概率论与数理统计 B 提纲

1.概率：随机现象的数量度量，即由总体概率分布推知样本。
统计：从样本经统计分析推断整体。

2.古典概型：有限性、等可能性，公式为：$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$。

3.①多组组合模式：有 n 个不同元素，把它们分为 k 个不同的组，使得各组依次有 $n_1,n_2,...,n_k$ 个不同元素。

②不尽相异元素的排列模式：有 n 个元素，属于 k 个不同的类，同类元素之间不可辨认，各类元素分别有 $n_1,n_2,...,n_k$ 个，并把它们排成一列。

→以上两种模型方法数等价，均为：$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$。

4.r 个人中没有两个人生日相同的概率为：$\frac{A_{365}^r}{365^r}$(r≤365)。

5.几何概率：等可能性，公式为：$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}$。

6.Buffon 投针：针长为 L(较短)，平行线组每两条平行线间距为 D，任意投针，则针与线相交的概率为：$\frac{2L}{\pi D}$。

7.概率的公理化定义：称 P(•)为概率，如果
①设 A 为随机事件，则 0≤P(A)≤1；
②设Ω为必然事件，则 P(Ω)=1；

③若事件 $A_1,A_2,...$ 为两两不相容的事件序列，则 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$。

8.概率的基本性质

①不可能事件ϕ满足 P(ϕ)=0；

②若 $A_k\in F$，k=1,2,...,n，且两两互斥，则 $P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$；

③若 $A,B\in F$，且$A\subseteq B$，则 P(B-A)=P(B)-P(A)，且 P(A)≤P(B)；

④ $P(\overline{A})=1-P(A)$。

9.条件概率公式：$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)},P(B)\neq 0$。

→ $P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)...P(A_n|A_1A_2...A_{n-1})$。

→ $P(B|A)+P(\overline{B}|A)+P(B|\overline{A})+P(\overline{B}|\overline{A})=1$。

10.事件 A 和 B 相互独立：P(AB)=P(A)P(B)。

→性质：$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)$，$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$。

11.事件 $A_1,A_2,...,A_n$ 相互独立：$P(\widetilde{A}_1\widetilde{A}_2...\widetilde{A}_n)=P(\widetilde{A}_1)P(\widetilde{A}_2)...P(\widetilde{A}_n)\Leftrightarrow\forall k,P(A_{i1}A_{i2}...A_{ik})=P(A_{i1})P(A_{i2})...P(A_{ik})$，

其中，$\widetilde{A}_i$表示A_i或$\overline{A}$,$\{A_{i1},A_{i2},...,A_{ik}\}\subseteq\{A_1,A_2,...,A_n\}$。

→ $A_1,A_2,...,A_n$ 两两独立是相互独立的必要不充分条件。

12.全概率公式：$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$，其中$\{B_1,B_2,...,B_n\}$是样本空间Ω的一个分割，且 $P(B_i)>0$。

13.贝叶斯公式：$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)},P(A)\neq 0$，其中，$P(B_i)$称为先验概率，$P(B_i|A)$称为后验概率。

14.常见分布类型
①单变量离散分布

分布类型	符号	分布律	定义域	备注
Bernonlli	Bern(p)	P(X=1)=p	$\{0,1\}$	无
二项分布	B(n,p)	$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$	$\{0,1,...,n\}$	n 的再生性
几何分布	G(p)	$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$	$\{1,2,...\}$	无记忆性
负二项分布	NB(r,p)	$P(X=k)=C_{k-1}^{r-1}p^r(1-p)^{k-r}$	$\{r,r+1,...\}$	第 k 次时恰成功了 r 次 r 的再生性
泊松分布	P(λ)	$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	$\{0,1,...\},\lambda>0$	再生性 $C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}\to\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},np_n\to\lambda,n\to\infty$
均匀分布	U(n)	$P(X=k)=\frac{1}{n}$	$\{1,2,...,n\}$	无

②单变量连续分布

分布类型	符号	概率密度函数	定义域	备注
单变量正态分布	$N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\Re$	再生性 标准化：$\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$
指数分布	Exp(λ)	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$	$(0,+\infty)$	无记忆性 失效率 h(x)≡λ 泊松过程中的时间间隔
均匀分布	U(a,b)	$f(x)=\frac{1}{b-a}$	(a,b)	无

③多变量离散分布

分布类型	符号	分布率
多项分布	$M(N;p_1,...,p_n)$	$P(X_1=k_1,...,X_n=k_n)=\frac{N!}{k_1!...k_n!}p_1^{k_1}...p_n^{k_n}$

④多变量连续分布

分布类型	符号	分布率
双变量正态分布	$N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$	$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right]}$

⑤三大分布

分布类型	条件	定义	备注
χ^2 分布	$X_1,...,X_n,i.i.d\sim N(0,1)$	$Y=\sum_{i=1}^n X_i^2\sim\chi_n^2$	不对称 $\chi_n^2+\chi_m^2=\chi_{n+m}^2$(再生性)
t 分布	$X_1\sim N(0,1),X_2\sim\chi_n^2$，且$X_1$与$X_2$独立	$Y=\frac{X_1}{\sqrt{X_2/n}}\sim t_n$	对称 $n\to\infty$时为$N(0,1)$
F 分布	$X_1\sim\chi_n^2,X_2\sim\chi_m^2$，且$X_1$与$X_2$独立	$Y=\frac{X_1/n}{X_2/m}\sim F_{n,m}$	不对称 $\frac{1}{Y}\sim F_{m,n}$ $F_{m,n}(1-\alpha)=\frac{1}{F_{n,m}(\alpha)}$

15.边缘分布：不能决定联合分布律，其公式为：

$$\begin{cases}\text{离散型：}P(X=x_i)=\sum_{j=1}^m P_{ij}=P_i,n\times m\text{的分布律。}\\ \text{连续型：}f_X(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dv\text{。}\end{cases}$$

→ $N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 的边缘密度函数为$N(a,\sigma_1^2)$和$N(b,\sigma_2^2)$。

16.条件分布的公式为：

$$\begin{cases}\text{离散型：}P(Y=y_j|X=x_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{P_{ij}}{P_i}\text{。}\\ \text{连续型：}f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)},f_Y(y)\neq 0\text{。}\end{cases}$$

→ 若$X\sim N(a,\sigma_1^2),Y\sim N(b,\sigma_2^2)$，则$X|Y\sim N(a+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-b),(1-\rho^2)\sigma_1^2)$。

17.随机变量的相互独立：$P(X_1=x_1,...,X_n=x_n)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)\Leftrightarrow F(x_1,...,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F_i(x_i)\Leftrightarrow \underset{i=1}{\overset{n}{f}}(x_1,...,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f_i(x_i)$。

→设$(X,Y)\sim N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则 X 与 Y 相互独立的充要条件是ρ=0。

18.复合函数的分布律

①单变量复合函数

$$\begin{cases}\text{离散型：}P(g(x_i)=y)=\sum_{x_i=y}P(X=x_i)\text{。}\\ \text{单调连续型：}f_Y(y)=f_X(h(y))|h'(y)|,y=g(x),x=h(y)\text{。}\\ \text{非单调连续型：}f_Y(y)=\sum_i f_X(h_i(y))|h_i'(y)|,y\text{被单调分割为}y_i,i\in N^*\text{。}\end{cases}$$

②双变量连续复合函数

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=f_{X_1,X_2}(h_1(y_1,y_2),h_2(y_1,y_2))J\,,y_i=g_i(x_1,x_2),x_i=h_i(y_1,y_2),J=\left\|\begin{matrix}\frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2}\\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2}\end{matrix}\right\|\text{。}$$

→若$X,Y\sim N(0,1)$，且相互独立，则在极坐标系下有：$f(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\rho^2}{2}}$。

19.随机变量和与商的分布律(差与积类比)

①随机变量和的分布律

$$\begin{cases}\text{离散型：}P_{X+Y}(X+Y=n)=\sum_{i=0}^{n}P_X(X=i)P_Y(Y=n-i)\text{。}\\ \text{连续型：}f_{Z=X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(z-y,y)dy\text{，注意定义域。}\end{cases}$$

→若 X 和 Y 相互独立，则有卷积公式：$f_{Z=X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=f_X*f_Y(z)$。

→设 X~B(n,p),Y~B(m,p)，且 X 和 Y 相互独立，则 X+Y~B(n+m,p)，即体现再生性。

②随机变量商的分布律

$f_{Z=X/Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|t|f_{X,Y}(zt,t)dt,f_{Z=Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|t|f_{X,Y}(t,zt)dt$，注意定义域。

20.随机变量组极值的概率分布函数

①极大值：$F_{X_{(n)}}(x)=\prod_{i=1}^{n}F_{X_i}(x)$。　　②极小值：$F_{X_{(1)}}(x)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-F_{X_i}(x))$。

21.Cauchy 分布$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$的期望不存在。

22.常见分布期望和方差

分布类型	均值	方差
X~B(n,p)	np	np(1-p)
X~P(λ)	λ	λ
$X\sim N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2
X~U(a,b)	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
X~Exp(λ)	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$X\sim\chi_n^2$	n	2n
$X\sim t_n$	0(n≥2)	$\frac{n}{n-2}$(n≥3)
$X\sim F_{n,m}$	$\frac{m}{m-2}$(m≥3)	$\frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)(m-4)}$(m≥5)

23.期望的计算公式

①$E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}EX_i$。　　②若$X_1,...,X_n$相互独立，则$E(\prod_{i=1}^{n}X_i)=\prod_{i=1}^{n}EX_i$。

③$E(Y|X=x)=\begin{cases}\text{离散型：}\sum_{j=1}^{m}y_jP(Y=y_j|X=x)。\\ \text{连续型：}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(y|x)dy\text{，注意定义域。}\end{cases}$　　④$EX=E[E(X|Y)],Eg(x)=E[E(g(x)|Y)]$。

→设$(X,Y)\sim N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则$EXY=ab+\rho\sigma_1\sigma_2$。

24.方差的计算公式

①$Var(X)=E(X-EX)^2=EX^2-(EX)^2$。　　②若$X$和$Y$独立，则$Var(aX+bY)=a^2Var(X)+b^2Var(Y)$。

→标准化：$Y=\frac{X-EX}{\sqrt{Var(X)}}$,E(Y)=0,Var(Y)=1。

25.协方差计算公式

①Cov(X,Y)=E(X-EX)(Y-EY)=EXY-EXEY。　　②Var(X+Y)=Var(X)+2Cov(X,Y)+Var(Y)。

→Cov(X,Y)运算具有向量性质，且 Cov(X,Y)=0 是 X 和 Y 相互独立的必要不充分条件。

→设$(X,Y)\sim N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则$Cov(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2$。

26.相关系数：描述线性关系强弱的量，其公式为：$Corr(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$。

→Corr(X,Y)=0 只能说明 X 与 Y 不相关，即 Corr(X,Y)=0 是 X 和 Y 相互独立的必要不充分条件。

→正态分布 X 和 Y 的不相关性和独立性是等价的。

27.矩、偏度和峰度

①X 关于点 C(c,0)的 k 阶矩为：$E(X-c)^k$；当 c=0 时称为 k 阶原点矩，记为a_k；当 c=EX 时称为 k 阶中心矩，记为μ_k。

→样本矩类比。

②偏度系数：$\beta_1=\frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}}$(正态分布偏度为 1，越往左偏偏度数值越大)。

③峰度系数：$\beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}-3$(正态分布峰度为 0，越往高移峰度数值越大)。

27.大数定理：$\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$满足$\lim_{n\to\infty}P(|\overline{X}_n-\mu|\geq\varepsilon)=0,\forall\varepsilon>0$，记作$\overline{X}_n\xrightarrow{P}\mu$，其中$X_i i.i.d\sim(\mu,\sigma^2),i\in N^*$。

→n 重伯努利实验：频率收敛于概率。

→马尔可夫不等式：$P(X\geq\varepsilon)\leq\frac{EX}{\varepsilon},\forall\varepsilon>0$。

→切比雪夫不等式：$P(|X-EX|\geq\varepsilon)\leq\frac{Var(X)}{\varepsilon^2},\forall\varepsilon>0$。

28.中心极限定理：$\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\xrightarrow{d}N(0,1),X_i i.i.d.\sim(\mu,\sigma^2)$。

→n 重伯努利实验：$\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-np}{\sqrt{np(1-p)}}\sim N(0,1),n\to\infty,X_i i.i.d.\sim B(n,p)$。

→高尔顿板落球可形成高斯函数图样。

29.设有一总体 F，$X_1,...,X_n$为从 F 中抽取的容量为 n 的样本，若$X_1,...,X_n$相互独立，且同有分布 F，则称$(X_1,...,X_n)$为简单(随机)样本，记作$X_1,...,X_n i.i.d\sim F$。

30.统计量只能与样本有关，不能与未知参数有关。

31.经验分布函数：$F_n(x)=\{X_1,...,X_n\text{中}\leq x\text{的个数}\}/n$。

32.箱线图的模式：最小值-下四分位数-均值-上四分位数-最大值。

33.矩估计和极大似然估计(MLE)

①矩估计：不具有唯一性，能使用低价矩处理就不使用高阶矩，常使用均值与方差估计。

②极大似然估计：在简单样本下，似然函数为：$L(x;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f_{X_i}(x_i;\theta)$；对数似然函数为：$l(x;\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln f_{X_i}(x_i;\theta)$。

③常见分布的矩估计和 MLE

分布类型	矩估计	MLE
X~B(n,p)	$\hat{n}=\frac{(\overline{X})^2}{\overline{X}-S^2},\hat{p}=1-\frac{S^2}{\overline{X}}$	$\hat{p}=\overline{X}$ (n 已知)
X~P(λ)	$\hat{\lambda}=\overline{X}$	$\hat{\lambda}=\overline{X}$
X~U(a,b)	$\hat{a}=\overline{X}-\sqrt{3}S,\hat{b}=\overline{X}+\sqrt{3}S$	$\hat{a}=X_{(1)},\hat{b}=X_{(n)}$
X~Exp(λ)	$\hat{\lambda}=\frac{1}{\overline{X}}$	$\hat{\lambda}=\frac{1}{\overline{X}}$
$X\sim N(\mu,\sigma^2)$	$\hat{\mu}=\overline{X}$，$\hat{\sigma}^2=S^2$	$\hat{\mu}=\overline{X}$，$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

34.贝叶斯估计：$h(\theta|X_1,...,X_n)=\frac{h(\theta)f_{X_1}(x_1;\theta)...f_{X_n}(x_n;\theta)}{\int h(\theta)f_{X_1}(x_1;\theta)...f_{X_n}(x_n;\theta)d\theta}$，根据$\theta$取值范围选定积分限，则有：$\hat{\theta}=E(\theta|X_1,...,X_n)$；

其中，$h(\theta)$称为先验概率密度函数，$h(\theta|X_1,...,X_n)$称为后验概率密度函数。

→设$X_1,...,X_n$是来自$B(n,p_0)$抽出的样本(n 已知)，假设 p 的先验分布为 U(0,1)，则 p 的贝叶斯估计为：

$$\hat{p}=\frac{1+\sum_{i=1}^{n}X_i}{n+2}=\frac{n}{n+2}\hat{p}_{0MLE}+\frac{2}{n+2}EP_{先验}。$$

→设$X_1,...,X_n$是来自$N(\theta_0,1)$抽出的样本，假设θ的先验分布为$N(\mu,\sigma^2)$，则θ的贝叶斯估计为：

$$\hat{\theta}=\frac{\mu+n\overline{X}\sigma^2}{1+n\sigma^2}=\frac{n\sigma^2}{1+n\sigma^2}\hat{\theta}_0+\frac{1}{1+n\sigma^2}E\theta_{先验}。$$

35.均方误差：$MSE(\hat{\theta})=E(\theta-\hat{\theta})^2=Var(\hat{\theta})+(E\hat{\theta}-\theta)^2$，即均方误差=方差+偏差。

36.无偏估计：$E(\hat{\theta})=\theta,\forall\theta\in\Theta$，则称$\hat{\theta}$为无偏估计量。

→对于任意简单样本，$\overline{X}$和S^2是μ和σ^2的无偏估计，S 不是σ的无偏估计。

→U(0,θ)的 MLE 不是无偏估计，但修正后成为无偏估计则比矩估计更有效。

→有偏估计得修正：通常是乘以一个调整因子C_n，使得修正后的估计量是无偏的。

37.无偏估计的有效性：$Var(\hat{\theta}_1)\le Var(\hat{\theta}_2),\forall\theta\in\Theta$，且至少存在一个$\theta_0\in\Theta$，使得不等式严格成立，则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效。

→设$X_1,...,X_n i.i.d\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$\mu$的无偏估计$\overline{X}$比$X_1$有效。

38.最小方差无偏估计(MVUE)：$Var(\hat{\theta}_0)\le Var(\hat{\theta}_1),\forall\theta_1$和$\forall\theta\in\Theta$，则称$\hat{\theta}_0$为$MVUE$。

→MVUE 不一定存在。

→Fisher 信息量：$I(\theta)=-E\left[\frac{\partial^2 f(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right]=E\left[\frac{\partial f(x;\theta)}{\partial\theta}\right]^2$。

→求解方法：取$I(\theta)$最大值并代入$Var(\hat{\theta})\ge\frac{1}{nI(\theta)}$，寻找并检验$\hat{\theta}$所对应的待估参数函数的 MVUE 是否存在。

→在$N(\mu,\sigma^2)$中，无偏估计$\overline{X}$是μ的 MVUE；在 P(λ)中，无偏估计$\overline{X}$是λ的 MVUE。

→MVUE 不一定是使得 MSE 最小的估计，有偏估计可能使 MSE 更小。

→设$X_1,...,X_n i.i.d\sim B(n,p),n$已知，无偏估计(MLE) $\hat{p}_1=\overline{X}$，有偏估计(贝叶斯估计) $\hat{p}_2=\frac{1+\sum_{i=1}^{n}X_i}{n+2}$，则有：

$$MSE(\hat{p}_1)=\frac{p(1-p)}{n},MSE(\hat{p}_2)=\frac{(4-n)p^2+(n-4)p+1}{(n+2)^2}。$$

39.相合性：设$X_1,...,X_n$为从某个来自于参数θ的总体中抽取的样本，$\hat{g}(X_1,...,X_n)$为待估参数函数 g(θ)的一个估计量，若$\forall\varepsilon>0$, $\theta\in\Theta$，有$\lim_{n\to\infty}P_\theta(|\hat{g}(X_1,...,X_n)-g(\theta)|\ge\varepsilon)=0$，则称$\hat{g}(X_1,...,X_n)$是$g(\theta)$的一个相合估计，记作$\hat{g}(X_1,...,X_n)\xrightarrow{P}g(\theta)$。

40.设$X_1,...,X_n i.i.d\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y_1,...,Y_m i.i.d\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 X 和 Y 独立，则有(从此处开始下文均如此约定记号)：

①$\overline{X}\sim N(\mu_1,\frac{\sigma_1^2}{n})$　②$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\sim\chi_{n-1}^2$　③$\overline{X}$和S_1^2独立　④$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_1)}{S_1}\sim t_{n-1}$　⑤$\frac{S_1^2\sigma_2^2}{S_2^2\sigma_1^2}\sim F_{n-1,m-1}$

⑥$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w}\sqrt{\frac{mn}{n+m}}\sim t_{n+m-2}$，其中$S_w^2=\frac{n-1}{n+m-2}S_1^2+\frac{m-1}{n+m-2}S_2^2,\sigma_1=\sigma_2$。

41.区间估计

→记号约定：记正态分布概率密度函数为ϕ，P 为置信水平(概率)，f(•)表示概率密度函数 f 的上•分位数所对应的 x 的取值，从此处开始下文均如此约定记号。

区间估计量	条件	估计区间
μ_1*	σ_1^2已知	$\left[\overline{X}-\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\phi(\frac{\alpha}{2}),\overline{X}+\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\phi(\frac{\alpha}{2})\right],P=1-\alpha$
μ_1*	σ_1^2未知	$\left[\overline{X}-\frac{S_1}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\frac{\alpha}{2}),\overline{X}+\frac{S_1}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})\right],P=1-\alpha$
σ_1^2	μ_1已知	$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2}{\chi_n^2(\frac{\alpha}{2})},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2}{\chi_n^2(1-\frac{\alpha}{2})}\right],P=1-\alpha$
σ_1^2	μ_1未知	$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi_{n-1}^2(\frac{\alpha}{2})},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi_{n-1}^2(1-\frac{\alpha}{2})}\right],P=1-\alpha$
$\mu_1-\mu_2$**	σ_1^2,σ_2^2已知，n≠m	$\left[\overline{X}-\overline{Y}-\phi(\frac{\alpha}{2})\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}},\overline{X}-\overline{Y}+\phi(\frac{\alpha}{2})\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}\right],P=1-\alpha$
$\mu_1-\mu_2$**	σ_1^2,σ_2^2未知，n≠m，且 $\sigma_1=\sigma_2$或$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的区间估计包括1,$P=1-\alpha$	$\left[\overline{X}-\overline{Y}-t_{n+m-2}(\frac{\alpha}{2})\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}S_w,\overline{X}-\overline{Y}+t_{n+m-2}(\frac{\alpha}{2})\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}S_w\right],P=1-\alpha$
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2已知	$\left[\frac{m\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2}{nF_{n,m}(\frac{\alpha}{2})\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\mu_2)^2},\frac{mF_{m,n}(\frac{\alpha}{2})\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2}{n\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\mu_2)^2}\right],P=1-\alpha$
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2未知	$\left[\frac{S_1^2}{S_2^2F_{n-1,m-1}(\frac{\alpha}{2})},\frac{S_1^2F_{m-1,n-1}(\frac{\alpha}{2})}{S_2^2}\right],P=1-\alpha$

→**：若 n=m，构造$Z=X-Y\sim(\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$，按照*的区间估计计算。

→以上列出的均为双侧区间估计，若求单侧区间估计，将$\frac{\alpha}{2}$替换为α，区间替换为相应的单侧区间即可。

→ $X_1,...,X_n i.i.d\sim B(n,p),n$已知的区间估计为：$p\in\left[\overline{X}-\frac{\phi(\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})},\overline{X}+\frac{\phi(\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}\right],P=1-\alpha$。

42.第I类错误：H_0成立，但被拒绝(假阳性)；第II类错误：H_1成立，但被拒绝(假阴性)。

43.显著性水平α不唯一，若α'≥α，则α'也是显著性水平。

44.功效函数：评价一个检验优劣的标准，其定义为：$\beta(\theta)=P_\theta(H_0\text{被拒绝}),\theta\in\Theta_0$。

→性质：$\beta(\theta)\le\alpha,\theta\in\Theta_0$；犯第II类错误的概率为：$P_2(\theta)=1-\beta(\theta),\theta\in\Theta_1$，即$\beta(\theta)$越大与好。

45.$P\text{值}=P(\text{出现观察结果或比之更极端的情形}|H_0\text{是真的})$，P 值越小越好。

→P＞0.10，没有足够的证据拒绝 H_0；0.05＜P＜0.10，差异不太显著；
0.01＜P＜0.05，差异显著，拒绝 H_0；P＜0.01，差异高度显著，拒绝 H_0。

46.拟合优度检验：H_0：总体分布是 f(x) vs H_1：总体分布不是 f(x)，其公式为：

$\chi^2=\sum_{i=1}^{K}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}\sim\chi_{K-r-1}^2$,其中$O$是观测值，$E$是理论值，$r$为参数个数；特别地，$a\times b$的列联表满足$\chi^2\sim\chi_{(a-1)(b-1)}^2$。

47.假设检验

假设检验量	条件	检验统计量	拒绝域
μ_1	σ_1^2 已知	$\Phi=\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_1)}{\sigma_1}$	$\lvert\Phi\rvert>\phi(\dfrac{\alpha}{2})$
μ_1	σ_1^2 未知	$T=\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_1)}{S_1}$	$\lvert T\rvert>t_{n-1}(\dfrac{\alpha}{2})$
σ_1^2	μ_1 已知	$\chi^2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$	$\chi^2>\chi_n^2(\dfrac{\alpha}{2})$或$\chi^2<\chi_n^2(1-\dfrac{\alpha}{2})$
σ_1^2	μ_1 未知	$\chi^2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma_1^2}$	$\chi^2>\chi_{n-1}^2(\dfrac{\alpha}{2})$或$\chi^2<\chi_{n-1}^2(1-\dfrac{\alpha}{2})$
$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2 已知	$\Phi=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m}}}$	$\lvert\Phi\rvert>\phi(\dfrac{\alpha}{2})$
$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2 未知，且 $\sigma_1=\sigma_2$或$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的区间估计包括1, $P=1-\alpha$	$T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w}\sqrt{\dfrac{mn}{n+m}}$	$\lvert T\rvert>t_{n+m-2}(\dfrac{\alpha}{2})$
$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2 已知	$F=\dfrac{m\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2}{n\sum\limits_{i=1}^{m}(Y_i-\mu_2)^2}$	$F>F_{n,m}(\dfrac{\alpha}{2})$或$F<\dfrac{1}{F_{m,n}(\dfrac{\alpha}{2})}$
$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2 未知	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$F>F_{n-1,m-1}(\dfrac{\alpha}{2})$或$F<\dfrac{1}{F_{m-1,n-1}(\dfrac{\alpha}{2})}$

→以上列出的均为双侧假设检验，若求单侧假设检验，将$\dfrac{\alpha}{2}$替换为α，拒绝域替换为相应的单侧拒绝域即可。

→估计得到的置信区间(与 H_1 区间的逻辑形状相同)包含了假设检验 H_0 中的值(即 H_0 的边界值)$\Leftrightarrow$ 不能拒绝 H_0，P=1-α。

邓谊宇