

2024 数理统计期末考试

兰小红

2024.12.6

前两题 20 分，后四题 15 分。

问题 1. 我们有如下分布族的概率密度函数：

$$f(x | \theta) = \theta^{-1} e^{-\frac{x-\theta}{\theta}}, x \geq \theta$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数。

- (a) 该分布族是指数组吗？说明理由。
- (b) 求出该分布族的一个充分统计量（ (X_1, X_2, \dots, X_n) 除外）。
- (c) 给出参数 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_M$ 和极大似然估计 $\hat{\theta}_L$ 。

问题 2. 一家工厂有一个机床，厂家声称该机床一小时至少能生产 20 件产品。为检验其声明是否合理，统计局随机抽样 25 个机床一小时生产的产品数量，得到件数的均值为 17，方差为 $S_X^2 = 36$ 。

- (a) 设计一假设检验问题，来判断该厂家的声明是否合理。置信水平 0.90，需要带入具体数值。
- (b) 根据 (a) 中得到的假设检验，求一个 μ 置信系数为 0.90 的置信上限，同样需要带入具体值。

问题 3. 我们有如下分布族的概率密度函数：

$$f(x | \theta) = 2\theta^2 x^{-3}, x > \theta$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数。

- (a) 该分布族是否有充分完全统计量？说明理由。
- (b) $X_{(1)}$ 与 $\frac{X_{(n)}}{X_{(1)}}$ 独立吗？请说明理由。

问题 4. 我们有如下分布族的概率密度函数：

$$f(x | \theta) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}}, -\infty < x < +\infty$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数。

- (a) 求出 θ 的一个充分完全统计量。
- (b) $\eta = \theta + \theta^2$ 有 UMVUE 吗？说明理由。（提示：Gamma 分布的密度函数）

问题 5. 我们有如下分布族的概率密度函数:

$$f(x | \lambda) = 2\sqrt{\frac{\theta}{\pi}} e^{-\theta x^2}, \quad x > 0$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数。求假设检验:

$$H_0 : \theta \geq 1 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \theta < 1$$

水平为 α 的似然比检验, 并求出对应的功效函数。

问题 6. 我们有如下分布族的概率密度函数:

$$f(x | \lambda) = \theta x^{\theta-1}, \quad x > 0$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数。

(a) 证明 $-\ln X \sim \text{Exp}(\theta)$ 。

(b) 求假设检验问题:

$$H_0 : \theta = \frac{1}{2} \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \theta < \frac{1}{2}$$

水平为 α 的 UMPT。

(c) 反转 (b) 中得到的假设检验, 给出 θ 一个置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间。