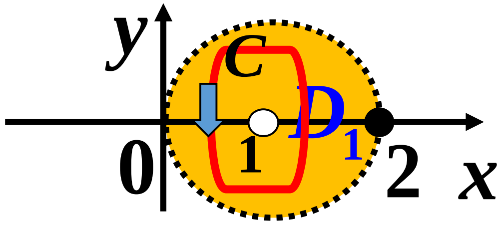
因 $f(z)=\dfrac{1}{z-1}\cdot\dfrac{1}{z-2}$，故只需将$\dfrac{1}{z-2}$在$D_1$ 内展成形如 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-1)^n$ 的罗朗级数即可.

由定理17(P 92)知，$a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \dfrac{1/(\zeta-2)}{(\zeta-1)^{n+1}}\,d\zeta$，$(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，

其中C是圆环域 D_1内任意一条围绕点1的正向简单闭路.

$1/(\zeta-2)$在C及其内部都解析，故

(1) 当$n+1\geq1$,即$n\geq0$时, 由柯西积分公式知，



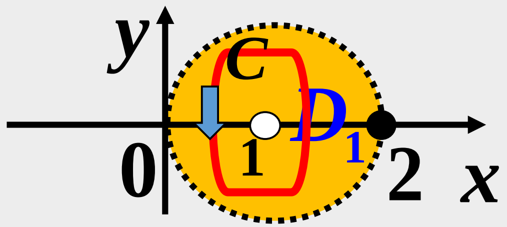
$$a_n=\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{\zeta-2}\right)^{(n)}\Bigg|_{\zeta=1}=\frac{(-1)^n}{(\zeta-2)^{n+1}}\Bigg|_{\zeta=1}=\frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}}=-1.$$

(2) 当$n+1\leq0$, $n\leq-1$ 时，$\dfrac{1/(\zeta-2)}{(\zeta-1)^{n+1}}$在$C$及其内部解析, $a_n=0$ (柯西积分定理(P 54 定理2)).

因此$\dfrac{1}{z-2}=-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n$，$f(z)=\dfrac{1}{z-1}\cdot\dfrac{1}{z-2}=-\dfrac{1}{z-1}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n=-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{n-1}$

(1) 当$n+1\ge 1$,即$n\ge 0$时, 由柯西积分公式知,

$$a_n=\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{\zeta-2}\right)^{(n)}\Bigg|_{\zeta=1}=\frac{(-1)^n}{(\zeta-2)^{n+1}}\Bigg|_{\zeta=1}=\frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}}=-1.$$



(2) 当$n+1\le 0$, $n\le -1$ 时, $\dfrac{1/(\zeta-2)}{(\zeta-1)^{n+1}}$在$C$及其内部解析, $a_n=0$ (柯西积分定理(P54定理2)).

因此 $\dfrac{1}{z-2}=-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n$,

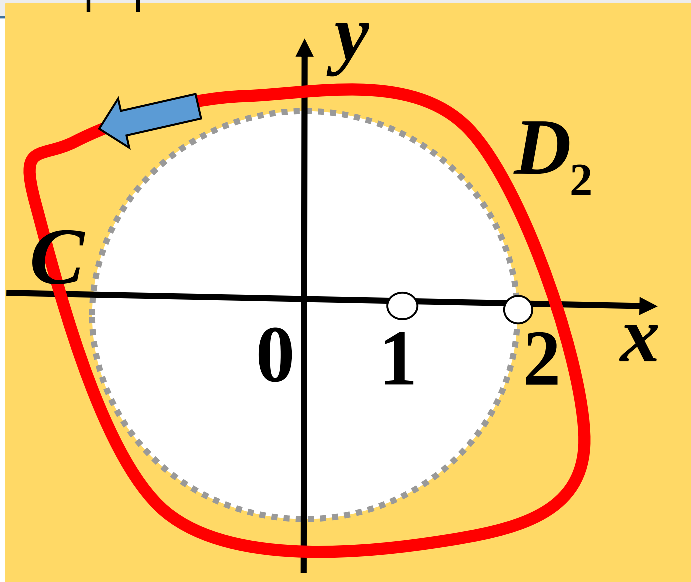
$$f(z)=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{n-1}$$

(令$n-1=m$,
$n=0$时, $m=-1$.)

$$=-\sum_{m=-1}^{+\infty}(z-1)^m,\qquad 0<|z-1|<1.$$

例12(P 94) 求 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ $\begin{cases} 1)\text{在点}z=1\text{的罗朗展开;} \\ 2)\text{在}D:2<|z|<+\infty\text{的罗朗展开.}\end{cases}$

2)考虑$D=\{z \mid 2<|z|<+\infty\}$. 直接法.



- 先注意圆环域中心和函数解析性.

D是以0为中心的圆环域. $f(z)$在D内解析,

故由定理17(P 92)知，在D 内可展开为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n,\quad b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{(\zeta-1)(\zeta-2)}\cdot\frac{1}{\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad n\in\mathbb{Z},$$

其中C 是圆环域 D内任意一条围绕点0的正向简单闭路.

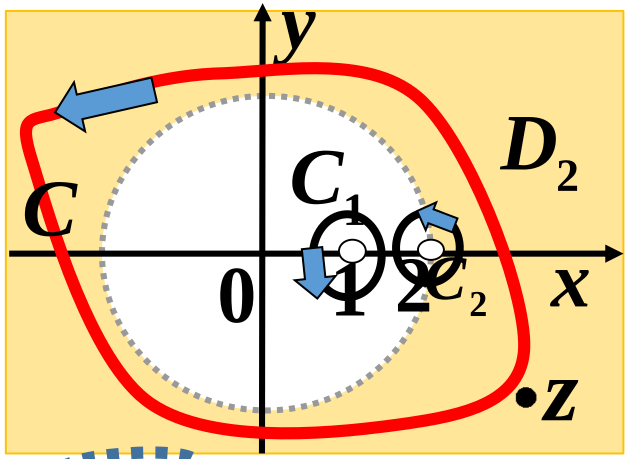
b_n计算复杂.

(当n较大时,0,1,2都是奇点，若直接用第三章定理3 和定理6 求b_n,
需计算$\{1/((\zeta-1)(\zeta-2))\}^{(n)}$,不方便.)

(1)当 $n \ge -2$ 时，由P68习题17，因点0在C 的内部，故

$$b_n = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{(z-1)(z-2)z^n} = \begin{cases} \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{z}\right)\left(1-\frac{2}{z}\right)} = 1, & n=-2, \\ 0, & n>-2. \end{cases}$$

有界



(2)当 $n < -2$ 时，$\zeta = 0$ 不再是奇点.

此时被积函数只有两个奇点：1 和2.

由复闭路柯西积分定理(P55定理3)知

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{1}{(\zeta-1)(\zeta-2)\zeta^{n+1}}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta-1)(\zeta-2)}d\zeta$$ (柯西积分公式)

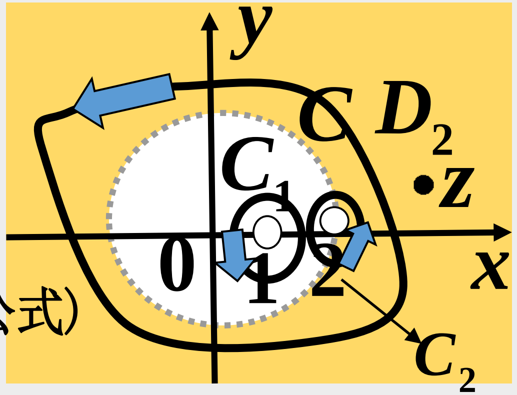
$$= \frac{1}{(\zeta-2)\zeta^{n+1}}\bigg|_{\zeta=1} + \frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta-1)}\bigg|_{\zeta=2} = -1 + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

其中 C_1 是 C 内围绕奇点 1 半径充分小的不含点0 和2 的正向圆周，

C_2 是 C 内围绕 奇点 2 半径充分小的不含点0 和1 的正向圆周.

(1)当 $n \geq -2$ 时，由P68习题17得，$b_n = \begin{cases} 1, & n=-2, \\ 0, & n>-2. \end{cases}$

(2)当 $n<-2$ 时，由复闭路柯西积分定理知



$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{1}{(\zeta-1)(\zeta-2)\zeta^{n+1}}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta-1)(\zeta-2)}d\zeta$$

(柯西积分公式)

$$= \frac{1}{(\zeta-2)\zeta^{n+1}}\bigg|_{\zeta=1} + \frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta-1)}\bigg|_{\zeta=2} = -1+\frac{1}{2^{n+1}}.$$

其中 C_1 是 C 内围绕奇点 1 半径充分小的不含点0 和2 的正向圆周，

C_2 是 C 内围绕 奇点 2 半径充分小的不含点0 和1 的正向圆周.

$$故\ f(z) = z^{-2} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-3}\left(-1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n}_{(n\Rightarrow -n)} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=3}^{+\infty}\left(-1+\frac{1}{2^{-n+1}}\right)z^{-n}$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{-1+2^{n-1}}{z^n} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2^{n-1}-1}{z^n},\quad 2<|z|<+\infty.\ \#$$

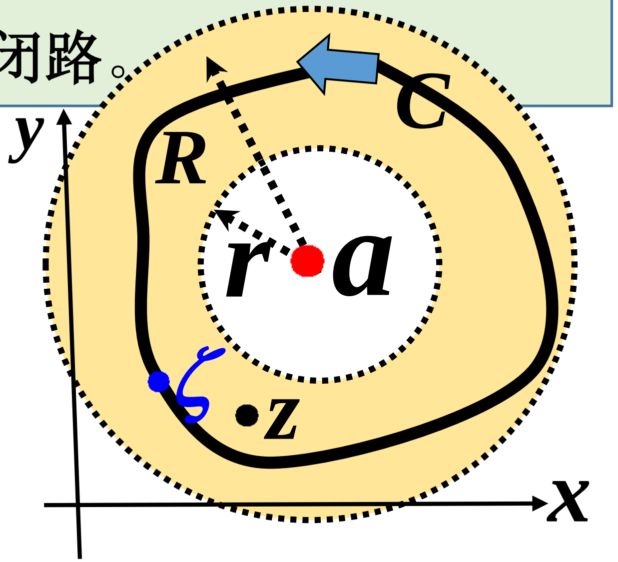
圆环域内解析函数的罗朗展开定理

定理(P84) 设$f(z)$在圆环域D：$r<|z-a|<R$ 内解析，

$\forall z\in D$,

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n,\quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

C 是环域D内任一条围绕点 a 的逆时针方向简单闭路。



- 设$f(z)$在 D：$r<|z-a|<R$ 内解析，

  则 $f(z)$ 在D内的罗朗展式是唯一的.

即同一函数在同一圆环域内罗朗展开式唯一.

注：因$z=a$可能是$f(z)$的奇点，

故$f(z)$在$z=a$可能不解析或无意义，

故不能在洛朗展式及其逐项求导所得等式里取$z=a$ 求出所有a_n推出唯一性.

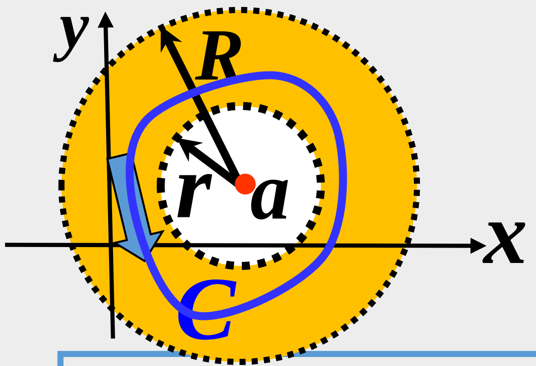
求圆环域内解析函数的罗朗展开式

(1) 直接展开法

设 $f(z)$ 在圆环域D：$r<|z-a|<R$ 内解析,

直接利用定理17(P92)中的公式计算系数 a_n：

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots \quad (\#)$$



此方法计算复杂.

C 是圆环域D内任一条围绕点a的逆时针方向简单闭路

比如, 取 C: $|z-a|=\frac{r+R}{2}$, 求出a_n. 然后, $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n$.

注意：若在闭圆 $|z-a|\le r$上 $f(z)$有奇点, 则

当$n\le -1$, $n+1\le 0$时, 不能直接由柯西积分定理得 $a_n=0$;

当$n\ge 0$时, 不能直接由柯西积分公式得 $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)$.