极限理论(胡治水).

· 密度函数 $X+tY$
· 矩方法 离散, Poisson分布.
· Stein方法 不独立的情形.

特征函数: $f(t)=Ee^{itX}, t\in\mathbb{R}$

· $|f(t)|\le 1=f(0)$

· $f(-t)=Ee^{it(-X)}=\overline{f(t)}$

· $f(t)$在$\mathbb{R}$上一致连续. (Pf: $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\left|Ee^{i(t+h)X}-Ee^{itX}\right|\le\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}E\left|e^{itX}(e^{ihX}-1)\right|$

$=E\left|e^{ihX}-1\right|\to 0$ (控制收敛).

· $f(t)$具有非负定性: $\forall t_1,\cdots,t_n$及$\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{C}$, 有$\sum\limits_{i,j}f(t_i-t_j)\lambda_i\overline{\lambda_j}\ge 0$.

即矩阵 $A=(f(t_i-t_j))_{n\times n}$ 是一个非负定阵.

Pf: $\sum Ee^{i(t_k-t_j)X}\lambda_k\overline{\lambda_j}=E\sum\limits_{k,j}(e^{it_kX}\lambda_k)(\overline{e^{it_jX}\lambda_j})=E\left(\sum\limits_k e^{it_kX}\lambda_k\right)\left(\overline{\sum\limits_j e^{it_jX}\lambda_j}\right)$

$=E\left|\sum\limits_k e^{it_kX}\lambda_k\right|^2\ge 0$.

· $f_{aX+b}(t)=e^{ibt}f_X(at)$ $f_{X_1+\cdots+X_n}(t)=\prod f_{X_i}(t)$. X,X' i.i.d. $f_{X-X'}(t)=|f_X(t)|^2$.

· $f_X(t)\in\mathbb{R}\ (\forall t)\iff f_X(t)=f_X(-t)\iff X\overset{d}{=}-X\iff X$的分布对称.

· 若$F_1,\cdots,F_n$有ch.f. $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$, $\lambda_i\ge 0$, $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1$. 则 $\sum\lambda_iF_i$ ch.f.为 $\sum\lambda_i\varphi_i$

Pf: $\sum\lambda_j\varphi_j=\sum\int e^{itx}d\lambda_jF_j(x)=\int e^{itx}d\left(\sum\limits_j\lambda_jF_j(x)\right)$ ($\sum\lambda_jF_j$ 仍为分布函数).

· Parseval 等式: 设 $X\sim F_X$ (d.f.), f_X (ch.f.) $Y\sim F_Y, f_Y$ 则

$$\boxed{\int f_X(t)dF_Y(t)=\int f_Y(t)dF_X(t)}$$

把分布函数的性质转化为特征函数的性质. 即: Fourier变换是自伴变换.

Pf: 设 X,Y 独立.

$Ee^{iXY}=E(E(e^{iXY}|X))=E(f_Y(X))=\int f_Y(t)dF_X(t)$, 同理 $Ee^{iXY}=\int f_X(t)dF_Y(t)$.

RMK: 用条件期望证明Parseval等式. 此式用得好有大用处!

例: $Y\sim N(0,\sigma^2)$ $f_Y(t)=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$ $\int f_X(t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt=\int e^{-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}dF_X(t)$

$=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\int\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}dF_X(t)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\int p_{Z/\sigma}(-t)dF_X(t)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}p_{X+\frac{Z}{\sigma}}(0)$, ($Z\sim N(0,1)$ Z与X独立)

(最后一个等式用了: $X\sim p_X(x)$, X,Y独立. 则 $p_{X+Y}(x)=\int p_X(x-y)dF_Y(y)$)

故 $p_{X+Z/\sigma}(0)=\frac{1}{2\pi}\int f_X(t)e^{-t^2/2\sigma^2}dt\Rightarrow p_{X+\sigma Z}(0)=\frac{1}{2\pi}\int f_X(t)e^{-t^2\sigma^2/2}dt$

对于一般的: $p_{X+\sigma Z}(x)=p_{X-x+\sigma Z}(0)=\frac{1}{2\pi}\int f_{X-x}(t)e^{-t^2\sigma^2/2}dt$

$=\frac{1}{2\pi}\int f_X(t)e^{-itx}e^{-t^2\sigma^2/2}dt$

RMK: $f_X(t) \Rightarrow F_{X+\sigma Z} \Rightarrow F_X \quad X+\sigma Z \xrightarrow{d} X$. By 控制收敛

假设: $\int |f_X(t)| dt < \infty$ 则 $\lim_{\sigma\to 0} p_{X+\sigma Z}(x) = \frac{1}{2\pi}\int f_X(t) e^{-itx} dt := p(x)$

下证: $p(x)$ 是 X 的 p.d.f.

In fact: $P(X\in I) = \lim_{\sigma\to 0} P(X+\sigma Z\in I) = \lim_{\sigma\to 0}\int_I p_{X+\sigma(Z)}(t)dt = \int_I p(x)dx$.

(最后一个等式: $|p(x)| \le \frac{1}{2\pi}\int |f_X(t)| dt < \infty$. 由控制收敛).

故 $\forall A$, $\mathbb{P}(X\in A) = \int_A p(x)dx$

$\boxed{\text{反转公式}}$: $\mathbb{P}(x_1, x_2) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(\{x_1, x_2\}) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{itx_1} - e^{-itx_2}}{it}\varphi(t)dt$

$\boxed{\text{回到 Parseval 等式}}$:

令 $Y\sim U(-u,u)$ $f_Y(t) = \frac{\sin ut}{ut}$ $\therefore \frac{1}{2u}\int_{-u}^{u} f_X(t)dt = \int\frac{\sin ut}{ut}dF_X(t)$

$= \left(\int_{|ut|\le 2} + \int_{|ut|\ge 2}\right)\frac{\sin ut}{ut}dF_X(t) \le P(|uX|\le 2) + \frac{1}{2}P(|uX|\ge 2) = 1 - \frac{1}{2}P(|uX|\ge 2)$

$\therefore P(|uX|\ge 2) \le 2 - \frac{1}{u}\int_{-u}^{u} f_X(t)dt = \frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-f_X(t))dt$

即 $\boxed{\mathbb{P}(|X|\ge \frac{2}{u}) \le \frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-f_X(t))dt}$

下面对 Ch.f. 进行 Taylor 展开.

- $f(t)$ 一致连续, 但 $f'(t)$ 不一定存在: $P(X=5^k) = 2^{-(k+1)}$, $k\in\mathbb{N}$, $f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}}e^{it\cdot 5^k}$

Lemma 1: $\left|e^{ix} - \sum_{m=0}^{n}\frac{(ix)^m}{m!}\right| \le \min\left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|x|^n}{n!}\right)$

$|e^{ix}|\le 1$, $|e^{ix}-1|\le |x|$, $|e^{ix}-1-x| \le \frac{x^2}{2}$ or $\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$.

证: $n=0$ 显然, 下对 n 归纳. 注意: $i\int_0^x e^{iy}dy = e^{ix}-1$, $i\int_0^x\frac{(iy)^m}{m!}dy = \frac{(ix)^{m+1}}{(m+1)!}$

记 $h_n(x) = e^{ix} - \sum_{m=0}^{n}\frac{(ix)^m}{m!}$ 故 $h_n(x) = i\int_0^x h_{n-1}(y)dy$ 后略.

Lemma 2: $\mathbb{E}|X|^k < \infty$ 则 $f(t) = \sum_{j=0}^{k}\frac{i^j}{j!}t^j E(X^j) + o(|t|^k)$ (注: 此式仅在证明 CLT 有用).

且 $f^{(k)}(t) = \int (ix)^k e^{itx}dF(x)$.

Pf: $\left|f(t) - \sum_{j=0}^{k}\frac{i^j}{j!}t^j\mathbb{E}(X^j) + o(|t|^k)\right| \le \mathbb{E}\left|\frac{|tX|^{k+1}}{(k+1)!}, \frac{2|X|^k t^k}{k!}\right|$

$= \mathbb{E}\frac{|t|^k|X|^k}{(k+1)!}(|tX|\wedge 2(k+1)) = \frac{|t|^k}{(k+1)!}\mathbb{E}|X|^k(|tX|\wedge 2(k+1))$

注意: $|X|^k(|tX|\wedge 2(k+1)) \le 2(k+1)|X|^k \in L^1$ 故由控制收敛

$\mathbb{E}|X|^k(|tX|\wedge 2(k+1)) \to 0 \quad (t\to 0)$

后半部分，用归纳法，$n=1$. $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=E\,e^{itX}\left(\frac{e^{ihX}-1}{h}\right)$，$\left|e^{itX}\left(\frac{e^{ihX}-1}{h}\right)\right|\le|X|\in L^1$.

由控制收敛 $f'(t)=E(e^{itX}iX)$. 后类似，略.

由特征函数可以算矩.

Thm: 反过来，若 $k=2m$，$m\in N^*$，f 在 0 附近有 k 阶导数. 则 $E|X|^k<\infty$.

若 $k=2m+1$，$m\in N^*$. f 在 0 附近有 k 阶导数. 则 $E|X|^{k-1}<\infty$. 但 $E|X|^k<\infty$ 不一定成立.

例：$P(X=\pm j)=\frac{1}{2Cj^2\log j}$ $j=2,3,\cdots$ 则 $f(t)=\frac{1}{C}\sum_{j=2}^{+\infty}\frac{\cos jt}{j^2\log j}$ $f'(t)$ 存在且对 t 连续. $\frac{1}{C}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\sin jt}{j\log j}$ 一致收敛. 故 $f'(t)=-\frac{1}{C}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\sin jt}{j\log j}$. 且对 t 连续.

但 $E|X|=\sum\frac{1}{j\log j}=\infty$.

Pf: $m=1$ 时. $f''(0)$ 存在 $f''(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+f(-h)-2f(0)}{h^2}=\lim_{h\to0}\int\frac{e^{ihx}+e^{-ihx}-2}{h^2}dF(x)$

$=2\lim_{h\to0}\int\frac{\cos hx-1}{h^2}dF(x)$ 而 $\int x^2dF(x)=\int\lim_{h\to0}\frac{2(1-\cos hx)}{h^2}dF(x)$

Fatou 比控制收敛更广泛，更好用. 此处不能用控制收敛 $\le\varliminf_{h\to0}\int\frac{2(1-\cos hx)}{h^2}dF(x)=-f''(0)<\infty$

设命题对 $m-1$ 成立. 令 $G(x)=\int_{-\infty}^{x}y^{2m-2}dF(y)$ 则 $\frac{G(x)}{G(\infty)}$ 为一个分布函数

不妨设 $G(\infty)=1$. 令 $P'(X\in A)=\int_A dG$ 故可换测度. 这个技巧很常见!

故 $\varphi(t)=\int e^{itx}dG=\int e^{itx}x^{2m-2}dF(x)=(-1)^{m-1}f^{(2m-2)}(t)$

故 $\varphi(t)$ 的 2 阶导存在. 故由 $m=1$，可知 $\int x^2dG(x)<\infty$ 即 $\int x^{2m}dF(x)<\infty$. ▨

Question: 特征函数什么时候可以 Taylor 展开 $\Leftrightarrow$ 矩决定特征函数 $\Leftrightarrow$ 矩决定分布：

Answer: 常用充分条件: Careleman 条件: $\sum_{k=1}^{\infty}\mu_{2k}^{-\frac{1}{2k}}=\infty$ (也是矩收敛定理的条件).

满足该条件的例子: 正态, Poisson, 半圆分布.

$\boxed{\text{连续性定理}}$ (i) $X_n \xrightarrow{d} X_\infty \Rightarrow Ee^{itX_n} \to Ee^{itX_\infty}$ (逐点)

(ii) 设 $X_n \sim f_n(t)$. $f_n(t) \to f(t)$, $f(t)$ 在 $t=0$ 连续. 则 $\exists$ r.v. X s.t. $X_n \xrightarrow{d} X$. 且 $X \sim f(t)$.

注: · $X_n \xrightarrow{d} N(0,1) \Leftrightarrow f_{X_n}(t) \to e^{-\frac{1}{2}t^2}$

· $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \forall \{n_k\}\ \exists \{n_k^o\} \subset \{n_k\}$ s.t. $X_{n_k^o} \xrightarrow{d} X$.

· Helley定理. 任意 $\{X_n\}$ 存在一个子列 $\{X_{n_k}\}$. s.t. $X_{n_k} \xrightarrow{d} F$ (广义分布). (右连续且非降单增)

· 要使得上述过程 F 为分布函数 $\Leftrightarrow X_n$ 胎紧. (即 $\sup_n P(|X_n|>r) \to 0\ (r\to\infty)$), ☆

或 $\limsup_{n\to\infty} P(|X_n|>r) \to 0\ (r \to \infty)$

F_n 也称为 mass-preserving.

Pf of 连续性定理(ii)

由之前的不等式 $P(|X_n| \geq r) \leq \frac{r}{2}\int_{-2/r}^{2/r}(1-f_{X_n}(t))dt$

$\therefore \limsup_{n\to\infty} P(|X_n| \geq r) \leq \frac{r}{2}\int_{-2/r}^{2/r}(1-f(t))dt$ (控制收敛)

令 $r\to\infty$. $R.H.S = \frac{r}{2}\cdot\frac{4}{r}(1-f(\xi_r)) \to 0$ (由 f 在 $t=0$ 连续).

故 X_n 胎紧; 故由 Helley 定理, $\forall \{n_k\}$, $\exists \{n_k^o\}$. $X_{n_k^o} \xrightarrow{d} X$.

故 $f_{n_k^o}(t) \to f_X(t) = f(t)$ 故 X 与 n_k 的选取无关. ◻.

(Type and Law Thm): 设 $F_n \xrightarrow{d} F$. $\{a_n>0\}$ $\{b_n\}$ 为常数列. s.t.

$F_n(a_nx_n+b_n) \xrightarrow{d} G(x)$, F, G 均不退化. 则 $\exists a, b$ s.t. $G(x)=F(ax+b)$ 且

$a_n \to a$, $b_n \to b$.

Thm: $c_n \to c \in \mathbb{C}$. 则 $(1+\frac{c_n}{n})^n \to e^c$

Lemma1: $|e^b-(1+b)| \leq |b|^2$. if $|b|\leq 1$, $b\in\mathbb{C}$.

Pf: $e^b-(1+b) = \frac{b^2}{2!}+\cdots+\frac{b^n}{n!}+\cdots$ 则 $|e^b-(1+b)| \leq \frac{|b|^2}{2}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots) \leq |b|^2$

Lemma2: 设 $z_1, z_2, \cdots z_n$, $w_1, \cdots, w_n \in \mathbb{C}$. 且 $|z_i|\leq\theta$, $|w_i|\leq\theta$. 则

$$\left|\prod_{m=1}^n z_m - \prod_{m=1}^n w_m\right| \leq \theta^{n-1}\left(\sum_{m=1}^n |z_m-w_m|\right)$$

Pf: $n=1$ 显然; $\left|\prod_{m=1}^n z_m - \prod_{m=1}^n w_m\right| \leq \left|z_1\prod_{m=2}^n z_m - z_1\prod_{m=2}^n w_m\right| + \left|z_1\prod_{m=2}^n w_m - w_1\prod_{m=2}^n w_m\right|$

$\leq \theta\left|\prod_{m=2}^n z_m - \prod_{m=2}^n w_m\right| + |z_1-w_1|\theta^{n-1}$ by induction 即可.

RMK: Lindeberg 替换+思想逐步估计.

回到原定理: 记 $z_m = 1+\frac{c_n}{n}$ $w_m = e^{\frac{c_n}{n}}$, 取 $\gamma > |c|$. 故当 n 充分大时 $|c_n| < \gamma$

时 $1+\frac{\gamma}{n} \le e^{\gamma/n}$ 故由 Lemma 1 与 Lemma 2:

$$\left|(1+\tfrac{c_n}{n})^n - e^{c_n}\right| \le (e^{\gamma/n})^{n-1}\sum_{m=1}^{n}\left|1+\frac{c_n}{n}-e^{\frac{c_n}{n}}\right| \le n e^{(\gamma/n)^{n-1}}\cdot\left|\frac{c_n}{n}\right|^2 \le \frac{e^{\gamma}\cdot\gamma^2}{n}$$

令 $n\to+\infty$ 即证.

CLT: $X_1,\cdots,$ i.i.d $EX_i=\mu$. $Var(X_i)=\sigma^2 \in (0,+\infty)$, $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$

则 $\frac{S_n-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{d} N(0,1)$.

LFCLT

随机变量阵列: (i) $\forall n$, $X_{n1},\cdots,X_{nk_n}$ 独立

X_{11} X_{12} $\cdots$ X_{1k_1} (ii) $EX_{nk}=0$ (iii) $\sum_{m=1}^{k_n} \mathbb{E} X_{n,m}^2 = 1$.

X_{21} X_{22} $\cdots$ X_{2k_2} Lindeberg 条件: $\forall \varepsilon>0$ $\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\mathbb{E}(|X_{n,m}|^2; |X_{n,m}|>\varepsilon)=0$

$\vdots$ $\vdots$ $\cdots$ $\vdots$

则 $\sum_{k=1}^{k_n} X_{n,k} \xrightarrow{d} N(0,1)$.

Pf:

$$\mathbb{E}e^{it\sum X_{nk}} = \prod \mathbb{E}e^{itX_{nk}} =: \prod_{k=1}^{k_n} f_k(t), \text{ 而 } e^{-\frac{1}{2}t^2} = \prod_{k=1}^{k_n} e^{-\frac{\sigma_{nk}^2}{2}t^2}$$

设 $\{G_{nk}\}_{k=1}^{k_n}$ 为一列独立的 r.v. $G_{nk}\sim N(0,\sigma_{nk}^2)$

故由 Lemma 2 可知: $\left|\prod f_k(t) - \prod e^{-\frac{1}{2}\sigma_{nk}^2 t^2}\right| \le \sum_{k=1}^{k_n}\left|f_k(t)-e^{-\frac{1}{2}\sigma_{nk}^2t^2}\right|$

$$= \sum \left|f_k(t)-1+\tfrac{1}{2}\sigma_{nk}^2t^2 - (e^{-\frac{1}{2}\sigma_{nk}^2t^2}-1+\tfrac{1}{2}\sigma_{nk}^2t^2)\right|$$

$\le \sum \left|\mathbb{E}e^{itX_{nk}}+\frac{1}{2}\sigma_{nk}^2t^2-1\right| + \left|e^{-\frac{1}{2}\sigma_{nk}^2t^2}-1+\frac{1}{2}\sigma_{nk}^2t^2\right| \le C\Big(\sum \mathbb{E}[|X_{nk}|^3\wedge|X_{nk}|^2]+\mathbb{E}[|G_{nk}|^3\wedge |G_{nk}|^2]\Big) \le \sum \mathbb{E}[|X_{nk}|^3 : |X_{nk}|\le\varepsilon] + \mathbb{E}[|X_{nk}|^2 ; |X_{nk}|>\varepsilon] + \mathbb{E}[|G_{nk}|^3\wedge|G_{nk}|^2]$

$\le \underbrace{\sum \varepsilon\mathbb{E}[|X_{n,k}|^2 ; |X_{nk}|<\varepsilon]}_{\le\varepsilon} + \underbrace{\sum\mathbb{E}[|X_{nk}|^2 ; |X_{nk}|>\varepsilon]}_{\text{Lindeberg 条件}} + \mathbb{E}[|G_{nk}|^3\wedge|G_{nk}|^2]$

$\sup_k \sigma_{nk}^2 = \mathbb{E}[X_{nk}^2 ; |X_{nk}|\le\varepsilon] + \mathbb{E}[X_{nk}^2 ; |X_{nk}|>\varepsilon] \le \varepsilon^2 + \sum\mathbb{E}[|X_{nk}|^2 ; X_{nk}>\varepsilon]$

故 $\sigma_{nk}^2\to 0$ $(n\to\infty)$. 故 $\mathbb{E}[G_{nk}^3\wedge G_{nk}^2] \le \sum c\cdot\sigma_{nk}^3 \le c\sup_k\sigma_{nk}(\sum_k \sigma_{nk}^2)$

$\le C\sup_k \sigma_{nk} \to 0$. ◻

· Feller条件：$\lim \max EX_{nk}^2 = 0$ · Lyapunov条件：$\sum E|X_{nk}|^3 \to 0$

· 无穷小条件：$\lim_{n\to\infty} \max_k P(|X_{nk}|>\varepsilon)=0$ ，$\forall \varepsilon>0$

(Feller-Levy CLT) 最广的正态的CLT.

Thm1: 设独立r.v.阵列$\{X_{nk}: n=1,2,\cdots; k=1,\cdots k_n\}$. 满足无穷小条件 $b\in\mathbb{R}$, $c\geq 0$.

则：(i) $\forall\varepsilon>0$ 有$\sum_{k=1}^{k_n} P(|X_{nk}|>\varepsilon)\to 0$ (ii) $\sum_k E(X_{nk}I(|X_{nk}|\leq 1))\to b$

(iii) $\sum_k Var(X_{nk}I(|X_{nk}|\leq 1))\to c$. 为$\sum_{k=1}^{k_n} X_{n,k} \xrightarrow{d} N(b,c)$ 为充要条件.

Question: i.i.d 情形的CLT 若二阶矩不存在，是否存在$\{a_n\}$. $\{b_n\}$, s.t. $\frac{S_n-a_n}{b_n}\xrightarrow{d} N(0,1)$?

Def: 缓变函数 (Slowly Varying): L为$[0,+\infty)$上正值可测函数. 对$\forall c>0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{L(cx)}{L(x)}=1$

例子: $\log x$, $\log\log x$, $(\log x)^k$ 性质: $\lim_{x\to\infty} x^a L(x)=\begin{cases}\infty, & a>0\\ 0, & a<0\end{cases}$

Thm2: 设 $X_1,\cdots,X_n\cdots$ i.i.d. 非退化，则下面条件等价：

(i) ∃常数序列$\{a_n\}$. $\{m_k\}$ s.t. $\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k-m_k)}{a_n}\xrightarrow{d} N(0,1)$

(ii) $L(x)=EX^2I(|X|\leq x)$ 为(∞处) 缓变函数

(iii) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2P(|X|>x)}{EX^2(I_{|X|\leq x})}=0$

RMK: ① X(或分布F)属于正态吸引场. $X\in DAN$

② $m_k=EX$. $a_n=1\vee\sup\{x>0: nL(x)\geq x^2\}$. $nL(a_n)\sim a_n^2$ ☆

$\boxed{\text{Eg}}$: $X_1,X_2\cdots$ i.i.d 对称r.v. $P(|X|>x)=x^{-2}$. $x\geq 1$.

法一: $EX^2=2\int_1^{+\infty} xP(|X|>x)dx=\infty$. $E(X^2I_{|X|\leq x})=2\log x$.

$2n\log a_n\sim a_n^2 \Rightarrow a_n\sim\sqrt{n\log n} \Rightarrow \frac{S_n}{\sqrt{n\log n}}\xrightarrow{d} N(0,1)$ (※)

法二: 下直接证(※) ch.f. 法：

$E\exp(itS_n/\sqrt{n\log n})=\left(E\exp(itX/\sqrt{n\log n})\right)^n=\left(\int_{|x|\geq 1} e^{itx/\sqrt{n\log n}}x^{-3}dx\right)^n$

$=\left(2\int_1^\infty \cos\frac{tx}{\sqrt{n\log n}}\cdot x^{-3}\right)^n=\left(1+2\int_1^\infty\left(\cos\frac{tx}{\sqrt{n\log n}}-1\right)x^{-3}dx\right)^n$

下证: $a_n=n\int_1^\infty\left(\cos\frac{tx}{\sqrt{n\log n}}-1\right)x^{-3}dx\longrightarrow -\frac{1}{4}t^2$ 即可.

- In fact: $a_n = n\int_1^{\infty}(\cos\frac{tx}{\sqrt{n\log n}}-1)x^{-3}dx \xlongequal{x=\sqrt{n\log n}\,y} \frac{1}{\log n}\int_{1/\sqrt{n\log n}}^{\infty}(\cos ty-1)y^{-3}dy$

洛必达
$\longrightarrow \frac{n}{2}(1+\log n)\cos(\frac{t}{\sqrt{n\log n}}-1) \longrightarrow -\frac{1}{4}t^2\frac{n(1+\log n)}{n\log n} \rightarrow -\frac{1}{4}t^2$. ▢.

Lemma: 设 X 为非退化分布. $L(x)=\mathbb{E}X^2(I_{|X|\le x})$ 为缓变函数, 则 $\forall m\in\mathbb{R}$.
$L_m(x)=\mathbb{E}(X-m)^2I_{|X-m|\le x}$. 也是缓变fn. 且 $\forall p\in[0,2)$ 有.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2-p}\mathbb{E}|X|^pI(|X|>x)}{L(x)}=0$$

Pf: $\forall r\in(1,2^{2-p})$ $\exists x_0$, $x>x_0$ 时有 $L(2x)\le rL(x)$

$$x^{2-p}\mathbb{E}(|X|^pI(|X|>x))=x^{2-p}\sum_{n\ge 0}\mathbb{E}(|X|^pI(\frac{|X|}{x}\in(2^n,2^{n+1}]))$$

$$\le\sum 2^{(p-2)n}\mathbb{E}X^2I(\frac{|X|}{x}\in(2^n,2^{n+1}])$$

$$=\sum 2^{(p-2)n}(L(2^{n+1}x)-L(2^nx))$$

$$\le\sum 2^{(p-2)n}(r-1)L(2^nx)\le\sum 2^{(p-2)n}(r-1)r^nL(x)=\frac{r-1}{1-2^{p-2}r}L(x)$$

$\therefore \overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{x^{2-p}\mathbb{E}|X|^p(I_{|X|>x})}{L(x)}\le\frac{r-1}{1-2^{p-2}r}$ 令 $r\to1$ 即可.

推论: (1) $\because \lim_{x\to\infty}\frac{x^{2-p}}{L(x)}=\infty$. 故 $\lim_{x\to\infty}\mathbb{E}|X|^pI(|X|>x)=0$ 故 $\mathbb{E}|X|^p<\infty$.

(2) 令 $p=0$, 可得 Thm2 in (ii) $\Rightarrow$ (iii).

3.24 正态收敛的误差.

X_i i.i.d $EX=0$ $EX^2=1$. $d_k(\frac{S_n}{\sqrt n},N(0,1))=\sup_{x\in\mathbb{R}}|P(\frac{S_n}{\sqrt n}\le x)-\Phi(x)|\to0$. (Kolmogorov 距离)

(Berry-Essen不等式) $X_1,\cdots,X_n\cdots$ i.i.d r.v. $EX=0$. $EX^2=\sigma^2$, $E|X|^3<\infty$

则 $\sup_{x\in\mathbb{R}}|P(\frac{S_n}{\sqrt n\sigma}\le x)-\Phi(x)|\le A\frac{E|X|^3}{\sqrt n\sigma^3}$, A 是绝对正常数. (绝对: 不依赖于其他变量)

注: (1) 收敛速度 $\frac{1}{\sqrt n}$ 不可改进. 如 X_i i.i.d $P(X_i=\pm1)=\frac12$ $\Rightarrow P(\sum_{i=1}^{2n}X_i=0)=\binom{2n}{n}(\frac12)^{2n}$

$n!\sim\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$, 则 $\binom{2n}{n}(\frac12)^{2n}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ 故上述界的阶不能改进.

(2) A的估计：$A > 0.4097$. 可取 $A = 0.4748$.

(Eessen不等式)：设 F, G 有 ch.f. f, g，设 $\sup |G'(x)| \le c$ 则 $\forall T > 0$，当 $b > \frac{1}{2\pi}$ 时.

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \le b \int_{-T}^{T} \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt + \gamma(b) \frac{c}{T}$$. 其中 $\gamma(b)$ 仅与 b 有关.

推广：

Thm: $E|X|^{2+\delta} < \infty$, $0 < \delta < 1$. $\sup_x \left| P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \le x\right) - \Phi(x) \right| \le \frac{A E|X|^{2+\delta}}{n^{\delta/2}}$

Thm: $\{X_n\}$ 独立, $EX_n = 0$, $B_n = \sum_{k=1}^{n} EX_k^2$ $\quad L_n = B^{-3/2} \sum E|X_k|^3$

则 $\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \le x\right) - \Phi(x) \right| \le A L_n$, …一致B-E界

$$\left| P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \le x\right) - \Phi(x) \right| \le \frac{A L_n}{(1+|x|)^3}$$

Edgeworth展开：设 $E|X|^k < \infty$, $k > 3$, 且 $\limsup_{|t| \to \infty} |Ee^{itX}| < 1$.

则 $(1+|x|)^k \left| P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n\sigma^2}} \le x\right) - \Phi(x) - \sum_{v=1}^{k-2} Q_v(x) n^{-\frac{v}{2}} \right| = o\left(n^{-\frac{k-2}{2}}\right)$ 对 x 一致成立.

相对误差：

$$\left| \frac{P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > x\right)}{1 - \Phi(x)} - 1 \right| \le \frac{c n^{-\frac{1}{2}}}{1 - \Phi(x)} \le c n^{-\frac{1}{2}} (1+|x|) e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\sup_{0 \le x \le (1-\varepsilon)\sqrt{\log n}} \left| \frac{P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \ge x\right)}{1 - \Phi(x)} - 1 \right| \le C n^{-\frac{1}{2}} \left(1 + (1-\varepsilon)\sqrt{\log n}\right) \to 0.$$

结论：$\frac{P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n\sigma}} > x\right)}{1 - \Phi(x)} \to 1$ 在 $0 \le x \le o(n^{\frac{1}{6}})$ 上一致成立 $\Leftrightarrow$ 对某个 $t_0 > 0$, $Ee^{t_0 |X|^{\frac{1}{2}}} < \infty$

Cramer 大偏差：设 $\exists H > 0$ 使当 $|t| < H$ 时有 $Ee^{tX} < \infty$, $EX = 0$, $EX^2 = 1$.

若 $0 \le x \le o(n)$ 则 $\frac{P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > x\right)}{1 - \Phi(x)} = \exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\} \left[1 + O\left(\frac{x+1}{\sqrt{n}}\right)\right]$

$\lambda(t)$ 为Cramer级数

鞍点逼近.

极限定理 → 尾概率估计

RMK: · $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, $P(S_n \geq n\varepsilon)$

· $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$. $P(S_n \geq \sqrt{n}x)$.

$\mathbb{P}(S_n \geq x)$ $x = o(n)$.

一些 Proof:

Proof 1: (二阶矩不存在时的CLT) $\xi_1, \xi_2, \cdots \overset{\xi}{\text{i.i.d}}$ 则 $\exists a_n, m_n$ s.t. $a_n \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - m_k) \xrightarrow{d} N(0,1)$

$\Leftrightarrow L(x) = \mathbb{E}[\xi^2; |\xi| \leq x]$ 是缓变函数.

$\Leftarrow$: 由Lemma (见上上页) $L_m(x) = E[(\xi-m)^2; |\xi-m| > x]$ 是缓变. $m = \mathbb{E}\xi$.

故不妨设 $\mathbb{E}\xi = 0$. 定义 $C_n = 1 \vee \sup\{x > 0; nL(x) \geq x^2\}$ $n \in \mathbb{N}$.

则 $C_n \uparrow \infty$, 且 $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n < \infty$, 且 $nL(C_n) \sim C_n^2$; 下面只需 Check FL-CLT 的条件

即可; ($b = 0$, $c = 1$, $X_{nk} = \xi_k / C_n$).

对于(i): $n\mathbb{P}(|\frac{\xi}{C_n}| > \varepsilon) \sim \frac{C_n^2 P(|\xi| > C_n\varepsilon)}{L(C_n)} \overset{\text{由定义}}{\sim} \frac{C_n^2 P(|\xi| > C_n\varepsilon)}{L(C_n\xi)} \leq \frac{(C_n\varepsilon)^{2-p} \mathbb{E}|X|^p I(|X| \geq C_n\varepsilon)}{L(C_n\varepsilon)} \xrightarrow{\lim_{p \to 0}} 1$

故(i)成立 对于(ii): $n|\mathbb{E}[\xi/C_n; |\xi/C_n| \leq 1]| = \frac{n}{C_n}|\mathbb{E}[\xi; |\xi| > C_n]|$

$\leq \frac{n}{C_n}\mathbb{E}[|\xi|; |\xi| > C_n] \sim \frac{C_n \mathbb{E}[|\xi|; |\xi| > C_n]}{L(C_n)} \to 0$ (Lemma: $P = 1$) (ii)成立

(iii): $n\operatorname{Var}(\xi/C_n; |\xi/C_n| \leq 1) = \frac{n}{C_n^2}L(C_n) - n(E[\xi/C_n; |\xi| \leq C_n])^2 \to 1$. ▨.

$\Rightarrow$: 略, 也是用FL-CLT.

Berry-Eesseen不等式的证明: 较复杂, 详见Durrett. 3.4.4节.

Poisson 收敛: 离散随机变量. 离散测度

$P(X_i=1)=p=1-P(X_i=0)$, X_i i.i.d. $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i \sim B(n,p)$.

· p 固定,

· $p=p(n)$, $np\to\lambda$ $(n\to\infty)$. $S_n \xrightarrow{d} P(\lambda)$.

$$P(S_n=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}\sim\frac{n^k}{k!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\sim\frac{1}{k!}\left(\frac{np}{1-p}\right)^k(1-p)^n\sim\frac{\lambda^k}{k!}\left(1+\frac{-\lambda}{n}\right)^{n-k}\to\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

简介: "Weak law of small numbers", "law of rare events"

Poisson appears as the limit of sum of indicators of events that have small probabilites.

Thm 3.6.1: X_{nk}, $1\le k\le k_n$ 为独立 r.v 列. $P(X_{nk}=1)=p_{nk}=1-P(X_{nk}=0)$

且 (i) $\sum_{k=1}^{k_n}p_{nk}\to\lambda\in(0,\infty)$ $(n\to\infty)$. (ii) $\max_{1\le k\le k_n}p_{nk}\to 0$ $(n\to\infty)$.

$S_n=\sum_{k=1}^{k_n}X_{nk}$, then $S_n\xrightarrow{d}P(\lambda)$.

Pf: $f_{nk}(t)=1-p_{nk}+p_{nk}e^{it}$ $\quad Ee^{itS_n}=\prod_{k=1}^{k_n}(1+p_{nk}(e^{it}-1))$

又 $|\exp(p(e^{it}-1))|=\exp(p\,\mathrm{Re}(e^{it}-1))\le 1$, $|1+p(e^{it}-1)|\le 1$

故: $\left|\exp\left(\sum_k^{k_n}p_{nk}(e^{it}-1)\right)-\prod(1+p_{nk}(e^{it}-1))\right|$

$$\le\sum\left|\exp(p_{nk}(e^{it}-1))-1-p_{nk}(e^{it}-1)\right|\le\sum p_{nk}^2|e^{it}-1|^2$$

$$\le 4\max_{1\le k\le k_n}p_{nk}\sum_{k=1}^{k_n}p_{nk}\to 0.$$

hence

$$\lim_{n\to\infty}Ee^{itS_n}=\lim_{n\to\infty}\exp\left(\sum_{k=1}^{k_n}p_{nk}(e^{it}-1)\right)=e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

Thm: (Poisson Convergence): 非负整值 r.v. 的独立组列 $\{X_{nk}\}$. 满足无穷小条件, 则 $\sum X_{nk}\xrightarrow{d}P(\lambda)$ 的充要条件是: (1) $\sum_k P(X_{nk}>1)\to 0$, (2) $\sum P(X_{nk}=1)\to\lambda$

Pf: 只证充分性: $X'_{nk}=X_{nk}1(X_{nk}\le 1)$ 则 $\sum X'_{nk}\xrightarrow{d}P(\lambda)$

又 $P(\sum X'_{nk}\ne\sum X_{nk})\le\sum P(X_{nk}>1)\to 0$ 四.

收敛～距离.

total-variation distance

Def: 全变差距离: $d_{TV}(\mu,\nu)=\max\limits_{A\in\mathcal{F}}|\mu(A)-\nu(A)|$

RMK: kolmogorov 距离是 $d_K(\mu,\nu)=\max|\mu(-\infty,x]-\nu(-\infty,x]|$

而 d_{TV} 对正态收敛没有意义: $X_1,\dots,X_n$ i.i.d $P(X_i=\pm1)=\frac{1}{2}$

$A_n=\{\frac{k}{\sqrt{n}};k\in\mathbb{Z}\}$. 则 $\sup\limits_{A\in\mathcal{F}}|P(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\in A)-P(N\in A)|\ge|P(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\in A_n)-P(N\in A_n)|=1$.

易知: $\|\mu_n-\nu\|\to 0\Rightarrow \mu_n\xrightarrow{d}\nu$. 故 $d_{TV}(\frac{S_n}{\sqrt{n}},N)=1$.

Thm: 设 Ω 可数 则 $\|\mu-\nu\|=\frac{1}{2}\sum\limits_i|\mu(i)-\nu(i)|$.

Pf: $B=\{i:\mu(i)\ge\nu(i)\}$

$$\mu(A)-\nu(A)=\mu(AB)-\nu(AB)+\mu(AB^c)-\nu(AB^c)$$
$$\le\mu(AB)-\nu(AB)=\mu(B)-\nu(B)-(\mu(A^cB)-\nu(A^cB))$$
$$\le\mu(B)-\nu(B)$$

$$\nu(A)-\mu(A)\le\nu(B^c)-\mu(B^c)=\mu(B)-\nu(B)$$

故 $\sup\limits_{A\in\mathcal{F}}|\mu(A)-\nu(A)|=\mu(B)-\nu(B)=\frac{1}{2}(\mu(B)-\nu(B)+\nu(B^c)-\mu(B^c))=\frac{1}{2}\sum\limits_i|\mu(i)-\nu(i)|$

测度和卷积

Lemma: $\mu_1*\mu_2=\sum\limits_y\mu_1(x-y)\mu_2(y)$ 则 $\|\mu_1*\mu_2-\nu_1*\nu_2\|\le\|\mu_1-\nu_1\|+\|\mu_2-\nu_2\|$

Pf: $L.H.S=\frac{1}{2}\sum\limits_x\left|\sum\limits_y\mu_1(x-y)\mu_2(y)-\sum\limits_y\nu_1(x-y)\nu_2(y)\right|\le\frac{1}{2}\sum\limits_{x,y}|\mu_1(x-y)\mu_2(y)-\nu_1(x-y)\nu_2(y)|$

$$=\frac{1}{2}\sum_x\sum_y|\mu_1(x)\mu_2(y)-\nu_1(x)\nu_2(y)|$$
$$\le\frac{1}{2}\sum_x\sum_y|\mu_1(x)\mu_2(y)-\mu_1(x)\nu_2(y)+\nu_2(y)\mu_1(x)-\nu_1(x)\nu_2(y)|$$
$$\le\frac{1}{2}\sum_x\sum_y\left(\mu_1(x)|\mu_2(y)-\nu_2(y)|+\nu_2(y)|\nu_1(x)-\mu_1(x)|\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_y|\mu_2(y)-\nu_2(y)|+\frac{1}{2}\sum_x|\nu_1(x)-\mu_1(x)|=\|\mu_1-\nu_1\|+\|\mu_2-\nu_2\|.$$

RMK: 因此 tv-d 在独立情形时特别有用.

Eg: 设 $\mu(1)=p=1-\mu(0)$. $\nu=\text{Poisson}(p)$. 则 $\|\mu-\nu\|\le p^2$.

Pf: $2\|\mu-\nu\|=\sum\limits_i|\mu_i-\nu_i|=|\mu(0)-\nu(0)|+|\mu(1)-\nu(1)|+\sum\limits_{k\ge2}\nu(k)$

$=e^{-p}-(1-p)+p-pe^{-p}+1-e^{-p}-pe^{-p}=2p(1-e^{-p})\le 2p^2$. ∎

Thm3.6.1 的另一个证明:

Pf: $P(X_{nk}=1)=p_{nk}=1-P(X_{nk}=0)$ $\sum p_{nk}=\lambda_n$

$d_{TV}(\sum_{k=1}^{n}X_{nk},\ Poisson(\lambda_n)) = d_{TV}(\sum_{k=1}^{n}X_{nk},\sum_{k=1}^{n}Y_{nk})$

1st Lemma $\leq \sum d_{TV}(X_{nk},Y_{nk}) \leq \sum p_{nk}^2 \leq (\max_{1\leq k\leq n} p_{nk})\sum p_{nk} \to 0$.

Hence: $|P(\sum X_{nk}\in A)-P(\sum Y_{nk}\in A)| \leq \sum p_{nk}^2$.

故 $|F(x)-\Phi(x)|\leq \sum p_{nk}^2$. F为$\sum X_{nk}$的d.f. Φ为$Poisson(\sum p_{nk})$的d.f.

RMK: 由stein方法: L.H.S $\leq (\lambda^{-1}\wedge 1)\sum p_{nk}^2$

Eg1: $X_1,\cdots X_n$ i.i.d $\sim Cauchy(0,1)$. 则 $\frac{S_n}{n}\overset{d}{=}X$.

Eg2: $X,X_1,\cdots X_n$, i.i.d 对称 r.v. $P(|X|>x)=cx^{-\alpha}$, $x\geq 1$. $0<\alpha<2$. 则$\exists Y$,

s.t. $\frac{S_n}{n^{1/\alpha}}\xrightarrow{d}Y$.

Pf: $f_{\frac{S_n}{n^{1/\alpha}}}(t)=\left(f_X\left(\frac{t}{n^{1/\alpha}}\right)\right)^n$ 令 $g(t)=1-f_X(t)$

则 $g(t)=\int_{|x|\geq 1}(1-e^{itx})\frac{\alpha}{2|x|^{\alpha+1}}dx=\alpha\int_1^\infty\frac{1-\cos|t|x}{x^{\alpha+1}}dx=\alpha|t|^\alpha\int_{|t|}^\infty\frac{1-\cos u}{u^{\alpha+1}}du$

易知 $\int_0^\infty\frac{1-\cos u}{u^{\alpha+1}}du<\infty$ 故 $g(t)\sim C_\alpha|t|^\alpha$, 其中 $C_\alpha=\alpha\int_0^\infty\frac{1-\cos u}{u^{\alpha+1}}du$,

$\therefore f_{\frac{S_n}{n^{1/\alpha}}}(t)\longrightarrow \exp\left(\lim_{n\to\infty}-ng\left(\frac{t}{n^{1/\alpha}}\right)\right)=e^{-|t|^\alpha C_\alpha}$

RMK: $\alpha=1$, 即为Eg1. $\alpha=2$, 即为之前正态的反例.

稳定分布:

Def: 称F(或f)是稳定的,若$\forall k\in\mathbb{N}$, $\exists C_k, \nu_k$ 使 $(f(t))^k=e^{i\nu_k t}f(C_k t)$

概率上即 $\frac{Y_1+\cdots+Y_k-\nu_k}{C_k}\overset{d}{=}Y$, $(Y_1,\cdots,Y_k,Y$ i.i.d$)$

例: 正态, Cauchy 均为稳定分布.

Thm: $\exists$ i.i.d r.v.列 $\{X_1,X_2,\cdots\}$ 以及$\{a_n\},\{b_n\}$ s.t. $\frac{S_n-a_n}{b_n}\xrightarrow{d}F$. 的充要条件是 F是稳定的.

$\Leftarrow$: 显然

$\Rightarrow$: 设F非退化的, $Z_n=\frac{S_n-a_n}{b_n}$ $S_n^j=X_{(j-1)n+1}+\cdots+X_{jn}$

则 $Z_{nk}=\dfrac{S_n^1+\cdots+S_n^k-b_{nk}}{a_{nk}} \Rightarrow a_{nk}Z_{nk}=(S_n^1-b_n)+\cdots+(S_n^k-b_n)+(kb_n-b_{nk})$

则 $a_{nk}Z_{nk}/a_n=\sum_{j=1}^{k}(S_n^j-b_n)/a_n+\dfrac{kb_n-b_{nk}}{a_n}$

By Type and Law Thm: $\dfrac{a_{nk}}{a_n}\to C_k$ $\dfrac{kb_n-b_{nk}}{a_n}\to \gamma_k$ $(n\to\infty)$.

前k项收敛于 $Y_1+\cdots+Y_k$，其中 Y_i 独立且与Y同分布.(分布为F).

又 $Z_{nk}\xrightarrow{d} Y$. 则F为稳定分布.

RMK: 由证明可知 稳定分布中 C_k 满足 $C_{mk}=C_mC_k$

稳定分布 ch.f. $f(t)=\exp\{itc-b|t|^{\alpha}(1+k\,\mathrm{sgn}(t)W_\alpha(t))\}$ 其中 $-1\le k\le 1$, $\alpha\in(0,2]$,

$$W_\alpha(t)=\begin{cases}\tan\frac{\pi\alpha}{2}, & \alpha\neq 1\\ \frac{2}{\pi}\log|t|, & \alpha=1.\end{cases}$$

Brownian运动中会碰见.

Cauchy分布($\alpha=1$, $c=k=0$), $N(\mu,\sigma^2)$, $p(x)=(2\pi x^3)^{-\frac{1}{2}}\exp\{-\frac{1}{2x}\}$, $x\ge 0$. $(\alpha=\frac{1}{2})$.

Thm: X属于某个指数 $\alpha\in(0,2)$ 的稳定分布的吸引场的充要条件:

(1) $\mathbb{P}(|X|>x)=x^{-\alpha}L(x)$. 其中L为缓变函数

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(X>x)}{P(|X|>x)}=\theta\in[0,1]$.

进一步，当X满足上述条件时，记 $S_n=X_1+\cdots+X_n$, $a_n=\inf\{x: P(|X|>x)\le \frac{1}{n}\}$

$b_n=nE(X1_{|X|\le a_n})$ 则 $\dfrac{S_n-b_n}{a_n}\xrightarrow{d} Y$.

EX:

1. 设 μ,ν 为概率测度 Prove: $\|\mu-\nu\|_{TV}=\inf\{P(X\neq Y): X\sim\mu, Y\sim\nu\}$.

2. 记 Kolmogorov距离和全变差距离: $d_K(\mu,\nu)=\sup\limits_x|\mu(-\infty,x]-\nu(-\infty,x]|$

$d_{TV}(\mu,\nu)=\sup\limits_{A\in\mathcal{B}}|\mu(A)-\nu(A)|$. Def: Wasserstein 距离:

$d_W(\mu,\nu)=\sup\limits_{h\in\mathcal{H}}\left|\int h\,d\mu(x)-\int h\,d\nu(x)\right|$ $\mathcal{H}=\{h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid |h(x)-h(y)|\le|x-y|\}$

Prove: (1) $d_K(\mu,\nu) \le d_{TV}(\mu,\nu)$ (2) 设 ν 具有 p.d.f. f $|f|\le C$, 则

$d_K(\mu,\nu) \le \sqrt{2C\cdot d_W(\mu,\nu)}$

3: $\exists t\neq 0$, s.t. $|Ee^{itX}|=1 \Leftrightarrow \exists\, a,b\in\mathbb{R}$, s.t. $P(X\in a\mathbb{Z}+b)=1$.

4: 设 $X, X_1, X_2\cdots$ 有矩母函数: $Ee^{tX}, Ee^{tX_1}, \cdots$ 若在某个非退化区间 I 上有:

$Ee^{tX_n}\to Ee^{tX}$, $\forall t\in I$ Prove: $X_n \xrightarrow{d} X$.

5: 设 $X, X_1, X_2\cdots$ i.i.d. r.v. Prove: $\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{n}}$ 依概率收敛 $\Leftrightarrow X=0$ a.s.

Pf: EX 3.4.2 + EX 3.4.3.

6: X, X_1, X_2 i.i.d $EX=0$ $EX^2=1$, 且 $X \stackrel{d}{=} \frac{1}{\sqrt2}X_1+\frac{1}{\sqrt2}X_2$ Prove: $X\sim N(0,1)$.

Pf of 4: 矩母函数唯一性定理: 若在某个区间上 $Ee^{tX}=Ee^{tY}<\infty$ 则 $X\stackrel{d}{=}Y$.

原因: $M(t)=Ee^{tX}<\infty$. 则 $M(t)$ 是 t 的解析函数 $\because EX^k t^k \le k!\,Ee^{tX}<\infty$.

$\therefore M^{(k)}(0)=EX^k \Rightarrow M(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{EX^k}{k!}t^k$. 故 $M(t)$ 解析. 由解析函数唯一性定理

可知 $M_X(t)=M_Y(t)$. $\forall t=is$ 也成立. 故由Fourier变换的唯一性可知 $X\stackrel{d}{=}Y$. (或 $M_X(t)=M_Y(t)$ $\forall t\ge 0$ 成立. 由Laplace逆变换唯一性). 由矩母函数唯一性定理

以及 $\frac{1}{u}\int_0^u (1-M_n(t))dt = \frac{1}{u}\int_0^u\int_{\mathbb{R}}(1-e^{tX_n})dF_n\,dt \ge \frac{1}{u}\int_0^u\int_{|x|>\frac{1}{u}}(1-e^{t/u})dF_n\,dt$

$=\frac{1}{u}\int_{x>\frac1u}\int_0^u(1-e^{t/u})dt\,dF_n \ge (e-2)(1-F_n(\frac{1}{u}))$. $\frac{1}{u}\int_{-u}^{0}(1-M_n(t))dt$

$\ge e F_n(-\frac{1}{u})$ 故 $\exists N$, $n>N$ 时 $P(|X_n|\le\frac{1}{u})<\varepsilon$. 故 X_n 胎紧

由Helly选择定理及唯一性定理可证.

稳定分布～

无穷可分分布 ～ Levy 过程

无穷可分分布.

独立平稳增量过程(Levy 过程)：Poisson 过程；Brownain 运动.

平稳增量：$t_k - t_{k-1} = t$. 则 $X(t_k) - X(t_{k-1}) \overset{d}{=} X(t) - X(0)$.

设 $X(0)=0$, 则 $X(1) = \sum_{k=1}^{n} X(\frac{k}{n}) - X(\frac{k-1}{n}) \triangleq \sum_{k=1}^{n} Y_k$. 则 $Y_1, \cdots, Y_n$ i.i.d.

Def：称 $f(t)$ 为 infinitely divisible (distributions) if $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists f_n(t)$, s.t.
$f(t) = (f_n(t))^n$.

RMK：Levy 过程每一点的分布都为无穷可分分布.

Thm：设 F 为 d.f. 则 $\exists$ 组列 $\{X_{nk}, n=1,2,\cdots, k=1,\cdots n\}$.
满足 (1) $\forall n$, X_{nk}, $k=1,2,\cdots,n$ i.i.d.
(2) $X_{n1} + \cdots + X_{nn} \xrightarrow{d} F$ 的充要条件是 F 为 i.d. 的

Pf：$\Leftarrow$ 显然

$\Rightarrow$：要证：$\forall k$, $\exists F_k$ s.t. $F = F_k^{k*}$, $k=2$ 时.

$S_{2n} = (X_{2n,1} + \cdots + X_{2n,n}) + (X_{2n,n+1} + \cdots + X_{2n,n}) := Y_n + Y_n'$

claim：Y_n 胎紧：$P^2(Y_n > x) = P(Y_n > x, Y_n' > x) \le P(S_{2n} > 2x)$

$S_{2n} \xrightarrow{d} F \Rightarrow S_{2n}$ 胎紧 $\Rightarrow Y_n$ 胎紧. ∴ 故存在子列 $\{Y_{n_k}\}$. $Y_{n_k} \xrightarrow{d} G$ 则
$S_{2n_k} \xrightarrow{d} G^{2*}$ ∴ $F = G^{2*}$.

Thm：设独立 r.v. 组列 $\{X_{nk}\}$ 满足无穷小条件，则 $\sum X_{nk}$ 的极限分布族与无穷可分族重合.

Eg：稳定过程：$e^{-c|t|^\alpha}$

Poisson $f(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$ Gamma：$f(t) = (1 - \frac{it}{\beta})^{\alpha}$

Thm (Levy-khinchin 表示)：$f(t)$ 为无穷可分 $\Leftrightarrow$
$f(t) = \exp\{ict - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \int (e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}) \mu(dx)\}$，其中 μ 为 Levy 测度.

满足 $\mu(\{0\})=0$，且 $\int \frac{x^2}{1+x^2}\mu(dx)<\infty$.

RMk：对应而有过程分解，即 Levy过程可分解为 Brownian运动 + Poisson过程之和.

Radon-Nikodym 定理：

$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ （绝对连续）． $F=\underset{\text{离散}}{F_d}+\underset{\text{绝对连续}}{F_{ac}}+\underset{\text{奇异}}{F_s}$ 　广义分布 分解 $\Updownarrow$

$\mu_F(A)=\int_A f(u)\,d\mu$ 　$\mu_F=\mu_{F_d}+\mu_{F_{ac}}+\mu_{F_s}$． 测度 分解．

故 $\mu_F \ll L$ （Lebesgue 测度）． $\mu(A)=\int_A f\,d\nu$， $\mu_1-\mu_2=\int_A (f_1-f_2)\,d\nu$

$\mu_1-\mu_2$ 具有 σ-可加性，称为符号测度

符号测度：$(\Omega,\mathcal{F})$ 上集合函数 φ：有 $\varphi(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(A_k)$ 　$\varphi:\mathcal{F}\longrightarrow(-\infty,\infty]$．

例1：μ_1,μ_2 为有限测度 $\varphi=\mu_1-\mu_2$ 为符号测度．

例2：X 为 r.v. 　$\varphi(A)=\int_A X\,dP$，X 为扩义可积．（$\int X^-dP<\infty$）

In fact．P 可换为任意测度，X 可换成扩义可积函数．

符号测度对于单调减集合列仍然可换序．

Thm：（Jordan-Hahn 分解）：$\exists D\in\mathcal{F}$，s.t．$\forall E\subset D$，$\varphi(E)\geq 0$，而 $\forall E\subset D^c$，$\varphi(E)\leq 0$

RMK：$\Omega=D+D^c$，$\varphi(D)=\sup\{B:B\in\mathcal{F}\}$ 　$\varphi(D^c)=\inf\{B:B\in\mathcal{F}\}$．

$\varphi(B)=\varphi(BD)+\varphi(BD^c)\leq\varphi(BD)\leq\varphi(BD)+\varphi(B^cD)\leq\varphi(D)$

同理 $\varphi(B)\geq\varphi(D^c)$，

记 $\varphi^+(A)=\varphi(AD)$ 　$\varphi^-(A)=-\varphi(AD^c)$ 　故 $\varphi=\varphi^+-\varphi^-$，$\varphi^+$，$\varphi^-$ 为测度

$\varphi=\varphi^+-\varphi^-$ 为 Jordan 测度．φ^+，φ^- 的支撑集中不相容，φ^+ 与 φ^- 相互奇异．

类比随机变量．

$\varphi_1\perp\varphi_2$

$\varphi^+(A)=\sup\{\varphi(B):B\subset A,B\in\mathcal{F}\}$． $\varphi^-(A)=\inf\{\varphi(B):B\subset A,B\in\mathcal{F}\}$．

$|\varphi|=\varphi^++\varphi^-$ 称为变差测度，$|\varphi|(\Omega)$ 称为全变差．

类比：有界变差函数 = 两个单调函数之差．

$\Updownarrow$ 　　　　$\Updownarrow$

符号测度 = 两个测度之差．

注：$\varphi=\varphi^+-\varphi^-$ 分解是唯一的，但 D 不唯一．

Eg: $\varphi(A)=\int_A X\,dP$ $\varphi^+(A)=\int_A X^+dP$ $\varphi^-(A)=\int_A X^-dP$ $D=\{X\geq 0\}$ or $\{X>0\}$

Proof of Jordan-Hahn decomposition:

不妨$-\infty\leq\varphi(A)<\infty$、$\partial=\sup\{\varphi(A): A\in\mathcal{F}\}$. 只需证：$\exists D$, s.t. $\varphi(D)=\partial$

由∂定义：取$A_n\in\mathcal{F}$ s.t. $\varphi(A_n)\geq\partial-2^{-n}$，令$B_n=\bigcup_{k\geq n}A_k$

则$B_n\downarrow\limsup_{n\to\infty}A_n$；若$A, A'\in\mathcal{F}$，若$\varphi(A)\geq\partial-\varepsilon$，$\varphi(A')\geq\partial-\varepsilon'$.

则$\varphi(A\cup A')=\varphi(A)+\varphi(A')-\varphi(A\cap A')\geq 2\partial-\varepsilon-\varepsilon'-\partial=\partial-\varepsilon-\varepsilon'$.

故$\varphi(B_n)\geq\partial-\sum_{k\geq n}\frac{1}{2^k}=\partial-\frac{1}{2^{n-1}}$. 故 $\liminf_{n\to\infty}\varphi(B_n)\geq\partial$

又$\varphi(B_n)\leq\partial$. 故$\lim_{n\to\infty}\varphi(B_n)=\partial=\varphi(\lim_{n\to\infty}B_n)=\varphi(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k)$. ▨

函数F的绝对连续：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall(a_i,b_i)$ $i=1,2,\dots n$. 只要$\sum|a_i-b_i|<\delta$

就有$\sum|F(b_i)-F(a_i)|<\varepsilon$.

推广 $\Rightarrow A\in\mathcal{F}$，$\lambda(A)<\delta$. $\Rightarrow\int_A dF<\varepsilon$

$\Rightarrow\lambda(A)=0\Rightarrow\mu_F(A)=\int_A dF=0$

Def ①(绝对连续)：若$|\varphi_2|(A)=0\Rightarrow|\varphi_1|(A)=0$，则称 符号测度 φ_1关于φ_2绝对连续，记作$\varphi_1<<\varphi_2$

②(等价)：若$\varphi_1<<\varphi_2$，$\varphi_2<<\varphi_1$ 则称φ_1，φ_2等价，记作$\varphi_1\sim\varphi_2$

Thm2：设φ为一个有限的符号测度. 设P为概率测度 则$\varphi<<P$的充要条件是：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，只要$P(A)<\delta$. 则$|\varphi|(A)<\varepsilon$

Pf：充分性：$P(A)=0$，$\forall\varepsilon>0$，$|\varphi|(A)<\varepsilon\Rightarrow|\varphi|(A)=0$.

必要性 反证：$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall\delta>0$，$\exists P(A)<\delta$，$|\varphi|(A)\geq\varepsilon_0$.

$\forall n\in\mathbb{N}$，$\exists A_n\in\mathcal{F}$，$\exists P(A_n)<\frac{1}{n^2}$ 但$|\varphi|(A)\geq\varepsilon_0$

$\sum P(A_n)<\infty$. 故由B-C引理 $P(\limsup A_n)=0$

但$|\varphi|(\limsup A_n)\geq\limsup|\varphi|(A_n)\geq\varepsilon_0$. 矛盾!

Fatou (要φ有限).

RMK：φ是σ有限时 上述命题不一定成立.

反例：$\Omega=\mathbb{N}$，$\mathcal{F}=2^{\Omega}$ φ为计数测度 $P(\{n\})=\frac{6}{\pi^2}\frac{1}{n^2}$. $n\in\mathbb{N}$.

φ为σ-有限. $P(A)=0 \Rightarrow A=\emptyset \Rightarrow |\varphi|(A)=0$ 故 $\varphi << P$.

但：$\exists \varepsilon_0=1, \forall \delta>0, \exists A=\{n\}, \sum_{n} \frac{1}{n^2}<\delta$. $P(A)<\delta$, 但$|\varphi|(A)=1\geq\varepsilon_0$ 回.

· $\varphi(A)=\int_A X dp$ 则$\varphi << P$.

Def1: F奇异 $\Leftrightarrow F'=0$ a.s. $\Leftrightarrow \exists N\in\mathcal{F}$, $\lambda(N)=0$, $\mu_F(N^c)=0$. λ为Lebesgue测度

Def2: φ为σ有限符号测度，称φ奇异，若$\exists N\in\mathcal{F}$. $P(N)=0$, $\varphi(N^c)=0$.

Thm3(Lebesgue分解定理)：设$(\Omega,\mathcal{F},P)$上符号测度φ是σ有限的 则存在唯一关于P绝对连续的符号测度φ_c及P奇异的符号测度φ_s s.t. $\varphi=\varphi_c+\varphi_s$

此时φ_c是一个有限r.v. X的不定积分，且X在P等价意下是唯一的.

RMk: 若$\varphi << P$. 且 $\varphi \perp P$. 则 $\varphi\equiv 0$.

Thm4(Radon-Nikodyn定理)：设$\varphi << P$. 则$\exists$ r.v. X s.t. $\varphi(A)=\int_A X dp$. 且X在a.s.意义下的唯一 X称为φ关于P的导数. $X=\frac{d\varphi}{dp}$.

RMk: ①结论对$(\Omega,\mathcal{F},\mu)$也成立. μ为σ-有限的.

② 记忆：$\varphi<<\mu \Leftrightarrow \exists$可测f. $\varphi(A)=\int f d\mu$. $f=\frac{d\varphi}{d\mu}$.

Pf: 先证唯一性：

Thm3的唯一性：$\varphi_c+\varphi_s=\varphi_c'+\varphi_s' \Rightarrow \varphi_c-\varphi_c'=\varphi_s'-\varphi_s$. 易知$\varphi_c-\varphi_c'<<P$.

设：$P(N_1)=0$. $P(N_2)=0$, $|\varphi_s(N_1^c)|=0$, $|\varphi_s'(N_2^c)|=0$. $\Rightarrow P(N_1\cup N_2)=0$.

$|\varphi_s|(N_1^c\cap N_2^c)\leq|\varphi_s|(N_1^c)=0$. $|\varphi_s'|(N_1^c\cap N_2^c)=0 \Rightarrow |\varphi_s-\varphi_s'|((N_1\cup N_2)^c)=0$

故$\varphi_s-\varphi_s'\perp P$. 故 $\varphi_c-\varphi_c'=\varphi_s'-\varphi_s\equiv 0$.

Thm4的唯一性：$\int_A X dp=\int_A X' dp$ $\forall A\in\mathcal{F}$. 考虑 $P(X-X'\geq\varepsilon)$

则 $P(X-X'\geq\varepsilon)=0$ 同理 $P(X-X'\leq-\varepsilon)=0 \Rightarrow P(|X-X'|\geq\varepsilon)=0$ $\forall\varepsilon>0$

故 $X=X'$ a.s.

考虑这样的r.v.构成的集合

Thm3: 存在性：不妨设 φ 为有限测度，令 $\mathcal{H}=\{Y\in\mathcal{F}: Y\geq 0,\ \int_A Y\leq\varphi(A)\ \forall A\in\mathcal{F}\}$.

记 $\partial=\sup\{\int Y,\ Y\in\mathcal{H}\}$ 设 $\exists Y_n\in\mathcal{H}$ s.t. $\int Y_n\to\partial$. 令 $X_n=\max_{1\leq k\leq n} Y_k$

Claim: $X_n\in\mathcal{H}$ $\int_A X_1\vee X_2=\int_{A\cap\{X_1>X_2\}}X_1+\int_{A\cap\{X_1\leq X_2\}}X_2\leq\varphi(A\cap\{X_1>X_2\})+\varphi(A\cap\{X_1\leq X_2\})=\varphi(A)$. 易知 $\int X_n\to\partial$

令 $X=\overline{\lim_{n\to\infty}}X_n$ 则 $X=\sup_k Y_k$. 则 $X\in\mathcal{H}$ 且 $\int X=\partial$

($\int_A X=\lim\int X_n\leq\varphi(A)$. 单调收敛).

记 $\varphi_c(A)=\int_A X$. $\varphi_s=\varphi-\varphi_c$. 下证 $\varphi_s\perp P$，易知 φ_s 为测度 ($\varphi\geq\varphi_c$).

令 $\varphi_n=\varphi_s-\frac{1}{n}P$. 考虑 φ_n 之 Hahn 分解 $\Omega=D_n+D_n^c$. s.t. $\varphi_n(AD_n)\geq 0$.

φ_s 为测度 $\varphi(AD_n^c)\leq 0$. $D=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n$ 下证：$P(D)=0$；$\varphi_s(D^c)=0$；

φ_n 为符号测度 $0\leq\varphi_s(D^c)\leq\varphi_s(D_n^c)=\varphi_n(D_n^c)+\frac{1}{n}P(D_n^c)\leq\frac{1}{n}P(D_n^c)\leq\frac{1}{n}$. 令 $n\to\infty$.

为证 $P(D)=0$ 只需 $P(D_n)=0$，$\forall n\geq 1$；

$\forall A\in\mathcal{F}$. $\int_A X+\frac{1}{n}1_{D_n}=\varphi_c(A)+\frac{1}{n}P(AD_n)=\varphi_c(A)+\varphi_s(AD_n)-\varphi_n(AD_n)$

$\leq\varphi_c(A)+\varphi_s(A)=\varphi(A)$ 故 $X+\frac{1}{n}1_{D_n}\in\mathcal{H}$. 由 X 之定义知：$\int_\Omega X+\frac{1}{n}1_{D_n}\leq\int_\Omega X$.

故 $\frac{1}{n}P(D_n)=0\Rightarrow P(D_n)=0$. ▨.

Thm4: (即为测度变换：$\mu\ll P$. μ 为测度. Y 为r.v. $\int Y d\mu$ 存在.

则 $\int_A Y d\mu=\int_A Y\frac{d\mu}{dP}\cdot dP$.) Pf of 存在性. 考虑 φ 之 Lebesgue 分解.

$\varphi=\varphi_c+\varphi_s$. 又. 设 $\varphi_s(A^c)=0$, $\therefore P(A)=0$. 又 $\varphi\ll P$. 故 $\varphi(A)=0$.

又 $\varphi_c\ll P\Rightarrow\varphi_c(A)=0\Rightarrow\varphi_s(A)=0\Rightarrow\varphi_s(\Omega)=0\Rightarrow\varphi_s=0$.

RMK: ① Hahn-Jordan 分解与 Lebesgue 分解之证明中存在性之来源都是极限 or sup.

② 进一步：若 ν,μ σ-有限测度 则 $\exists\{A_j\}\subset\mathcal{F}$, $\mu(A_j)<\infty$, $\nu(A_j)<\infty$ 且 $X=\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j$

记 $\mu_j(E)=\mu(E\cap A_j)$. ν_j. 则 $d\nu_j=d\lambda_j+f_j d\mu_j$. $\lambda_j\perp\mu_j$. 令 $\lambda=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j$. $f=\sum_{j=1}^{\infty}f_j$.

则 $d\nu=d\lambda+fd\mu$. 且 $\lambda\perp\mu$. ▨

若 ν 为 σ 有限符号测度. μ -σ 有限正测度 且 $\nu=\nu^+-\nu^-$, $d\nu^+=d\lambda^++f^+d\mu$, $d\nu^-=d\lambda^-+f^-d\mu$

$\therefore d\nu=d\lambda+fd\mu$.

条件期望：(鞅，马氏链，均由条件期望定义，鞅方法应用很广)。

$(\Omega,\mathcal{F},P)$，$\{B_i: i=1,2\cdots n\}$为Ω的分割．$\mathcal{G}=\sigma\{B_i: i=1,2\cdots n\}$．

$L^2(\Omega,\mathcal{G},P)=\{\sum_{i=1}^{n}c_iI_{B_i},\ c_i\in\mathbb{R}\}$ 求I_A为$L^2(\Omega,\mathcal{G},P)$上的投影．

内积：$(X,Y)=EXY$ 若$(X-Y,Z)=0$，则 $\|X-Y\|^2=\inf\{\|X-Z\|^2, Z\in\cdots\}$

$\|I_A-\sum a_iI_{B_i}\|^2=\inf\{\|I_A-\sum c_iI_{B_i}\|^2,\ c_i\in\mathbb{R}\}$．

In fact：$\|I_A-\sum c_iI_{B_i}\|^2=E(I_A-\sum c_iI_{B_i})^2=E(\sum(I_A-c_i)I_{B_i})^2$

$=\sum E(I_A-c_i)^2I_{B_i}=\sum(c_i^2P(B_i)-2c_iP(AB_i)+P(AB_i))$ 当$c_i=\frac{P(AB_i)}{P(B_i)}=P(A|B_i)$

时取min． 故I_A在$L^2(\Omega,\mathcal{G},P)$上投影为：$\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)I_{B_i}=E(I_A|\mathcal{G})$

$(X-E(X|\mathcal{G}),\ Z)=0$，$\forall Z\in L^2(\Omega,\mathcal{G},P)$

$\therefore\ \int XZ\,dP=\int E(X|\mathcal{G})Z\,dP$． $\forall Z\in L^2(\Omega,\mathcal{G},P)$ $\Leftrightarrow$ Z可由$\sum c_iI_{B_i}$逼近！

$\int_B X\,dP=\int_B E(X|\mathcal{G})\,dP$． $\forall B\in L^2(\Omega,\mathcal{G},P)$ 故引入条件期望的定义：

Def：设X为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上r.v. $E|X|<\infty$．$\mathcal{G}$为$\mathcal{F}$的sub σ-field．则$E(X|\mathcal{G})$为满足下列的r.v. Y：(i) $Y\in\mathcal{G}$ (ii) $\forall B\in\mathcal{G}$，有$\int_B X\,dP=\int_B Y\,dP$．

RMK：①存在性由R-N定理．记$\nu(A)=\int_A X\,dP$，则$\nu\ll\mu$ $\forall A\in\mathcal{G}$

故$\frac{d\nu}{dP}=Y$．则$Y\in\mathcal{G}$．②唯一性中类似R-N定理的唯一性．

③ $E(X|\sigma(Y))\triangleq E(X|Y)\in\sigma(Y)$ 故 $E(X|Y)=g(Y)$，g可测．

☆Prop：设$E|X|<\infty$，$E|Z|<\infty$．$Z\in\mathcal{G}$．$\mathcal{D}$为π系．$\sigma(\mathcal{D})=\mathcal{G}$．若 $EZ=EX$，

$\int_A Z\,dP=\int_A X\,dP$ $\forall A\in\mathcal{D}$．则$Z=E(X|\mathcal{G})$ a.s.

Pf：$\{A:\int_A Z\,dP=\int_A X\,dP\}$ 构成λ-系$\mathcal{L}$ (π-λ Thm：$\mathcal{D}\subset\mathcal{L}\Rightarrow\sigma(\mathcal{D})\subset\mathcal{L}$)．

证明条件期望有时会用此命题(如Martingale中Thm 4.6.8)．

Eg1：$X\in\mathcal{F}$，$E(X|\mathcal{F})\overset{a.s.}{=}X$；$X\perp\!\!\!\perp\mathcal{F}$，则$E(X|\mathcal{F})\overset{a.s.}{=}EX$；特别的：$E(C|\mathcal{F})=C$，$E(X|\mathcal{F}_0)=EX$，$\mathcal{F}_0=\{\emptyset,\Omega\}$

第二个pf：$\int_B EX=EXEI_B=EXI_B=\int_B X$．

Eg2：X,Y独立 $E(\varphi(X,Y)|X=x)=E\varphi(x,Y)$ a.s. P_X．即两边不相等的点关于P_X测度为0．

Pf：L.H.S$=E(\varphi(x,Y)|X=x)=E\varphi(x,Y)$ a.s．

严格的pf：记$g(x)=E\varphi(x,Y)$，只需证：$E(\varphi(X,Y)|X)=g(X)$ a.s．

$g(X)\in\sigma(X)$. ✓.

即 $g(X)$ 为 $\varphi(X,Y)$ 关于 $\sigma(X)$ 之条件期望.

只证 $\int_B g(X)=\int_B \varphi(X,Y)$ $\forall B\in\sigma(X)$. 又 $B\in\sigma(X)$ 故 $\exists C\in\mathcal{B}$. s.t. $B=\{X\in C\}$

积分变换 $\int_B \varphi(X,Y)=\int_{X\in C}\varphi(X,Y)=E\varphi(X,Y)I_{(X\in C)}=\iint \varphi(x,y)I_{\{x\in C\}}dF_x dF_y$

Fubini $=\int\left(\int\varphi(x,y)dF_y\right)I_{\{x\in C\}}dF_x=\int g(x)I(x\in C)dF_x=\int_{X\in C}g(x)dF_x=\int_B g(X)$

Eg3: 设 $\{B_i\}$ 为 Ω 的分割. $\mathcal{G}=\sigma\{B_i\}$. 则 $E(X|\mathcal{G})=\sum_i \frac{E(XI_{B_i})}{P(B_i)}I_{B_i}$.

Pf 只需 : $E(X|\mathcal{G})=\frac{E(XI_{B_i})}{P(B_i)}$ on B_i

Eg4: 在 $((0,1),\mathcal{B}(0,1))$ 上. $X(\omega)=\omega$. $\omega\in(0,1)$ $Y(\omega)=2I(\omega\in(0,\frac14))+3I(\omega\in[\frac14,1))$

求 $E(X|Y)$

Pf: $\sigma(Y)=\{\varnothing,(0,1),(0,\frac14),[\frac14,1)\}$ 故 $E(X|\sigma(Y))=\frac{E(XI_{(0,\frac14)})}{\frac14}I_1+\frac{E(XI_{[\frac14,1)})}{\frac34}I_2$

$=4\times\frac12\times(\frac14)^2I_1+\frac43\times\frac12(1-(\frac14)^2)I_2=\frac18 I_1+\frac58 I_2=\frac18 I(Y=2)+\frac58 I(Y=3)$

RMK: 若 $Y=2I(\omega\in(0,\frac14))+3I(\omega\in[\frac14,\frac12))$ 则 $\sigma(Y)=\{\varnothing,(0,1),(0,\frac14),[\frac14,\frac12),[\frac12,1)\}$

则 $E(X|Y)=\frac18 I(Y=2)+\frac38 I(Y=3)+\frac34 I(Y=0)$ 故 $\sigma(Y)$ 信息越丰富对 X 之估计越精细! 故 Lebesgue 给之对可测函数值近似函数其实也是条件期望.

Eg5: $(X,Y)\sim f(x,y)$ (p.d.f) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 可测. 求 $E(g(X)|Y)$

解: 法一: 先猜: $E(g(X)|Y=y)=\int g(x)f_{X|Y}(x|y)dx=\int g(x)\frac{f(x,y)}{\int f(x,y)dx}dx$

记 $h(y)=\int g(x)f(x,y)dx\Big/\int f(x,y)dx$. $\forall A\in\sigma(Y)$ 设 $A=Y^{-1}(B)$

而 $E(h(Y);A)=\int_B h(y)f_Y(y)dy=\int_B h(y)\int f(x,y)dx\,dy=\int_B\int g(x)f(x,y)dx\,dy$

$=\int\int g(x)f(x,y)1_B(y)dy\,dx=E(g(X)1_B(Y))=E(g(X);A)$

法二: $\int_B h(Y)=\int_B g(X)$ $\forall B\in\sigma(Y)$. 设 $B=Y^{-1}(C)$, $C\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$. 本可取 $C=(-\infty,x]$ 或 $[x,+\infty)$ (构成π系)

则 $\int_{Y\in C}h(Y)=\int_{Y\in C}g(X)$ 即 $\int_C h(y)f_Y(y)dy=\iint g(x)1_{y\in C}f(x,y)dxdy$

$=\int_C\left(\int g(x)f(x,y)dx\right)dy$ 待定系数法.

变式 ① $X,Y\sim f(x,y)$ 求 $E(X|X+Y)$, 写出 $(X,X+Y)$ 之联合 pdf.

② X,Y 独立 $\sim f(t)$, 设 $E(X|X\wedge Y)=h(X\wedge Y)$.

条件期望：待定系数法.（类数理统计中完全统计量之证明）.

$\int_{X\wedge Y\in C} X = \int_{X\wedge Y\in C} h(X\wedge Y) \quad \forall C\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \int_{X\wedge Y>u} X = \int_{X\wedge Y>u} h(X\wedge Y)$. $\forall u\in\mathbb{R}$.

$\text{LHS}=E\,X\,I(X>u, Y>u) = E\,X\,I(X>u)\,I(Y>u) \overset{\text{独立}}{=} E\,X\,I(X>u)\,P(Y>u) = (1-F(u))\int_u^\infty x f(x)\,dx$.

而 $P(X\wedge Y>u) = (P(X>u))^2 \quad \therefore X\wedge Y \sim 2f(x)(1-F(x))$

$\therefore (1-F(u))\int_u^\infty x f(x)\,dx = \int_u^\infty 2h(x)f(x)(1-F(x))\,dx$ 再对 u 求导

$-(1-F(u))\,u f(u) - f(u)\int_u^\infty x f(x)\,dx = -2h(u)f(u)(1-F(u))$

故可取 $h(u) = \frac{u}{2} + \frac{\int_u^\infty x f(x)\,dx}{2(1-F(u))}$.

Eg6: $X_1,\cdots,X_n$ i.i.d. $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$ 求 $E(X_j|S_n)$, $j=1,2\cdots n$

解: $E(X_j|S_n) = \frac{1}{n}E(S_n|S_n) = \frac{1}{n}S_n$, 进一步 $E(\frac{S_{n-1}}{n-1}|S_n) = \frac{S_n}{n}$. $E(\frac{S_k}{k}|S_n) = \frac{S_n}{n}$.

故 $\frac{S_n}{n}, \frac{S_{n-1}}{n-1}, \cdots, \frac{S_1}{1}$ 为倒向鞅.

条件期望之性质:

① $E(aX+bY|\mathcal{F}) = aE(X|\mathcal{F}) + bE(Y|\mathcal{F})$ ② $X\geq Y \Rightarrow E(X|\mathcal{F}) \geq E(Y|\mathcal{F})$.

③ $E(E(X|\mathcal{F})) = EX \leq E|X|$. $E|E(X|\mathcal{F})| \leq E(E(|X|\,|\mathcal{F})) = E|X|$.

条件期望之收敛定理:

① 若 $0\leq X_n \uparrow X$ 则 $E(X_n|\mathcal{G}) \uparrow E(X|\mathcal{G})$

② 若 X 可积 则 $E(\liminf X_n|\mathcal{G}) \leq \liminf E(X_n|\mathcal{G})$

③ $E|Y|<\infty$, $|X_n|\leq Y$, 且 $X_n\to X$, a.s. 则 $E(X_n|\mathcal{G}) \to E(X|\mathcal{G})$ a.s.

Pf: ① $0\leq E(X_n|\mathcal{G})\uparrow$ (由性质②.) 设极限为 Z, 易知 $Z\in\mathcal{G}$

$\int_B Z = \int_B \lim_{n\to\infty} E(X_n|\mathcal{G}) \overset{\text{单调收敛}}{=} \lim_{n\to\infty}\int_B E(X_n|\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty}\int_B X_n \overset{\text{单调收敛}}{=} \int_B X$.

RMK!! ③ 中 $X_n\to X$ a.s. 不能换成 $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

本质: ①②③ 中之条件对于 $\forall A\in\mathcal{G}$, $X1_A$; X_n1_A 仍满足相应条件.

(2) $X\geq 0 \Rightarrow \exists Y\in\mathcal{G}$, $\int_B X = \int_B Y \quad \forall B\in\mathcal{G}$:

非负型一列单增有界收敛定理: $X_n\uparrow \Rightarrow Y_n\uparrow$ a.s. 且 $Y=\lim_{n\to\infty} Y_n\in\mathcal{G}$.

Pf: 取 $X_n=X\wedge n$. $\Rightarrow Y_n=E(X_n|\mathcal{G})$ a.s.

可证.

条件期望特别之性质

1. $X\in\mathcal{G}$, X, XY 可积, 则 $E(XY|\mathcal{G})=XE(Y|\mathcal{G})$.

2. $E(XE(Y|\mathcal{G}))=E(YE(X|\mathcal{G}))=E(E(X|\mathcal{G})E(Y|\mathcal{G}))$ 条件期望的自伴性

3. $\mathcal{G}_1\subseteq\mathcal{G}_2\subset\mathcal{F}$, $E(E(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2)=E(E(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1)=E(X|\mathcal{G}_1)$.

Pf: 1. 由单调收敛及线性性, 只需证 $X=I_A$, $A\in\mathcal{G}$ 时.

只需: $\int_B XY=\int_B XE(Y|\mathcal{G})$ $\forall B\in\mathcal{G}$

L.H.S $=\int_{A\cap B}Y$, R.H.S $=\int_{A\cap B}E(Y|\mathcal{G})$, $A\cap B\in\mathcal{G}$. $\square$

2. $E(XE(Y|\mathcal{G}))=E(E(XE(Y|\mathcal{G})|\mathcal{G}))=E(E(X|\mathcal{G})(E(Y|\mathcal{G})))$ $\square$

RMK: 由1: 两边取E, 则 $E(XY)=E(E(XY|\mathcal{G}))=E(XE(Y|\mathcal{G}))$

故 $E((Y-E(Y|\mathcal{G}))X)=0$, 故 $E(Y|\mathcal{G})$ 是 Y 的投影.

故 $E(Y|\mathcal{G})$ 是 Y 在 $L^2(\mathcal{G})$ 中具有最小均方误差的估计.

2的几何意义: $(X,E(Y|\mathcal{G}))=(Y,E(X|\mathcal{G}))\Rightarrow (X,T(Y))=(T(X),Y)$. $T=E(\cdot|\mathcal{G})$

则条件期望是一个自伴算子. 故而Parseval恒等式 即Fourier变换的自伴性也可由条件期望证明.

3. 对于一般的 $\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2$. $E(E(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2)\neq E(E(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1)$

例: $\Omega=\{0,1,2\}$, $\mathcal{F}=2^{\Omega}$. $\mathcal{G}_1=\{\emptyset,\Omega,\{0,1\},\{2\}\}$ $\mathcal{G}_2=\{\emptyset,\Omega,\{0,2\},\{1\}\}$

$P(0)=\frac{1}{2}$, $P(1)=\frac{1}{3}$, $P(2)=\frac{1}{6}$. $X=I_{\{2\}}$

则 $E(X|\mathcal{G}_1)=X$ $E(X|\mathcal{G}_2)=\frac{1}{4}I_{\{0,2\}}$, $(E(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1)=\frac{3}{20}I_{\{0,1\}}+\frac{1}{4}I_{\{2\}}$

推论: X可积, $\mathcal{G}_1\subset\mathcal{G}_2$ $E(X|\mathcal{G}_1)=E(X|\mathcal{G}_2)$ a.s. $\Leftrightarrow E(X|\mathcal{G}_2)\in\mathcal{G}_1$

$\Rightarrow$: 显然; $\Leftarrow$ $E(X|\mathcal{G}_1)=E(E(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1)=E(X|\mathcal{G}_2)$

T为任意指标集：则 $E(Y|X_t, t\in T) = E(Y|X_t, t\in S)$ S为T之可数集.

$\inf\limits_{c} E(X-c)^2 = E(X-EX)^2$. $\inf\limits_{Z\in\mathcal{G}} E(X-Z)^2 = E(X-E(X|\mathcal{G}))^2$

$Var(X|\mathcal{G}) = E((X-E(X|\mathcal{G}))^2|\mathcal{G})$ 则 $Var(X) = E(Var(X|\mathcal{G})) + Var(E(X|\mathcal{G}))$

(条件期望是局部性质)：设$\mathcal{G},\mathcal{H}$为两个子σ域. $E|X|, E|Y| < \infty$.
设 $A\in\mathcal{G}\cap\mathcal{H}$ 且 $\mathcal{G}\cap A = \mathcal{H}\cap A$ 在A上有 $X=Y$ a.s. 则在A上
$E(X|\mathcal{G}) = E(Y|\mathcal{H})$ a.s.

Pf: $I_A E(X|\mathcal{G}), I_A E(Y|\mathcal{H}) \in \mathcal{G}\cap\mathcal{H}$:

In fact: $I_A\in\mathcal{G}$, $E(X|\mathcal{G})\in\mathcal{G}$. $\therefore I_A E(X|\mathcal{G})\in\mathcal{G}$ $\{I_A E(X|\mathcal{G}) > x\} = A\cap\{E(X|\mathcal{G})>x\}$
$\in A\cap\mathcal{G} = A\cap\mathcal{H}\in\mathcal{H}$. 故 $I_A E(X|\mathcal{G})\in\mathcal{H}$. $\square$

测度论之方法证明 $X=Y$ a.s.

$B = A\cap\{E(X|\mathcal{G}) > E(Y|\mathcal{G})\} = \{I_A E(X|\mathcal{G}) > I_A E(Y|\mathcal{G})\}\in\mathcal{G}\cap\mathcal{H}$

$$E(E(X|\mathcal{G})I_B) = E(E(XI_B|\mathcal{G})) = EXI_B = EYI_B = E(E(Y|\mathcal{H})I_B)$$

又 on B $E(X|\mathcal{G}) > E(Y|\mathcal{H})$ 故 $P(B)=0$

同理 $P(\{E(X|\mathcal{G}) < E(Y|\mathcal{H})\}) = 0$. 故 $E(X|\mathcal{G}) = E(Y|\mathcal{H})$ a.s.

Eg: $X\in L^1$. 则在A上 a.s. 有 $E(X|\sigma(\mathcal{G},A)) = \dfrac{E(XI_A|\mathcal{G})}{E(I_A|\mathcal{G})}$ a.s.

Pf: 即证: $E(X|\sigma(\mathcal{G},A))I_A = \dfrac{E(XI_A|\mathcal{G})}{E(I_A|\mathcal{G})} I_A$

$\Leftrightarrow$ $E(X|\sigma(\mathcal{G},A))I_A E(I_A|\mathcal{G}) = E(XI_A|\mathcal{G})I_A$

两边均 $\in\sigma(\mathcal{G},A)$. 只需证 两边在$\sigma(\mathcal{G},A)$之任意集合上积分相等
$\forall B\in\sigma(\mathcal{G},A)$, (记左边为$L$, 右边为$R$); 注意 $\sigma(\mathcal{G},A) = \{B_1\cap A\cup B_2\cap A^c;$
$B_1, B_2\in\mathcal{G}\}$ $\int_B L\,dp = \int_B R\,dp \Leftrightarrow$ 注意 $\int_{B_1\cap A^c} L = 0$ $\int_{B_1\cap A} L = \int_{B_1} LI_A = \int_{B_1} L$.

只需 $\forall B\in\mathcal{G}$. $\int_B L\,dp = \int_B R\,dp$.

即: $E(E(X|\sigma(\mathcal{G},A))I_A E(I_A|\mathcal{G})I_B) = E(E(XI_A|\mathcal{G})I_A I_B)$

$L.H.S = E(E(I_A X E(I_A|\mathcal{G}) I_B | \sigma(\mathcal{G}, A))) = E(X E(I_A|\mathcal{G}) I_B I_A)$

$= E(X I_A E(I_A I_B|\mathcal{G})) = E(E(X I_A|\mathcal{G}) I_A I_B) = R.H.S.$

Def1: 条件概率：$P(A|\mathcal{G}) = E(I_A|\mathcal{G})$.

$P(\cdot|B)$ 是一个 set function. $P(\cdot|\mathcal{G})(\omega)$ 才是概率.(固定 ω 的情况下).

Def2: 定义在 $\Omega \times \mathcal{F}$ 上的函数 $P(\cdot,\cdot)$ 为给定 $\mathcal{G}$ 下的正则条件概率. 若
(r.c.p.)

概率转移 pro.

(1) 对 a.e. ω, $A \mapsto P(\omega, A)$ 为 $\mathcal{F}$ 上的概率.

(2) $\forall A \in \mathcal{F}$, $\omega \mapsto P(\omega, A)$ 为 $\mathcal{G}$ 可测函数

(3) $\forall A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$ 有 $\int_B P(\omega, A) \mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{P}(A \cap B)$.

即 $\forall A \in \mathcal{F}$, $\omega \mapsto P(\omega, A)$ 为 $P(A|\mathcal{G})$ 的一个版本;

RMK: $P(\Omega|\mathcal{G}) = 1$ a.s. $0 \le P(A|\mathcal{G}) \le 1$ .a.s.

若 A_n 互斥. 则 $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n|\mathcal{G}) = E(I_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}|\mathcal{G}) = E(\sum_{n=1}^{\infty} I_{A_n}|\mathcal{G}) \overset{\text{单调收敛}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} E(I_{A_n}|\mathcal{G})$

$= \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|\mathcal{G})$. 不一定 a.s. 成立. (有可能去掉不可数个零测集)

RMK: 正则条件概率不一定存在.

Thm 4.1.16 设 P 是一个 r.c.p. $X \in L^1$. 则 $\boxed{E(X|\mathcal{G})(\omega) = \int_\Omega X(\omega') P(\omega, d\omega')}$

Pf: $X = 1_A$ 时 即为定义. 再由单调性, 线性性即可. ▥

Def: $X: (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ 可测. $P_X: \Omega \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,1]$, 称为 X 在 $\mathcal{G}$ 下的正则条件分布(r.c.d.) 若:

(1) $\forall \omega \in \Omega$, $A \mapsto P_X(\omega; A)$ 为 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ 的概率测度

(2) 对固定的 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ $\omega \mapsto P_X(\omega, A)$ 为 $P(X \in A|\mathcal{G})$ 的一个版本

RMK. 若 r.c.d 存在: 则 $P_X(\omega, A) = P(\omega, \{X \in A\})$

设 X 为 n 维 r.v. 则在给定 $\mathcal{G}$ 下, X 的 r.c.d 一定存在

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 The month
DATE Mon Tue Wed Thu Fri Sat Sun

条件期望也可由条件概率计算 注意区分 r.c.p. 与 r.c.d.

$$\boxed{E(g(X)|\mathcal{G})(w)=\int_{\mathbb{R}^n} g(x) P_X(w,dx)} \quad a.s.$$

$$E(h(X,Y)|Y=y)=\int_{\mathbb{R}} h(x,y) F_{X|Y}(dx|y) \quad a.s. P_Y$$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{x} F_{X|Y}(du|v)\right)F_Y(dv)=\int_{-\infty}^{y} F_{X|Y}(x|v)F_Y(dv) \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

X,Y 独立 $\Leftrightarrow F_{X|Y}(x|y)=F_X(x)$ a.s. P_Y.

条件独立：与马氏链密切相关 $\{X_n: n\ge 1\}$ $P(X_n=x_n|X_{n-1}=x_{n-1},\cdots,X_1=x_1)=P(X_n=x_n|X_{n-1}=x_{n-1})$、Markov 综合两种条件概率

$A\in\sigma(X_0,\cdots,X_n)$ $B\in\sigma(X_n,X_{n+1},\cdots)$ 则 $P(A\cap B|X_n)=P(A|X_n)P(B|X_n)$

Def: ①给一些 σ 域. 称 $\{\mathcal{G}_i,\ i\in I\}$ 关于 $\mathcal{G}$ 条件独立 若 $\forall$ 有界集 $J\subset I$, 以及 $B_j\in\mathcal{G}_j$

$j\in J$ 有 $P(\bigcap_{j\in J} B_j|\mathcal{G})=\prod_{j\in J} P(B_j|\mathcal{G})$. a.s.

② $\{X_i: i\in I\}$ 关于 $\mathcal{G}$ 条件独立 $\Leftrightarrow\{\sigma(X_i),\ i\in I\}$ 关 $\mathcal{G}$ 条件独立.

Thm1: $\{\mathcal{G}_j\}$ 关于 $\mathcal{G}$ 条件独立 $\Leftrightarrow \forall X_j\in\mathcal{G}_j,\ j\in J$ $J\subset I, |J|<\infty$, X_j 有界 $E(\prod_{j\in J} X_j|\mathcal{G})=\prod_{j\in J} E(X_j|\mathcal{G})$ a.s.

$\Leftarrow$ 设 $\mathcal{D}_j$ 为 π系 且 $\sigma(\mathcal{D}_j)=\mathcal{G}_j$, $\{\mathcal{D}_j\}$ 关于 $\mathcal{G}$ 条件独立.

$\Leftarrow$ 设 $X_j\in\mathcal{G}_j$, $j\in J$ 有限, $J\subset I$. $P(\bigcap_{j\in J}\{X_j\le x_j\}|\mathcal{G})=\prod_{j\in J} P(\{X_j\le x_j\}|\mathcal{G})$

易知: 对 $\forall n\ge 1$, $\mathcal{G}_{n+1}$ 与 $\sigma(\mathcal{G}_1,\cdots,\mathcal{G}_n)$ 关于 $\mathcal{G}$ 条件独立 $\Leftrightarrow\{\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2,\cdots\}$ 关于 $\mathcal{G}$ 条件独立.

Eg1: $X_1,X_2,\cdots$ i.i.d. $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$ $S_1,S_2\cdots,S_n,S_{n+1},\cdots$. 已知 S_n 时, S_{n+k} 与 S_j 条件独立 $(1\le j\le n-1)$ 但 S_{n+k} 与 S_j 并不独立☆

Thm(条件独立与独立): ① $\{\mathcal{G},\mathcal{G}_i,\ i\in I\}$ 独立 则 $\{\mathcal{G}_i,\ i\in I\}$ 关于 $\mathcal{G}$ 条件独立

② 当 $\{\mathcal{G}_i, i\in I\}$ 独立, $\{\mathcal{G}_i, i\in I\}$ 关于 $\mathcal{G}$ 不一定条件独立☆

例如: X_1,X_2 i.i.d. $P(X_i=1)=\frac{1}{2}=1-P(X_i=0)$.

$P(X_i=1|S_2=1)=\frac{1}{2}$ $P(X_1=1,X_2=1|S_2=1)=0$. 故 $\sigma(X_1),\sigma(X_2)$ 独立

但 $\sigma(X_1),\sigma(X_2)$ 关于 $\sigma(X_1+X_2)$ 不条件独立

③ 若 $\{\mathcal{G}_i, i\in I\}$ 关于 $\mathcal{G}$ 条件独立, $\mathcal{G}_i$ 不一定独立.

$\mathcal{G}_1=\sigma(S_1)$, $\mathcal{G}_2=\sigma(S_3)$ $\mathcal{G}=\sigma(S_2)$.

Thm2: $\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2$ 在 $\mathcal{G}_3$ 下条件独立 $\Leftrightarrow\forall A_1\in\mathcal{G}_1$ 有 $P(\underset{\text{未来}}{A_1}|\underset{\text{过去}}{\mathcal{G}_2},\mathcal{G}_3)=P(A_1|\underset{\text{现在}}{\mathcal{G}_3})$ a.s.

(故右式即 Markov 性质)

(故 Markov 性另一等价定义即 已知现在, 未来与过去独立)

DATE Mon Tue Wed

转为积分

Pf: "⇒":

插入一题: $E(X|Y)=Y$, $E(Y|X)=X$, $X,Y\in L^2$. Prove: $X=Y$ a.s.

Pf: $E(X-Y)^2=EX^2+EY^2-2EXY$ $\quad EXY=E(E(XY|Y))=E(E(X|Y)Y)=E(Y^2)$

同理 $EXY=EX^2$. 故 $E(X-Y)^2=0$. ▥

变式: $E(X|Y)=Y$, $E(Y|X)=X$, $X,Y\in L'$ Prove: $X=Y$ a.s.

"回到原题": 取 $\mathcal{F}=\sigma(\mathcal{G}_2,\mathcal{G}_3)$. 只需 $\int_B P(A_1|\mathcal{G}_2,\mathcal{G}_3)=\int_B P(A_1|\mathcal{G}_3)$.

只需证 $B=\{B_2\cap B_3: B_2\in\mathcal{G}_2, B_3\in\mathcal{G}_3\}$ 的情形. (形如这样B构成 $\sigma(\mathcal{G}_2,\mathcal{G}_3)$ 的 π 系).

只需 $\int_{B_2\cap B_3}P(A_1|\mathcal{G}_2,\mathcal{G}_3)=\int_{B_2\cap B_3}P(A_1|\mathcal{G}_3)$, $\forall B_2\in\mathcal{G}_2$, $B_3\in\mathcal{G}_3$

$L.H.S=\int_{B_2B_3}I_{A_1}=P(A_1\cap B_2\cap B_3)$ 积分限与被积函数灵活转化!

$R.H.S=\int_{B_3}I_{B_2}P(A_1|\mathcal{G}_3)=E(P(A_1|\mathcal{G}_3)I_{B_2}I_{B_3})=E(E(P(A_1|\mathcal{G}_3)I_{B_2}|\mathcal{G}_3);B_3)$

$\overset{\text{pull-out}}{=\!=\!=}E(P(A_1|\mathcal{G}_3)P(B_2|\mathcal{G}_3);B_3)\overset{\text{条件独立}}{=\!=\!=}E(P(A_1\cap B_2|\mathcal{G}_3);B_3)=P(A_1\cap B_2\cap B_3)$

"⇐": $P(A_2A_1|\mathcal{G}_3)\overset{\text{取较大的σ域作条件}}{=}E(P(A_2A_1|\mathcal{G}_2,\mathcal{G}_3)|\mathcal{G}_3)=E(I_{A_2}P(A_1|\mathcal{G}_2,\mathcal{G}_3)|\mathcal{G}_3)$

$=E(I_{A_2}P(A_1|\mathcal{G}_3)|\mathcal{G}_3)\overset{\text{pull-out}}{=}E(I_{A_2}|\mathcal{G}_3)P(A_1|\mathcal{G}_3)=P(A_2|\mathcal{G}_3)P(A_1|\mathcal{G}_3)$

$\forall A_1\in\mathcal{G}_1$, $A_2\in\mathcal{G}_2$ 成立 ▥

RMK: 给定 $\mathcal{G}_3$, $\mathcal{G}_1$ 与 $\mathcal{G}_2$ 条件独立 ⇔ 给定 $\mathcal{G}_3$, $\mathcal{G}_1$ 与 $\sigma(\mathcal{G}_2,\mathcal{G}_3)$ 条件独立.

Prop1: $\sigma(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2)$ 与 $\mathcal{G}_3$ 独立 则给定 $\mathcal{G}_2$ 的条件下 $\mathcal{G}_1$ 与 $\mathcal{G}_3$ 条件独立

Pf: 由 Thm2 只需 $P(A_1|\mathcal{G}_2,\mathcal{G}_3)=P(A_1|\mathcal{G}_2)$ or $P(A_3|\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2)=P(A_3|\mathcal{G}_2)$.

而 $P(A_3|\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2)=P(A_3)$ $\quad P(A_3|\mathcal{G}_2)=P(A_3)$. ▥.

★RMK: 当 X,Z 独立时 $E(Z|X,Y)\neq E(Z|Y)$ a.s.

原因: X,Z 独立不一定 X,Z 关于 Y 条件独立!

Markov 链.

Thm3: $\{X_1,X_2,\cdots\}$ 为 Markov Chains ⇔ 下列之一.

(1) $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall M\in\sigma(X_{n+1},X_{n+2},\cdots)$ $\quad P(M|X_1,\cdots,X_n)=P(M|X_n)$ a.s.

(2) $\forall n\in\mathbb{N}$, $M_1\in\sigma(X_1,\cdots,X_n)$, $M_2\in\sigma(X_{n+1},\cdots)$ 有 $P(M_1M_2|X_n)=P(M_1|X_n)\cdot P(M_2|X_n)$ a.s.

过去 现在 未来

注意！sup 过去 ≤ inf 将来（最多重叠一点）。过去与现在，将来与现在可以重合！

Prop2：$\mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{F}_1, \cdots$，为 σ 域 则 $\mathcal{H} \perp_{\mathcal{G}} \sigma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \cdots) \Leftrightarrow \forall n \geq 0, \mathcal{H} \perp_{\{\mathcal{G}, \mathcal{F}_1 \cdots \mathcal{F}_n\}} \mathcal{F}_{n+1}$.

RMK：$\mathcal{F}_1 \perp_{\mathcal{G}} \mathcal{F}_2$ 表示在给定 $\mathcal{G}$ 的情况下，$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ 条件独立

$\Rightarrow$：$\forall n \geq 0$，$H \in \mathcal{H}$. $P(H|\mathcal{G}, \mathcal{F}_1, \cdots \mathcal{F}_n) = E(P(H|\mathcal{G}, \mathcal{F}_1, \cdots \mathcal{F}_n \cdots) | \mathcal{G}, \mathcal{F}_1, \cdots \mathcal{F}_n)$

$= E(P(H|\mathcal{G}) | \mathcal{G}, \mathcal{F}_1, \cdots \mathcal{F}_n) = P(H|\mathcal{G})$ a.s.

故 $\forall n \geq 0$，$P(H|\mathcal{G}, \mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_n) = P(H|\mathcal{G}, \mathcal{F}_1, \cdots \mathcal{F}_{n+1})$ a.s.

故由 Thm2：$\mathcal{H} \perp_{\{\mathcal{G}, \mathcal{F}_1, \cdots \mathcal{F}_n\}} \mathcal{F}_{n+1}$ ▨

$\Leftarrow$：由 Thm2. $P(H|\mathcal{G}) = P(H|\mathcal{G}, \mathcal{F}_1) = \cdots = P(H|\mathcal{G}, \mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_n)$ $\forall n \geq 0$

$\therefore \mathcal{H} \perp_{\mathcal{G}} (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots \mathcal{F}_n)$ $\forall n \geq 0$ 故 $\mathcal{H} \perp_{\mathcal{G}} (\mathcal{F}_1, \cdots \mathcal{F}_n \cdots)$.

（$\because P(HB|\mathcal{G}) = P(H|\mathcal{G}) P(B|\mathcal{G})$ $H \in \mathcal{H}$ $B \in \bigcup_n \sigma\{\mathcal{F}_1, \cdots \mathcal{F}_n\}$ 由π-λ定理得）.

由 Prop2 可知，Thm3 成立.

RMK 由 Thm3 和 Def12）可知，若 $X_1, X_2, \cdots$ 是 Markov 链. 则 $X_n, X_{n-1}, \cdots X_2, X_1$ 仍为 Markov 链.

鞅：应用 SSLN，中心极限定理：$f(X_1, \cdots, X_n)$ $(n \to \infty)$，独立同分布的性质很多可以推广到鞅.

Ref：Martingale limit theory：Heyde. C and Hall. P.

连续时间：$\{X_t : t \geq 0\}$. $\{X_n : n \geq 0\}$（离散）. 一般鞅 $\{X_t, t \in T\}$.

$(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t, t \in T\})$ σ 域流. $t \leq s$，$\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$，时刻 t 前信息 $\mathcal{F}_t$

自然σ域流 $\mathcal{F}_s^X = \sigma\{X_s : s \leq t\}$ $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$.

为什么要用一般的σ域流？$E(Z_s Y_t) = E(E(Z_s Y_t | \mathcal{F}_s))$ $Z_s \in \mathcal{F}_s$. $\mathcal{F}_s$ 比 $\sigma(Z_s)$ 信息更稿

Def：$\{X_t : t \in T\}$ 关于 $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ 适应的 即 $X_t \in \mathcal{F}_t$.（易知 $\sigma\{X_s : s \leq t\} \subset \mathcal{F}_t$. 故 $\mathcal{F}_t$ 最小是自然σ域流）.

停时（一般用来截尾，特别有用）：$T : \Omega \to T \cup \{\infty\}$ 称为 $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ 停时 若 $\forall t \in T$ 有 $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$

$\mathbb{T}=\mathbb{N}$ 时，T 为停时 $\Leftrightarrow \{T=n\}\in\mathcal{F}_n$

等价定义：$\{T>t\}\in\mathcal{F}_t$，$\forall t\in\mathbb{T}$

性质：(1) $t_0\in\mathbb{T}$ 为停时

(2) S, T 为 $\{\mathcal{F}_t\}$ 停时，则 $S\vee T$, $S\wedge T$, $S+T$ 为停时

Pf: $\{S\vee T\le t\}=\{S\le t\}\cap\{T\le t\}$

$\{S+T>t\}=\{S=0, T>t\}\cup\{T=0, S>t\}\cup\{T\ge t, S>0\}\cup\{0<T<t, T+S>t\}$

$\{T\ge t\}=\{T<t\}^c$ $\quad\{T<t\}=\bigcup_{s\in\mathbb{Q}, s<t}\{T\le s\}$ 故 $\{T<t\}\in\mathcal{F}_t$，$\{T\ge t\}\in\mathcal{F}_t$.

(严格": $\{T<t\}\in\mathcal{F}_{t-}=\sigma\{\mathcal{F}_s, s<t\}$)

$\{0<T<t, T+S>t\}=\bigcup_{\substack{r\in\mathbb{Q}^+\\ 0<r<t}}\{r<T<t, S>t-r\}$

☆ (3) $\{T_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 为停时，则 $\sup T_n$ 为停时. 但 $\inf T_n$ 不一定为停时

T 前事件 σ 域 $\mathcal{F}_T=\{A\in\mathcal{F}_\infty: A\cap\{T\le t\}\in\mathcal{F}_t, \forall t\in\mathbb{T}\}$

性质：(1) $T\in\mathcal{F}_T$.

(2) $S\le T\Rightarrow\mathcal{F}_S\subset\mathcal{F}_T$.

(3) $\mathcal{F}_S\cap\mathcal{F}_T=\mathcal{F}_{S\wedge T}$.

(4) $\mathcal{F}_S\vee\mathcal{F}_T\triangleq\sigma(\mathcal{F}_S,\mathcal{F}_T)=\mathcal{F}_{S\vee T}=\{A\cup B: A\in\mathcal{F}_S, B\in\mathcal{F}_T, A\cap B=\emptyset\}$.

(5) $\{S\le T\}, \{S<T\}, \{S=T\}\in\mathcal{F}_{S\wedge T}$.

$\mathcal{F}_{S\vee T}\cap[S\le T]=\mathcal{F}_T\cap[S\le T]$

$\mathcal{F}_{S\vee T}\cap[S<T]=\mathcal{F}_T\cap[S<T]$

$\mathcal{F}_{S\wedge T}\cap[S\le T]=\mathcal{F}_S\cap[S\le T]$

$\mathcal{F}_{S\wedge T}\cap[S<T]=\mathcal{F}_S\cap[S<T]$

$\mathcal{F}_{S\vee T}\cap[S=T]=\mathcal{F}_{S\wedge T}\cap[S=T]=\mathcal{F}_S\cap[S=T]=\mathcal{F}_T\cap[S=T]$

(应用：强Markov性，选择停时定理).

考虑 A 的性质. $\Rightarrow$ 局部化 用 B 与 A 交一下. $A\cap B$. " $A\cap B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_k$ 表示在 A 上加上 k 个条件. 也即分类讨论.

Pf: (1): $\because \{T\le t\} = \{\infty\le t\}\cap\{T\le t\}$, $\{T\le t\}\in\mathcal{F}_t \Rightarrow \{T\le t\}\in\mathcal{F}_\infty$ 故 $\{T\le t\}\in\mathcal{F}_T$. ▨.

(3): $\mathcal{F}_S\cap\mathcal{F}_T = \{A\in\mathcal{F}_\infty : A\cap\{T\le t\}\in\mathcal{F}_t,\ A\cap\{S\le t\}\in\mathcal{F}_t,\ \forall t\}$

$\mathcal{F}_{S\wedge T} = \{A\in\mathcal{F}_\infty : A\cap\{S\wedge T\le t\}\in\mathcal{F}_t,\ \forall t\}$, $A\cap\{S\wedge T\le t\} = A\cap(\{S\le t\}\cup\{T\le t\})$

$= (A\cap\{S\le t\})\cup(A\cap\{T\le t\})$

故易知 $\mathcal{F}_S\cap\mathcal{F}_T\subset\mathcal{F}_{S\wedge T}$. 另一方面: $(A\cap\{S\le t\})\cup(A\cap\{T\le t\})\setminus(\{T\le t\}\setminus\{S\le t\})$

$= A\cap\{S\le t\}$ 而 $\{T\le t\}\in\mathcal{F}_t$, $\{S\le t\}\in\mathcal{F}_t$ 故 $\mathcal{F}_{S\wedge T}\subset\mathcal{F}_S\cap\mathcal{F}_T$.

(4): $\mathcal{F}_{S\vee T} = \{A\in\mathcal{F}_\infty : A\cap\{S\le t\}\cap\{T\le t\}\in\mathcal{F}_t,\ \forall t\}$

$\sigma(\mathcal{F}_S,\mathcal{F}_T) = \{A\cup B : A, B\in\mathcal{F}_\infty,\ A\cap\{S\le t\}\in\mathcal{F}_t,\ B\cap\{T\le t\}\in\mathcal{F}_t\ \forall t\in T,\ A\cap B=\emptyset\}$

易知 $\sigma(\mathcal{F}_S,\mathcal{F}_T)\subset\mathcal{F}_{S\vee T}$.

另一方面 $A\in\mathcal{F}_{S\vee T} \Rightarrow (A\cap\{S\le T\})\cap\{T=n\} = A\cap\{S\le n\}\cap\{T=n\}\in\mathcal{F}_n$ ..

$\therefore A\cap\{S\le T\}\in\mathcal{F}_T$. 同理 $A\cap\{T<S\}\in\mathcal{F}_S$ 故 $A\in\sigma(\mathcal{F}_S,\mathcal{F}_T)$. ||

"~~" 的说明: 注意 $\{S\le T\}\in\mathcal{F}_{S\wedge T}\subset\mathcal{F}_{S\vee T} \Rightarrow A\cap\{S\le T\}\in\mathcal{F}_{S\vee T} \Rightarrow A\cap\{S\le T\}\cap\{S\vee T=n\}\in\mathcal{F}_n$

(2) $S\le T$: $\forall A\in\mathcal{F}_S$, $\forall t$ $A\cap\{S\le t\}\in\mathcal{F}_t$ 而 $A\cap\{T\le t\} = A\cap\{T\le t\}\cap\{S\le t\}$ $\in\mathcal{F}_t$. ▨.

(5) 由 (3)(4) 易证. $\{S\le T\}\cap\{S\wedge T=n\} = \{S=n\}\cap\{T\ge n\} = \{S=n\}\cap\{T\le n-1\}^c\in\mathcal{F}_n$.

1. $\mathcal{F}_T$, X_T. $X_n = E(X|\mathcal{F}_n)$ 则 $X_T = E(X|\mathcal{F}_T)$ $\{T=n\}$ 上 $E(X|\mathcal{F}_T) = E(X|\mathcal{F}_n) = X_n = X_T$ a.s.

在 $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty}[T=n]$ 上 $X_T = E(X|\mathcal{F}_T)$ a.s.

2. $X\in\mathcal{F}_T$ 则 $E(X|\mathcal{F}_S) = E(X|\mathcal{F}_{S\wedge T})$ ☆

pf: 1° on $[S\le T]$: $\mathcal{F}_S = \mathcal{F}_{S\wedge T}$. 故 $E(X|\mathcal{F}_S) = E(X|\mathcal{F}_{S\wedge T})$ (由条件期望的局部性)

2° on $[S>T]$: $\mathcal{F}_S = \mathcal{F}_{S\vee T}$. $\Rightarrow E(X|\mathcal{F}_S) = E(X|\mathcal{F}_{S\vee T}) = E(X|\mathcal{F}_S\vee\mathcal{F}_T) = X$

$\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{S\wedge T}$ $\therefore E(X|\mathcal{F}_{S\wedge T}) = E(X|\mathcal{F}_T) = X$. 故 L.H.S = R.H.S a.s. ▨

Application: 取 $X = E(Y|\mathcal{F}_T)$ 故 $E(X|\mathcal{F}_S) = E(E(Y|\mathcal{F}_T)|\mathcal{F}_S)$

$= E(E(Y|\mathcal{F}_T)|\mathcal{F}_{S\wedge T})) = E(Y|\mathcal{F}_{S\wedge T})$.

同理 $E(E(Y|\mathcal{F}_T)|\mathcal{F}_S) = E(Y|\mathcal{F}_{S\wedge T})$.

故 $E(E(Y|\mathcal{F}_S)|\mathcal{F}_T)=E(E(Y|\mathcal{F}_T)|\mathcal{F}_S)=E(Y|\mathcal{F}_{S\wedge T})$.（注：$\mathcal{F}_S,\mathcal{F}_T$ 无大小关系）

☆ 对于一般的 $\mathcal{G},\mathcal{H}$. $E(E(Y|\mathcal{G})|\mathcal{H})=E(E(Y|\mathcal{H})|\mathcal{G})=E(Y|\mathcal{G}\cap\mathcal{H})$ 一般不成立！

$\{X_t,t\in J\}$ adapted $\{\mathcal{F}_t,t\in J\}$

常见停时：$D_A=\inf\{t\geq 0: X_t\in A\}$ 进入时　$T_A=\inf\{t>0: X_t\in A\}$ 击中时，一般取 A 为单点集.

(1) $J=\mathbb{N}$ 时 $\{D_A\leq t\}=\bigcup_{s=0}^{t}\{X_s\in A\}\in\mathcal{F}_t$. $\{T_A\leq t\}=\bigcup_{s=1}^{t}\{X_s\in A\}\in\mathcal{F}_t$.

(2) $J=[0,\infty)$ $\boxed{\text{Case 1}}$: A 为开集. X 右连续 $(\lim_{t\downarrow s}X_t=X_s)$（比较常见）（独立平稳增量过程 鞅）

$\{D_A<t\}=\{X$ 在 t 之前到达 $A\}\xlongequal[\text{且 X 右连续}]{\text{A 为开集}}\bigcup_{\substack{s\in[0,t)\\ s\in\mathbb{Q}}}\{X_s\in A\}$.

（$X_s\in A$　$B(X_s(w),r)\subset A$. $\exists\delta$. s.t. $t\in(s,s+\delta)$, $X_t\in B(X_s(w),r)$. 故可取 $\tilde{s}\in\mathbb{Q}$, 且 $\tilde{s}\in(s,s+\delta)$）故 $\{D_A<t\}\in\mathcal{F}_t$

而 $\{D_A\leq t\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{D_A<t+\frac{1}{n}\}\in\bigcap_{s>t}\mathcal{F}_s$ 故 $\{D_A\leq t\}\in\mathcal{F}_{t+}$ ($\mathcal{F}_{t+}=\bigcap_{s>t}\mathcal{F}_s$).

若 $\mathcal{F}_t$ 右连续. 则 $\{D_A\leq t\}\in\mathcal{F}_t$. 否则 称 D_A 为 $\mathcal{F}_{t+}$ 停时.（$\mathcal{F}_t$ 宽停时）.

$\boxed{\text{Case 2}}$: A 为闭集. X 连续（很强的条件，一般只有 Brownian 运动. Gauss 过程）.

则 $\{D_A\leq t\}=\{\inf_{\substack{s\leq t\\ s\in\mathbb{Q}}}d(X_s,A)=0\}$　$d(X_s,A)\in\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t$　故 $\inf_{\substack{s\leq t\\ s\in\mathbb{Q}}}d(X_s,A)\in\mathcal{F}_t$.

鞅的定义：$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)=X_n$. $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)\geq X_n$ 下鞅.

性质：(1) $\mathcal{F}_n^X=\sigma(X_1,\cdots,X_n)\subset\mathcal{F}_n$. 则 $(X_n,\mathcal{F}_n)$ 是鞅 $\Rightarrow(X_n,\mathcal{F}_n^X)$ 是鞅

(2) $(X_n,\mathcal{F}_n)$ 是下鞅 $\Leftrightarrow(-X_n,\mathcal{F}_n)$ 是上鞅.；{上鞅}∩{下鞅}={鞅}

(3) $\forall m\geq n$　$E(X_m|\mathcal{F}_n)=X_n$（此式也可作为鞅的定义）

(4) $(X_m,\mathcal{F}_m)$ 是下鞅. 则 $EX_m\uparrow$；

(5) 下鞅为鞅 $\Leftrightarrow EX_n=\text{const}$.（$\Rightarrow$ 显然；$\Leftarrow$：注意命题：

"$X\geq Y, EX=EY\Rightarrow X=Y$ a.s.".（In fact：$E(X-Y)\geq E(X-Y)I(X-Y\geq\varepsilon)\geq\varepsilon P(X-Y\geq\varepsilon)$

故 $P(X-Y\geq\varepsilon)=0$ $\forall\varepsilon>0$. 故 $P(X-Y>0)=\bigcap_{k=1}^{\infty}P(X-Y\geq\frac{1}{k})=0$ ）).

Eg1: $X_1,X_2\cdots$ 独立 $EX_i=0$. 则 $(S_n,\mathcal{F}_n^X)$ 为鞅.

Eg2: $X_1, \cdots, X_n \cdots$ 独立. $X_i > 0$. $EX_i = 1$ $\prod_{i=1}^{n} X_i = T_n$ 则 $(T_n, \mathcal{F}_n^X)$ 是鞅.

Eg1: 似然比鞅: $Y_0, Y_1, \cdots$ i.i.d. f_0 为其 p.d.f, f_1 为另一个 p.d.f.

$X_n = \prod_{k=0}^{n} f_1(Y_k) \Big/ \prod_{k=0}^{n} f_0(Y_k)$, $Y_0 \sim f_0$. 则 $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, Y_1, \cdots, Y_n)$

X_n is MTG w.r.t. $\mathcal{F}_n$.

Pf: $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n E\left(\frac{f_1(Y_{n+1})}{f_0(Y_{n+1})}\Big|\mathcal{F}_n\right) = X_n E\left(\frac{f_1(Y_{n+1})}{f_0(Y_{n+1})}\right)$

而 $E\left(\frac{f_1(Y_{n+1})}{f_0(Y_{n+1})}\right) = E\left(\frac{f_1(Y_0)}{f_0(Y_0)}\right) = \int \frac{f_1(y)}{f_0(y)} f_0(y)\,dy = 1$. 故 $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$.

Eg2: $X \in L^1$. $\mathcal{F}_n$ 为σ域流 $X_n = E(X|\mathcal{F}_n)$ 则 X_n 为 u.i. MTG.

Infact: $\{E(X|\mathcal{G}) : \mathcal{G} \subset \mathcal{A}\}$ u.i.

注: 考虑 r.v. X 的性质时, 可选取 $\mathcal{F}_n$ 令 $X_n = E(X|\mathcal{F}_n)$. 从而利用鞅来考虑 X.

很普遍的构造.

☆Eg3. $Y_1, Y_2, \cdots$ 关于 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ 适应. $X_n = \sum_{m=1}^{n} \left(Y_m - E(Y_m|\mathcal{F}_{m-1})\right) a_m(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{m-1})$

则 $E(X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) = 0$.

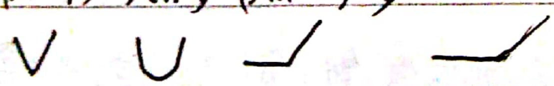
RMK: ① 当 Y_n 为一个 sub MTG 时 X_n 即为 Doob decomposition 中的鞅. ($a_i \equiv 1$)

② 当 Y_n 有独立增量时 $X_n = \sum_{m=1}^{n}(Y_{m-1} + \Delta Y_m - E(Y_{m-1} + \Delta Y_m)) = \sum_{m=1}^{n} \Delta Y_m - E(\Delta Y_m) = Y_n - EY_n$.

Eg4: (1) X_n 为 MTG. ϕ 凸 $E|\phi(X_n)| < \infty$ 则 $\phi(X_n)$ 为 sub MTG

(2) X_n 为 sub MTG, ϕ 凸单增, $E|\phi(X_n)| < \infty$, $\phi(X_n)$ 为 sub MTG.

例子: $|X_n|$, X_n^2, $(X_n - a)^+$, $X_n \vee a$



Eg5: $EX_n^2 < \infty$, X_n 为鞅. $EX_n^2 = EX_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} E\Delta X_k^2$, $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$ 为鞅差.

Pf: Infact: $E\Delta X_n \Delta X_m = 0$ $\forall n \neq m$. (不妨 $n > m$. $E(\Delta X_n \Delta X_m)$

$E(E(\Delta X_n \Delta X_m|\mathcal{F}_m)) = E(\Delta X_m E(\Delta X_n|\mathcal{F}_m)) = 0$).

$H=(H_n)_{n\geq 0}$ 可预报：$(H_0\in\mathcal{F}_0,\ H_n\in\mathcal{F}_{n-1},\ n\geq 1)$

Def: H关于X的随机积分：$(HX)_n=\sum_{k=1}^{n}H_k(X_k-X_{k-1})+H_0X_0$，$(HX)_0=H_0X_0$.

Thm: $H\cdot X$可积，X为鞅 则$H\cdot X$为鞅；X为下鞅 且$H\geq 0$，$H\cdot X$为下鞅

RMK：称HX为X的"鞅变换"更合适，与Brownian motion的随机积分不同.

Eg: $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$为(下)鞅，$N$为停时. 则$X^N=\{X_n^N=X_{N\wedge n}:n\geq 0\}$为$(\mathcal{F}_n)$(下)鞅. 如：$N=\inf\{t:|X_t|>M\}$ $|X_{N\wedge n}|\leq M$.

称X^N为停止过程. 常用来作截尾.

任何随机过程均有此分解.

☆ Thm: (Doob分解) (X_n)为$(\mathcal{F}_n)$的可积适应过程：则$X_n=M_n+A_n$. M_n为鞅 $A_n\in\mathcal{F}_{n-1}$ $A_0=0$. (在a.s.意义下唯一). 特别地：A_n非降$\Leftrightarrow X_n$为下鞅.

$A_n=\sum_{m=0}^{n-1}E(X_n-X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1})$

Eg: $X_n=\sum_{m=1}^{n}1_{B_m}$，$B_n\in\mathcal{F}_n$. $M_n=\sum_{m=1}^{n}(I_{B_m}-P(B_m|\mathcal{F}_{m-1}))$ $A_n=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_m|\mathcal{F}_{m-1})$

$\{B_n\ i.o.\}\stackrel{\Delta}{=}\{\sum I_{B_n}=\infty\}\stackrel{a.s.}{=}\{\sum P(B_m|\mathcal{F}_{m-1})=\infty\}$.

- $Z=g(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)$. $Y_1,\cdots,Y_m$ 独立.
- $\hat{Z}_i=g(\hat{Y}_1,\hat{Y}_2,\cdots,\hat{Y}_i,Y_{i+1},\cdots Y_n)$ $(\hat{Y}_i)$为(Y_i)的一个独立复制.

$Var(Z)=\frac{1}{2}E(Z-\hat{Z}_m)^2$ $(\because E(Z-\hat{Z}_m)^2=E((Z-EZ)-(\hat{Z}_m-E\hat{Z}_m))^2)$

$=\frac{1}{2}E(\sum_{i=0}^{m-1}(\hat{Z}_i-\hat{Z}_{i+1}))^2$. $(\hat{Z}_0=Z)$.

Cauchy $\leq\frac{m}{2}\sum_{i=0}^{m-1}E(\hat{Z}_i-\hat{Z}_{i+1})^2$ (很粗糙，但还是可以估计). Lindeberg替换的思想.

Thm: (Efron-Stein不等式) (Y_i')为(Y_i)的独立复制，则$Var(Z)\leq\sum_{i=1}^{m}E(Z_i-Z)^2$

其中$Z_i=g(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{i-1},Y_i',Y_{i+1},\cdots,Y_n)$ $Z=g(Y_1,\cdots,Y_n)$

Pf: 记$\Delta_i=E(Z|Y_1,\cdots,Y_i)-E(Z|Y_1,\cdots,Y_{i-1})$，$Z-EZ=\sum_{i=1}^{n}\Delta_i$

则$Var(Z)=E(Z-EZ)^2=E(\sum\Delta_i)^2=\sum_{i=1}^{n}E\Delta_i^2$ $(\because\Delta_i$为$\mathcal{F}_i$的鞅差$)$

记$E^{(i)}(Z)=E(Z|Y_1,\cdots Y_{i-1},Y_{i+1},\cdots,Y_n)$

则 $E(E^{(i)}(Z)|Y_1,\cdots,Y_i)=E(E^{(i)}(Z)|Y_1,\cdots,Y_{i-1})$ (条件独立性)

$=E(Z|Y_1,\cdots,Y_{i-1})$.

$\Delta_i=E(Z-E^{(i)}(Z))|Y_1,\cdots,Y_i)$ 故 $\Delta_i^2\overset{\text{Jesen不等式}}{\leq}E((Z-E^{(i)}(Z))^2|Y_1,\cdots,Y_i)$

$\therefore Var(Z)\leq\sum_{i=1}^{n}E(Z-E^{(i)}(Z))^2$. $\Leftarrow E\Delta X_i^2$

而 $E^{(i)}(Z)=E(g(Y_1,\cdots Y_m)|Y_1,\cdots,Y_{i-1},Y_{i+1},\cdots,Y_n)$

$=E(g(Y_1,\cdots,Y_{i-1},Y_i',Y_{i+1},\cdots,Y)|Y_1,\cdots,Y_{i-1},Y_{i+1},\cdots Y_n)$

[$\because (X,Y)\overset{d}{=}(\hat{X},\hat{Y})\Rightarrow E(X|Y)=E(\hat{X}|\hat{Y})$ a.s.].

(条件独立性) $=E(Z_i|Y_1,\cdots Y_n)$.

$\because E(Z-E(Z_i|Y_1\cdots Y_n))^2\leq E(Z-Z_i)^2$ 即...

($\because E(X-E(Y|\mathcal{F}))^2\leq E(X-Y)^2$ $\because X\in\mathcal{F}$, 由条件期望的正交性 即可!)

RMK: ① 或用 $Var(Z)\leq\sum_{i=1}^{n}E(Z-E^{(i)}(Z))^2$.

② 意义: 利用r.v.的组成结构和局部变化信息导出方差的一个上界: 局部条件方差之和.

③ 变分表示: $\sum_{i=1}^{n}E[Z-E^{(i)}(Z)]^2=\inf_{Z_i}\sum_{i=1}^{n}E[(Z-Z_i)^2]$ Z_i 为 $X^{(i)}$ 可测的平方可积的 r.v. $X^{(i)}=(X_1,\cdots,X_{i-1},X_{i+1},\cdots X_n)$

Thm: 上穿不等式: $X_m(m\geq0)$ 是下鞅. 则 $(b-a)EU_n\leq E(X_n-a)^+-E(X_0-a)^+$.

Thm: 鞅收敛定理: X_n 是下鞅, $\sup EX_n^+<\infty$, 则 X_n a.s. 收敛于 X, 且 $E|X|<\infty$.

Thm: Levy 0-1 律: $\mathcal{F}_n\uparrow\mathcal{F}_\infty$ 则 $P(A|\mathcal{F}_n)\to1_A$ a.s. $\forall A\in\mathcal{F}_\infty$

应用: $X_1,X_2\cdots$ 独立. $\mathcal{T}$ 为尾事件. $\mathcal{F}_n=\sigma\{X_1,\cdots,X_n\}$ 则 $\forall A\in\mathcal{T}\subset\mathcal{F}_\infty$

$P(A|\mathcal{F}_n)=P(A)\to1_A$ 故有 kolmogorov 0-1 律

Thm: L^p 收敛: X_n 为鞅或非负下鞅, 且对某个 $p>1$ 有 $\sup E|X_n|^p<\infty$, 则:

$X_n\to X_\infty$ a.s. and L^p.

Thm: X_n 为下鞅, 则下列等价

(1) X_n 一致可积 (2) X_n a.s. L^1 收敛 (3) X_n L^1 收敛

进一步若 X_n 为鞅: $X_n=E(X|\mathcal{F}_n)$ 另外 X_n 为下鞅有 $X_n\leq E(X_\infty|\mathcal{F}_n)$

Eg1:(鞅不收敛):① $\{\xi_n\}$ 独立 $P(\xi_n=1)=1-\frac{1}{n^2}$ $P(\xi_n=-n^2+1)=\frac{1}{n^2}$

$E[\xi_n]=0$. 令 $X_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$. 则 $\sum P(\xi_n\neq 1)<\infty \Rightarrow P(\xi_n\neq 1\ i.o.)=0$

$\Rightarrow P(\xi_n=1$, 有限个 $n)=1$. 故 $X_n\to-\infty$.

② SSRW. $\overline{\lim_{n\to\infty}} S_n=\infty$ a.s. $\underline{\lim_{n\to\infty}} S_n=-\infty$ a.s.

事实上:由重对数律: $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}}=1$.

Eg2: 存在鞅 $\{X_n\}$. $E[|X_n|]\to\infty$, 但 X_n 收敛.

如: $(X_n)_{n\geq 0}$ 为平稳 Markov chain 其转移概率为

$p(n,n+1)=\frac{2n+1}{2n+2}$ $p(n,-(n+1))=\frac{1}{2n+2}$ $n\geq 0$

$p(-k,-k)=1$, $k\geq 1$. 设 $X_0=0$, 则 X_n 为鞅.

$P(X_n$ 收敛到一个有限极限$)=1-P(X_0=0,X_1=1,\cdots)=1$. $P(X_0=0,X_1=1,\cdots)=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2n+2}=0$

但 $p(X_n=-k)=P(X_0=1,\cdots X_{k-1}=(k-1),X_k=-k)=\frac{1}{2k(2k-2)}$

$\therefore E|X_n|\geq EX_n^-\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2k(2k-2)}\to\infty$. $(n\to\infty)$

(EX) $X_1,X_2\cdots$, i.i.d $\sim\varphi$. 则 $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{P}a\Leftrightarrow\varphi'(0)=ia$:

Pf: $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{P}a\Leftrightarrow\frac{S_n}{n}\xrightarrow{d}a\Leftrightarrow E(e^{it\frac{S_n}{n}})\to e^{ita}\Leftrightarrow(\varphi_X(\frac{t}{n}))^n\to e^{ita}$.

$\Leftrightarrow(1+(\varphi_X(\frac{t}{n})-1))^n\to e^{ita}$. 若 $\varphi'(0)=ia$. 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi(\frac{t}{n})-1}{\frac{t}{n}}=ia\Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty}n(\varphi_X(\frac{t}{n})-1)=iat$. 反过来即已知 $\forall t$. $\lim_{n\to\infty}(\varphi(\frac{t}{n})-\varphi(0))/\frac{t}{n}=ia$ 用Baire定理即可

· 下鞅:

1. $\sup_n EX_n^+<\infty\Rightarrow X_n\xrightarrow{a.s.}X$.

2. X_n 一致可积 $\Rightarrow X_n\xrightarrow{a.s.,L^1}X_\infty$ 则 X_n 为右闭下鞅 且 $E(X|\mathcal{F}_n)\xrightarrow[L^1]{a.s.}E(X|\mathcal{F}_{-\infty})$

Def: $(X_n)_{n\geq 0}$ 称为闭鞅 若 $\exists Z\in L^1$ s.t. $X_n=E(X|\mathcal{F}_n)$.

逆鞅：$X_1, X_2, X_3 \cdots$. $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots (X_n, \mathcal{F}_n), \cdots, (X_1, \mathcal{F}_1)$, $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_{n-2} \subset \cdots \subset \mathcal{F}_1$

$\mathcal{F}_{-n} \subset \mathcal{F}_{-n+1} \cdots \subset \mathcal{F}_{-1} \subset \mathcal{F}_0$

$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, \cdots)$. Def: $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$, 则 $(X_n)_{n\le 0}$ 称为逆鞅

Eg: 设 $X_1, \cdots, X_n$ i.i.d. $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ $n<0$ 时，令 $X_n = \frac{S_{-n}}{-n}$.

则 $n \ge 1$ 时 $E(\frac{S_n}{n} | S_{n+1}, \cdots) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n E(X_k|S_{n+1}, \cdots) = E(X_1|S_{n+1}, S_{n+2}, \cdots)$

$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} E(X_k|S_{n+1}, \cdots) = E(\frac{S_{n+1}}{n+1}|S_{n+1}, \cdots) = \frac{S_{n+1}}{n+1}$. 令 $\mathcal{F}_n = \sigma(S_{-n}, S_{-n+1}, \cdots)$

则 $(X_n, \mathcal{F}_n, n\le 0)$ 是鞅 $(\frac{S_n}{n}, \mathcal{F}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, \cdots), n \ge 1)$ 是逆鞅

Thm: 设 $\{X_n, \mathcal{F}_n, n\le 0\}$ 为下逆鞅 则 $\exists$ r.v. $X_{-\infty}$ s.t. $X_n \to X_{-\infty}$ a.s.

若 $\inf_n EX_n > -\infty$ 则 X_n u.i. $X_{-\infty} \in L^1$ 且 $X_n \xrightarrow{L^1} X_{-\infty}$

此时 $\forall n$, $E(X_n|\mathcal{F}_{-\infty}) \ge X_{-\infty}$. 其中 $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{n\le 0} \mathcal{F}_n$.

Pf: X_n 为下逆鞅. 有 $X_n = M_n + A_n$ $A_n = \sum_{k\le n}(X_k - X_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}) \triangleq \sum_{k\le n} \partial_k$ ← 无穷项求和.
($\partial_k \ge 0$ 故收敛性没问题)

$M_n = X_n - A_n$ M_n 为鞅，A_n predicatable

$\because \partial_n \ge 0$, $E(\sum_{k\le n}\partial_k) = \sum_{k\le n} E(\partial_k) = \sum_{k\le n} E(X_k - X_{k-1}) \le EX_0 - \lim_{k\to -\infty} EX_k < \infty$

$\therefore \sum_{k\le n}\partial_k < \infty$ a.s. M_n 为倒向鞅且一致可积. $0 \le A_n \le \sum_{k\le 0}\partial_k$ 故 A_n 一致可积

则 X_n 一致可积.

RMK: 一致可积族构成线性空间，故用Doob分解拆成两个一致可积之和. ☆ (逆鞅 一致可积性很容易满足)

Thm: (1) 设 $n \downarrow -\infty$, $\mathcal{F}_n \downarrow \mathcal{F}_{-\infty}$ 则 $\forall Y \in L^1$ $E(Y|\mathcal{F}_n) \xrightarrow[L^1]{a.s.} E(Y|\mathcal{F}_{-\infty})$

(2) 若 $\exists$ r.v. Y 及 $Z \in L^1$ s.t. $Y_n \to Y$ a.s. $|Y_n| \le Z$. 则 $E(Y_n|\mathcal{F}_n) \xrightarrow{a.s. L^1} E(Y_n|\mathcal{F}_{-\infty})$.

回到例: $\frac{S_n}{n} = E(X_1|S_n, \cdots) \xrightarrow{a.s. L^1} E(X_1|\mathcal{F}_\infty) = EX_1$ a.s. H-S 0-1律知 $\mathcal{F}_\infty$ p-trivial

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = EX_1$ a.s.

Thm: 设 $\{M_n, n\ge 1\}$ 是鞅，且存在 $C<\infty$. s.t. $|\Delta M| \le C$ a.s. 令

$C = \{\lim_{n\to\infty} M_n$ 存在且有限$\}$. $D = \{\limsup M_n = +\infty$ 且 $\liminf M_n = -\infty\}$.

则 $P(C \cup D) = 1$.

$M_{\tau_m \wedge n}$ 为 MTG.

Pf: 令 $\tau_m = \inf\{n: M_n \geq m\}$ 则

且 $M_{\tau_m \wedge n} \leq m + c$ $\therefore \sup_n E(M^+_{\tau_m \wedge n}) \leq m + c < \infty$

$\therefore M_{\tau_m \wedge n}$ a.s. 收敛.

在 $\{\tau_m = \infty\}$ 上, M_n a.s. 收敛

而 $\{\sup_n M_n < m\} \subset \{\tau_m = \infty\}$. $\Rightarrow$ 在 $\bigcup_{m=0}^{\infty} \{\sup_n M_n < m\} = \{\sup_n M_n < \infty\}$ 上

M_n a.s. 收敛 类似 M_n 在 $\{\inf_n M_n > -\infty\}$ 上 a.s. 收敛

故 $C^c \subset \{\sup_n M_n = \infty$ 且 $\inf_n M_n = -\infty\} = D$ $\therefore P(C \cup D) = 1$.

推论: (第二B-C) 引理: $\forall \mathcal{F}_n, A_n \in \mathcal{F}_n$. 有 $\{A_n \text{ i.o.}\} = \{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \infty\}$ a.s.

(证明见 S.P.)

可交换序列: Def1: $(X_1, X_2, \cdots, X_N)$ 可交换若 $(X_{\pi(1)}, \cdots, X_{\pi(N)}) \overset{d}{=} (X_1, \cdots, X_N)$

(π 为置换). Def2: $(X_1, X_2, \cdots)$ 可交换若 $\forall$ 有限置换 π $(X_{\pi(1)}, \cdots) \overset{d}{=} (X_1, \cdots)$

$\Leftrightarrow \forall N, (X_1, X_2, \cdots X_N)$ 可交换.

Def1: $\mathcal{E}_n = \{A \subset \Omega: \exists B \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\infty})$ s.t. $A = \{(X_1, X_2, \cdots, X_n; X_{n+1}, \cdots) \in B\}$

且对 $\forall \{1, 2, \cdots n\}$ 的置换 π 有 $A = \{(X_{\pi(1)}, \cdots, X_{\pi(n)}, X_{n+1}, \cdots) \in B\}\}$

RMK: 若 $f(X_1, X_2, \cdots, X_n, X_{n+1}, \cdots) = f(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \cdots, X_{\pi(n)}, X_{n+1}, \cdots)$

则 $f \in \mathcal{E}_n$. 如 $S_n \in \mathcal{E}_n$, $S_{n+k} \in \mathcal{E}_n$

Def2: $\mathcal{E} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n$ 称为可交换 σ 域.

RMK: $\lim_{n\to\infty} S_n \in \mathcal{E}$ $(\because \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathcal{E}_n)$.

Thm (de-Finetti 定理): 设 $X_1, X_2, \cdots$ 是可交换的, 则在 $\mathcal{E}$ 条件下, $X_1, X_2 \cdots$ 条件独立.

Pf: 对 $\forall$ 有界可测函数 $\varphi: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. 定义 $A_n(\varphi) = \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{i \in I_{n,k}} \varphi(X_{i_1}, \cdots, X_{i_k})$ ← U-统计量

此处 $I_{n,k}$ 由互不相同的 k 整数列 $1 \leq i_1, \cdots, i_k \leq n$ 组成.

则 $A_n(\varphi)\in\mathcal{E}_n$ 则 $A_n(\varphi)=E(A_n(\varphi)|\mathcal{E}_n)=E(\varphi(X_1,\cdots,X_k)|\mathcal{E}_n)$

$\therefore A_n(\varphi)\xrightarrow[L^1]{a.s.}E(\varphi(X_1,\cdots,X_k)|\mathcal{E})$ Levy 0-1 律. 令 $\varphi=f(x_1,\cdots,x_{k-1})g(x_k)$

f,g 有界可测. 则只需证: $E(f(X_1,\cdots,X_{k-1})|\mathcal{E})E(g(X_k)|\mathcal{E})=E(f(X_1,\cdots,X_{k-1})g(X_k)|\mathcal{E})$

$\because A_n(f)\cdot A_n(g)=\frac{(n-k+1)!}{n!}\frac{1}{n}\cdot(\sum f(X_{i_1},\cdots X_{i_{k-1}}))(\sum g(X_{i_k}))$

$=\frac{n-k+1}{n}A_n(\varphi)+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k-1}A_n(\varphi_j)$ $\varphi_j(x_1,\cdots,x_{k-1})=f(x_1,\cdots,x_{k-1})g(x_j)$, $j=1,\cdots,k-1$

而 $A_n(\varphi_j)<\infty$. 令 $n\to\infty$ 即证. 再由归纳法知: $E(\prod_{j=1}^{k}f_j(X_j)|\mathcal{E})=\prod_{j=1}^{k}E_j(f_j(X_j)|\mathcal{E})$

RMK: 找一列 r.v. 逼近 $E(X|\mathcal{F})$.

Thm: 设 $X\in\sigma(X_1,X_2,\cdots)$ 则有 $E(X|\mathcal{E})=E(X|\mathcal{T})$ a.s. ☆

Pf: 只需证: $\forall k$: $E(\varphi(X_1,\cdots,X_k)|\mathcal{E})=E(\varphi(X_1,\cdots,X_k)|\mathcal{T})$ a.s.

(再由π-λ定理 $\because \sigma(X_1,X_2\cdots)=\sigma(\bigcup_{k=1}^{\infty}\sigma(X_1,\cdots,X_k))$)

而 $E(\varphi(X_1,\cdots,X_k)|\mathcal{E})\overset{a.s}{=}\lim_{n\to\infty}A_n(\varphi)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-k)!}{n!}\sum_{i_1,\cdots,i_k>m}\varphi(X_{i_1},\cdots,X_{i_k})$ $\forall m$ 成立

故 $E(\varphi(X_1,\cdots,X_k)|\mathcal{E})\in\mathcal{T}$. 若 $E(X|\mathcal{E})\in\mathcal{T}\Rightarrow E(E(X|\mathcal{E})|\mathcal{T})=E(X|\mathcal{E})\overset{a.s.}{=}E(X|\mathcal{T})$ 西.

推论: (H-S 0-1 律): X_1,X_2, i.i.d $A\in\mathcal{E}$. 则 $P(A)\in\{0,1\}$.

Pf: $E(\varphi(X_1,\cdots X_n)|\mathcal{E})=E(\varphi(X_1,\cdots,X_n)|\mathcal{T})=E(\varphi(X_1,\cdots,X_n))$ $\forall\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 有界可测

故 $(X_1,\cdots,X_n)$ 与 $\mathcal{E}$ 独立. 故由π-λ定理 $\sigma(X_1,X_2,\cdots)$ 与 $\mathcal{E}$ 独立. 故 $\mathcal{E}$ 与 $\mathcal{E}$ 独立. ▣

用测试函数+条件期望证独立性. 很常见的证明

停时定理:

Thm: 设 $(X_n,\mathcal{F}_n)$ 为(下)鞅. 则下述三个结论等价:

(1) $\forall$ 停时 $S\le T$, 有 $EX_T=(\ge)EX_S$

(2) $\forall$ 停时, $S\le T$, 有 $E(X_T|\mathcal{F}_S)=(\ge)X_S$ a.s.

(3) $\forall$ 停时, S,T 有 $E(X_T|\mathcal{F}_S)=(\ge)X_{S\wedge T}$ a.s.

Pf: (3)⇒(2)⇒(1) 显然成立.

下证：(1) ⇒ (2) 及 (2) ⇒ (3).

(1) ⇒ (2)：令 $N = T1_A + S1_{A^c}$，则 N 为停时，且 $S \le N \le T$. ∴ $EX_N \ge EX_S$

$E(X_T 1_A) + E(X_S 1_{A^c}) \ge E(X_S) \Rightarrow E(X_T 1_A) \ge E(X_S 1_A)$. $\forall A \in \mathcal{F}_S$ 成立 因.

(2) ⇒ (3)：在 $\{S \le T\}$ 上：$\{S \le T\} \in \mathcal{F}_{S\wedge T}$：$\mathcal{F}_S \cap \{S \le T\} = \mathcal{F}_{S\wedge T} \cap \{S \le T\}$

$E(X_T | \mathcal{F}_S) = E(X_T | \mathcal{F}_{S\wedge T}) \ge X_{S\wedge T}$. a.s.

在 $[S > T]$ 上：$E(X_T | \mathcal{F}_S) = E(X_{S\wedge T} | \mathcal{F}_S)$ ∵ $X_{S\wedge T} \in \mathcal{F}_{S\wedge T} \subset \mathcal{F}_S$.

∴ $E(X_T | \mathcal{F}_S) \ge X_{S\wedge T}$. a.s.

RMK：涉及停时 $S\wedge T$，$S \vee T$ 之证明 分类讨论证明即可！

(停时定理不成立之一例) $Y_1, Y_2, \cdots$ i.i.d. $P(Y_1 = 1) = P(Y_1 = -1) = \frac{1}{2}$. $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

$S \equiv 1$, $T = \inf\{n : X_n = 1\} < \infty$ 则 $EX_T = 1 \ne 0 = EX_S$.

☆ Thm：S, T 为两停时：$\{X_{T\wedge n}\}$ 一致可积，为下鞅，则 $E(X_T | \mathcal{F}_S) \ge X_{S\wedge T}$ a.s.

Pf：$E(X_{T\wedge n} | \mathcal{F}_S) \ge X_{S\wedge T\wedge n}$ ∵ $X_{T\wedge n}$ u.i. $\Rightarrow X_{S\wedge T\wedge n}$ u.i.

∴ $\forall A \in \mathcal{F}_S$，$E(X_{T\wedge n} I_A) \to E(X_T I_A)$，$E(X_{S\wedge T\wedge n} 1_A) \to E(X_{S\wedge T} 1_A)$

又 $E(X_{T\wedge n} 1_A) \ge E(X_{S\wedge T\wedge n} 1_A)$ 证毕.

推论：设 X_n 为 $\mathcal{F}_n$ 下鞅，T为停时，下述条件之一成立 则有 $E(X_T | \mathcal{F}_S) \ge X_{S\wedge T}$ a.s.

(1) X_n u.i. (2) $E|X_T| < \infty$ 且 $\lim_{n\to\infty} E(|X_n| I(n < T)) = 0$

(3) $E|X_T| < \infty$ 且 $(X_n I(T > n))_{n\ge 0}$ 一致可积.

(4) $ET < \infty$ 且 $E(\sum_{n=1}^{T} E(|X_n - X_{n-1}| | \mathcal{F}_{n-1})) < \infty$

(5) $ET < \infty$ 且 $E(|X_{n+1} - X_n| | \mathcal{F}_n) \le B$ a.s.

度量空间的弱收敛：

$X_n \xrightarrow{d} X$. $(X_n^1, \cdots, X_n^d) \xrightarrow{d} (X^1, \cdots, X^d)$ (正态那 $\Leftrightarrow a_1X_n^1+\cdots+a_dX_n^d \xrightarrow{d} a_1X^1+\cdots+a_dX^d$)

$(X_n^1, X_n^2, \cdots) \xrightarrow{d} (X^1, X^2, \cdots)$ $\mathbb{R}^\infty$ (离散过程).

$(X_n(t), t\geq 0) \xrightarrow{d} (X(t), t\geq 0)$ $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$ (连续时间过程).

Def1: (S,ρ) 为度量空间. $X:(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (S, \mathcal{S}, P_X)$ 为随机元.

记 $C=C(S)$ 表示 S 上所有有界连续函数 若 $\forall f\in C(S)$ 有 $Ef(X_n)\to Ef(X)$. 则称 X_n 依分布收敛于 X. 记作 $X_n \xrightarrow{d} X$.

即 $\int f(x)dP_{X_n} \to \int f dP_X$. $\forall f\in C(S)$ 记为 $P_{X_n} \Rightarrow P_X$.

Def2: S 上的测度 ν_n, ν. 称 $\nu_n \Rightarrow \nu$. (弱收敛) 若 $\forall f\in C(S)$ $\int f d\nu_n \to \int f d\nu$.

Thm1: (Portmanteau定理) 设 $(X, X_n\geq 1)$ 为 S 值随机元. 则下列等价

(1) $X_n \xrightarrow{d} X$.

(2) $\forall$ 有界一致连续 f 有 $Ef(X_n)\to Ef(X)$.

(3) $\forall$ 闭集 F 有 $P(X\in F) \geq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} P(X_n\in F)$

(4) $\forall$ 开集 G $P(X\in G) \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} P(X_n\in G)$

(5) 对 $\forall X$ 的连续集 E $P(X_n\in E)\to P(X\in E)$ (称 $E\in\mathcal{B}$ 为 X 的连续集 若 $P_X(\partial E)=0$)

RMK: $F^\varepsilon \triangleq \{x\in S: \rho(x,F)\leq\varepsilon\}$ 为闭集 ($(F^\varepsilon)^c$ 为开集).

Pf: (i)$\Rightarrow$(ii) √. (ii)$\Rightarrow$(iii) $P(X\in F)=E1_F(X)$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 一致连续函数 f_ε s.t.

$I_F(x)\leq f(x)\leq I_{F^\varepsilon}(x)$, 取 $f_\varepsilon(x)=\left(1-\frac{\rho(x,F)}{\varepsilon}\right)^+$.

则 $|f_\varepsilon(x)-f_\varepsilon(y)|\leq\frac{\rho(x,y)}{\varepsilon}$ 则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} E1_F(X_n)\leq\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} Ef_\varepsilon(X_n)=Ef_\varepsilon(X)$.

$\leq EI_{F^\varepsilon}(X)=P(X\in F^\varepsilon)$. 令 $\varepsilon\downarrow 0$. 即可

(3)$\Leftrightarrow$(4) $P(X\in G^c)\geq\overline{\lim} P(X_n\in G^c)$ ▢

(4)$\Rightarrow$(5): $P(X\in\bar{E})\geq\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} P(X_n\in\bar{E})$ $P(X\in E^\circ)\leq\underline{\lim} P(X_n\in E^\circ)$ 又 $P(X\in\partial E)=0$

$\partial E=\bar{E}\setminus E^\circ$. 故 $P(X\in\bar{E})=P(X\in E^\circ)=P(X\in E)$

$\underline{\lim} P(X_n\in E)\geq\underline{\lim} P(X_n\in E^\circ)\geq\overline{\lim} P(X_n\in\bar{E})\geq\overline{\lim} P(X_n\in E)$ ▢

有界可以线性变换成 $[0,1]$ 上　把期望写成概率的积分.

(5)⇒(1). 不妨设 $f\in[0,1]$. $Ef(X)=\int_0^1 P(f(X)>t)\,dt=\int_0^1 P(X\in E_t)\,dt$.

$E_t=\{x\in\mathbb{R}: f(x)>t\}$. $Ef(X_n)=\int_0^1 P(X_n\in E_t)\,dt$. $\partial E_t=\{x\in\mathbb{R}: f(x)=t\}$.

$\{t: P(f(X)=t)>0\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{t: P(f(X)=t)>\frac{1}{k}\}$. 而 $\#\{t: P(f(X)=t)>\frac{1}{k}\}<k$

$\therefore \{t: P(f(X)=t)>0\}$ 可数集. 故 $P(\partial E_t)=0$ (a.e. t).

故 $P(X_n\in E_t)\longrightarrow P(X\in E_t)$ a.e. 由控制收敛. $Ef(X_n)\to Ef(X)$. ▥

☆ Thm(连续映射定理): $X_n\xrightarrow{d}X$. 则 $\forall$ 连续 f, $f(X_n)\xrightarrow{d}f(X)$.

RMK: f 为 $S\to T$ 到任意度量空间的连续映射　一个弱收敛→一堆的收敛.

Pf: $\forall g\in C_b(T)$. $Eg(f(X_n))\longrightarrow E(g(f(X)))$ ($\because g\circ f\in C_b(S)$).

Thm3: S,T 为两个度量空间 $X, X_1,\cdots$ 为随机元. $X_n\xrightarrow{d}X$. $f_1,f_2\cdots$ 为 $S\to T$ 的可测映射. $D\subset S$ 可测 且 $P(X\in D)=1$. 且当 $s_n\to s$ 时 $f_n(s_n)\to f(s)$. 则 $f_n(X_n)\xrightarrow{d}f(X)$.

Def: $X_n\xrightarrow{P}X$. if $P(\rho(X_n,X)>\varepsilon)\to 0$. $\forall\varepsilon>0$.

RMK: 若 $\rho(x_n,x_0)\to 0$, $\rho(y_n,y_0)\to 0$ 则 $|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_0,y_0)|\le|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_n,y_0)|+|\rho(x_n,y_0)-\rho(x_0,y_0)|\le\rho(y_n,y_0)+\rho(x_n,x_0)\to 0$. 故 $\rho(x,y)$ 关于 (x,y) 连续. 故可测.

Prop: (1) $X_n\xrightarrow{P}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{d}X$. (2) $X_n\xrightarrow{P}a\Leftrightarrow X_n\xrightarrow{d}a$

Pf: (1) 只需证: $\forall$ X 的连续集 A 有 $P((X_n\in A)\triangle(X\in A))\to 0$

($\because A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$. $I_{A\triangle B}=|I_A-I_B|$ $P(A\triangle B)=E|I_A-I_B|\ge|EI_A-EI_B|$
$=|P(A)-P(B)|$)

$P(X_n\in A, X\notin A)\le P(\rho(X_n,X)>\varepsilon)+P(X_n\in A, X\notin A, \rho(X_n,X)\le\varepsilon)$
$\le P(\rho(X_n,X)>\varepsilon)+P(X\notin A, \rho(X,A)\le\varepsilon)$

同理 $P(X_n\notin A, X\in A)\le P(\rho(X_n,X)>\varepsilon)+P(X\in A, \rho(X,A^c)\le\varepsilon)$

令 $\varepsilon\downarrow 0$. 则 $P(X\notin A, \rho(X,A)\le\varepsilon)\downarrow P(X\notin A, \rho(X,A)=0)\le P(X\in\partial A)=0$
$P(X\notin A^c, \rho(X,A^c)\le\varepsilon)\downarrow P(X\in\partial A^c)=P(X\in\partial A)=0$.

RMK: 本质上与前面相同,表达方式有些区别.

(2) $X_n \xrightarrow{d} a$： $A=\{x: \rho(x,a)>\varepsilon\}$ $P(\rho(X_n,a)>\varepsilon)=P(X_n\in A)$

$\partial A=\{x: \rho(x,a)=\varepsilon\}$. $P(a\in\partial A)=0$. 故 $P(X_n\in A)\to P(a\in A)=0$.

Thm3: 设 $Y_{nk}\xrightarrow{d} Y_k$ $(n\to\infty)$. $Y_k\xrightarrow{d} X$ $(k\to\infty)$. 若 $\forall\varepsilon>0$ 有

$\limsup\limits_{k\to\infty}\limsup\limits_{n\to\infty} P(\rho(Y_{nk},X_n)\geq\varepsilon)=0$. 则 $X_n\xrightarrow{d} X$.

$$\begin{tikzcd} Y_{nk} \arrow[r, "n\to\infty"] \arrow[d, dashed] & Y_k \arrow[dd, "k\to\infty"] \\ Y_n \arrow[d, dashed] \arrow[dr, dashed] & \\ X_n \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

推论: $Y_n\xrightarrow{d} X$. $\rho(X_n,Y_n)\xrightarrow{P} 0$ 则 $X_n\xrightarrow{d} X$.

Pf: $\forall$ 闭集 F. 考虑 $P(X_n\in F)\leq P(\rho(X_n,Y_{nk})\geq\varepsilon)$

$+P(Y_{nk}\in F^{\varepsilon})$ $\qquad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} P(X_n\in F)\leq\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} P(\rho(X_n,Y_{nk})\geq\varepsilon)+\overline{\lim\limits_{n}} P(Y_{nk}\in F^{\varepsilon})$

$\leq\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} P(\rho(X_n,Y_{nk})\geq\varepsilon)+\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} P(Y_k\in F^{\varepsilon})=0+P(X\in F^{\varepsilon})$.

令 $\varepsilon\downarrow 0$. 即得: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} P(X_n\in F)\leq P(X\in F)$. $\left(\lim\limits_{\varepsilon\to 0} P(X\in F^{\varepsilon})=P(X\in F)\right.$ 需要F为闭集 ……此处)

利用Thm1の命题(2). 用ε过渡 $\quad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} P(X_n\in F)\leq P(X\in F^{\varepsilon})$

Thm4: 设可测集类 $\mathcal{F}\subset\mathcal{B}$ 满足: (1) $\mathcal{F}$ 关于有限交封闭 (2) S 中の开子集都是 $\mathcal{F}$ 中可列并.
可拓扑基”

若 $\forall A\in\mathcal{F}$ 有 $P(X_n\in A)\to P(X\in A)$ 则 $X_n\xrightarrow{d} X$

Pf: 设 $X_n\sim P_n$, $X\sim P$. 设 $A_1,\cdots,A_n\in\mathcal{F}$. 则有 $P_n(\bigcup\limits_{i=1}^{r}A_i)\to P(\bigcup\limits_{i=1}^{r}A_i)$

($\because P(\bigcup A_i)=\sum P(A_i)-\sum P(A_i\cap A_j)+\cdots$)

$\forall$ 开 G, $\exists A\in\mathcal{F}$. $G=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ $\quad\forall\varepsilon>0$, $\exists r\in\mathbb{N}$. s.t. $P(G)\leq P(\bigcup\limits_{i=1}^{r}A_i)+\varepsilon$

$\therefore P(G)\leq P(\bigcup\limits_{i=1}^{r}A_i)+\varepsilon\leq\lim\limits_{n\to\infty}P_n(\bigcup\limits_{i=1}^{r}A_i)+\varepsilon\leq\liminf\limits_{n\to\infty}P_n(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)+\varepsilon=\underline{\lim}\,P_n(G)+\varepsilon$.

故 $\underline{\lim}\,P(G)\geq P(G)$. $\boxtimes$.

用ε过渡. $a\leq b+\varepsilon$. $\quad P(G)\leq\underline{\lim}\,P_n(G)+\varepsilon$. 此命题是 Thm1 (4) の细化.

Thm5: S 为可分度量空间, 可测集类 $\mathcal{F}$ 满足 (1) $\mathcal{F}$ 关于有限交封闭. (2) $\forall x\in S$, $\forall\varepsilon>0$.

$\exists A\in\mathcal{F}$. s.t. $x\in A^{\circ}\subset A\subset B(x,\varepsilon)$, 若对 $\forall A\in\mathcal{F}$ 有 $P(X_n\in A)\to P(X\in A)$. 则 $X_n\xrightarrow{d} X$

RMK: 可分度量空间 等价定义: ① 具有可数个稠密子集 ② 具有可数拓扑基 ③ 任意开覆盖 有可数子覆盖.

Pf: 设G为开集 则 $\forall x\in G$. $\exists B(x,\varepsilon_x)\subset G$. $\therefore\exists A_x\in\mathcal{F}$. 使 $x\in A_x^{\circ}\subset A_x\subset G$.

紧→σ紧→可分；可分度量空间与$\mathbb{R}^\infty$的某子空集同胚

$(C[0,1],\rho)$. $\rho(x,y)=\sup_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|$ 则 (C,ρ) 完备且可分

$\{A_x^\circ, x\in G\}$ 为 G 的一个开覆盖. 故 ∃ G 的可数子覆盖. 即 ∃ $\{x_i\}$ s.t. $G=\cup A_{x_i}^\circ$ $=\cup A_{x_i}$ 故 $\overset{\text{由Thm4}}{X_n \xrightarrow{d} X}$. 此定理为Thm4在可分度量空间中的进一步细化.

Thm6: Skorokhod表示定理: S可分. $X_n\xrightarrow{d}X$. 则∃某适当概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的S值随机元. $(Y,Y_n,n\ge1)$ s.t. $Y\overset{d}{=}X$. $Y_n\overset{d}{=}X_n$. $Y_n\to Y$ a.s.

Eg1: $\mathbb{R}^k$ 空间. $X_n\in\mathbb{R}^k$. $X_n\xrightarrow{d}X \iff \forall x\in C_{F_X}$ $F_{X_n}(x)\to F_X(x)$.

Eg2: $\mathbb{R}^\infty$, $\rho(x,y)=\sum_{k=1}^\infty 2^{-k}(\rho(x^k,y^k)\wedge1)\Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)=\prod_{k=1}^\infty \mathcal{B}_k(\mathbb{R})$

$(X_n^1,X_n^2,\cdots)\xrightarrow{d}(X^1,X^2,\cdots)\iff(X_n^{t_1},\cdots,X_n^{t_k})\xrightarrow{d}(X^{t_1},\cdots,X^{t_k})$

$\forall t_1,\cdots,t_k\in\mathbb{N}^+$, $k\ge1$.

$\{\frac{S_{[nt]}}{\sqrt n},0\le t\le1\}\xrightarrow{d}\{B(t),0\le t\le1\}$.

$\max_{1\le k\le n}\frac{S_k}{\sqrt n}\xrightarrow{d}|N|$, $N\sim N(0,1)$ $\frac{S_n}{\sqrt n}\xrightarrow{d}N(0,1)$.

· $\mathbb{R}^k$. $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^k(x_i-y_i)^2}$. $(a,b]=\{(x_1,\cdots,x_k):a_i<x_i\le b_i,1\le i\le k\}$. ←记号;

Thm7: $X_n\xrightarrow{d}X\iff\forall x\in C_{F_X}$. $F_n(x)\to F(x)$. (in $\mathbb{R}^k$)

Pf: ⇒ $A_x=(-\infty,x]$. A_x 为 P_X 的连续点集. 故 $F_n(x)=P(X_n\in A_x)\to P(X\in A_x)=F(x)$.

⇐: $\mathcal{F}=\{(a,b]$: 2k个包含$(a,b]$表面的$k-1$维超平面的P_X测度为0$\}$. 则$\mathcal{F}$关于有限交封闭.

$\forall x\in\mathbb{R}^k$, $\forall\varepsilon>0$ ∃ $x\in(a,b)\subset(a,b]\subset B(x,\varepsilon)$. 且2k个包含$(a,b]$表面的$k-1$维超平面的$P_X$测度为0. 只需证: $\forall A\in\mathcal{F}$. $P(X_n\in A)\to P(X\in A)$ 即可. (Thm5保证)

二维情形: $P(X\in\square)=F(y_1,y_2)+F(x_1,x_2)-F(x_1,y_2)-F(y_1,x_2)$.

$\forall A=(a,b]\in\mathcal{F}$: $P(X_n\in A)=F_n(b_1,\cdots,b_k)-\sum F_n-\sum F_n(b_1,\cdots a_i,b_k)+\cdots+(-1)^kF_n(a_1,\cdots,a_k)$

$\to F(b_1,\cdots b_k)-\sum+\cdots+(-1)^kF=P(X\in A)$.

· $\mathbb{R}^\infty$: $(S_k,\rho_k,k\in T)$, $\prod S_k=\{(x_1,x_2\cdots):x_k\in S_k\}$. $\mathcal{B}(S_k)=\sigma\{S_k$中开集$\}$.

$\prod_{k=1}^\infty\mathcal{B}(S_k)=\sigma\{$有限维柱集$\}=\sigma\{A_n\times\prod_{k\ne n}S_k,\ A_k\in\mathcal{B}(S_k)\}$.

· 度量: $\rho(x,y)=\sum_{k=1}^\infty2^{-k}(\rho_k(x_k,y_k)\wedge1)$ 则 $\rho(x^n,x)\to0\iff\rho_k(x_k^n,x_k)\to0,\forall k$

投影: $\pi_k:(x_1,\cdots,x_k)\to x_k$.

则π_k是连续映射 $(\prod_k S_k, \rho)$上Borel σ域为$\mathcal{B}(S)$. $\mathcal{B}(S)=\sigma\{G: G\text{为}(S,\rho)\text{上开集}\}$.

Thm8: 若S_k, $k=1,2,\cdots$可分. 则$\mathcal{B}(S)=\prod_{k=1}^{\infty}\mathcal{B}(S_k)$.

Pf: $A_k \times \prod_{n\neq k} S_n = \pi_k^{-1}(A_k) \in \pi_k^{-1}(\mathcal{B}(S_k)) \subset \mathcal{B}(S)$.

($\pi_k: (S,\mathcal{B}(S)) \to (S_k, \mathcal{B}(S_k))$ 连续 $\therefore \pi_k^{-1}(\mathcal{B}(S_k)) \subset \mathcal{B}(S)$) $\therefore \prod_{k=1}^{\infty}\mathcal{B}(S_k) \subset \mathcal{B}(S)$

反过来: $\forall \mathcal{B}(S)$的开集G. $\forall x=(x_1,x_2\cdots)\in G$. $\exists B(x,r)\subset G$ 取n_0 s.t. $2^{-n_0}<\frac{r}{2}$

则 $A_x = B(x^1,\frac{r}{2})\times\cdots B(x^{n_0},\frac{r}{2})\times\prod_{k>n_0} S_k \subset B(x,r)$

$\forall y\in A_x$, $\rho(y^i,x^i)<\frac{r}{2}$ $i=1,2,\cdots n_0 \Rightarrow \rho(x,y)<\frac{r}{2}\sum_{i=1}^{n_0}2^{-i}+\sum_{i>n_0}2^{-i}<r$ $\Downarrow$ $A_x\in\mathcal{B}$

$\therefore \{A_x, x\in G\}$为$G$的开覆盖 由于$S$可分. 故$\exists G$的一个可数子覆盖$\{A_{x_i}\}_{i=1}^{\infty}$

$\therefore G=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{x_i}\in\prod_{k=1}^{\infty}\mathcal{B}(S_k) \Rightarrow \mathcal{B}(S)\subset\prod\mathcal{B}(S_k)$.

Thm9: S_k为可分. X_n, X为$\prod S_k$随机元, $X_n=(X_n^1,\cdots,X_n^k\cdots)$. 则

$X_n\xrightarrow{d}X \Leftrightarrow (X_n^1,\cdots,X_n^m)\xrightarrow{d}(X^1,\cdots,X^m)$ $\forall m\in\mathbb{N}$.

Pf: $\Rightarrow$: $\pi_{1\sim m}: S\to S_1\times\cdots\times S_m$ 连续 $\hat\rho$: $\hat\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{m}\rho_k(x^k,y^k)$.

则 $\pi_{1,\cdots m}(X_n)\xrightarrow{d}\pi_{1,\cdots m}(X)$.

$\Leftarrow$: 固定 $a_k\in S_k$ $\forall k\geq 1$, 记 $Y_{nm}=(X_n^1,\cdots,X_n^m, a_{m+1}, a_{m+2}\cdots)$.

$Y_m=(X^1,X^2,\cdots,X^m,a_{m+1},a_{m+2}\cdots)$ 则 $Y_{nm}\xrightarrow{d}Y_m$.

(映射$\varphi_m: (x_1,\cdots,x_m)\mapsto(x_1,\cdots,x_m,a_{m+1},\cdots)$是连续映射).

并且 $\rho(Y_m,X)\to 0$, $\rho(X_n,Y_{nm})\leq 2^{-m}$. $\therefore \overline{\lim_{m\to\infty}}\,\overline{\lim_{n\to\infty}} P(\rho(X_n,Y_{nm})>\varepsilon)=0$.

故由Thm3知 $X_n\xrightarrow{d}X$

- $C[0,1]$空间. (连续函数全体). $\rho(x,y)=\sup_{0\leq t\leq 1}|x(t)-y(t)|$ 则$(C[0,1],\rho)$完备可分 且$\pi(t)$: $x\mapsto x(t)$为连续映射. $\mathcal{B}(C[0,1])=\sigma(\pi_t, 0\leq t\leq 1)$
- X为$[0,1]$上连续轨道的随机过程 $\Leftrightarrow$ X为$C[0,1]$上随机元.

Thm10: X,Y为$C[0,1]$上的r.e. 且$\forall t_1<t_2<\cdots<t_n$.

$(X(t_1),\cdots,X(t_n))\overset{d}{=}(Y(t_1),\cdots,Y(t_n))$ 则 $X\overset{d}{=}Y$.

Pf: 记 $\mathcal{D}=\{A\in\mathcal{B}(C[0,1]):P(X\in A)=P(Y\in A)\}$

$\mathcal{C}=\{A: A=\{f\in C[0,1];(f(t_1),\cdots,f(t_n))\in B, t_1,\cdots,t_n\in T, B\in\mathcal{S}^n\}\}$

则 $\mathcal{C}$ 为π系 $\mathcal{D}$ 为λ系. 并且 $\mathcal{C}\subset\mathcal{D}\overset{\pi-\lambda}{\Rightarrow}\mathcal{B}(C[0,1])=\sigma(\mathcal{C})\subset\mathcal{D}\Rightarrow X\overset{d}{=}Y$.

RMK: $X_n\xrightarrow{fd}X\nRightarrow X_n\xrightarrow{d}X$. 例如: $X\equiv0$, $X_n\equiv X_n(t)=\begin{cases}nt, & 0\le t\le\frac{1}{n}\\ 2-nt, & \frac{1}{n}\le t\le\frac{2}{n}\\ 0 & \frac{2}{n}\le t\le1\end{cases}$

则 $X_n\xrightarrow{fd}X$, 取 $A=B(0,\frac{1}{2})$ $\partial A=\{x:\sup|x(t)|=\frac{1}{2}\}$ $P(0\in\partial A)=0$.

$\therefore A$ 为0的连续集 $P(X_n\in A)=0$, $P(X\in A)=1$ $P(X_n\in A)\nrightarrow P(X\in A)$ 故 $X_n\xrightarrow{d}X$

不成立.

Thm 11: 度量空间上: $X_n\xrightarrow{d}X$ 充要条件为 $X_n\xrightarrow{fd}X$ 且 X_n 依分布相对紧; (即$\{X_n\}$ 的任意子列$\{X_{n'}\}$都存在其子列 $\{X_{n''}\}$ 依分布收敛)

Pf: 已知 $X_n\xrightarrow{d}X\Leftrightarrow\forall\{n'\}\ \exists\{n_k\}\subset\{n'\}$ s.t. $X_{n_k}\xrightarrow{d}X$. ($\forall f\in C_b(S)$, $Ef(X_n)\to Ef(X)$) trivial but important

$\Rightarrow$: 显然; $\Leftarrow$: 对$\{n'\}$, $\exists\{n''\}\subset\{n'\}$ $\exists Y$ (可能依赖于$\{n''\}$和$\{n'\}$) s.t. $X_{n''}\xrightarrow{d}Y$

则 $\forall t_1,\cdots,t_k$. $(X_{n''}(t_1),\cdots,X_{n''}(t_k))\xrightarrow{d}(Y(t_1),\cdots,Y(t_k))$ 而 $X_n\xrightarrow{fd}X$

$\therefore X\overset{fd}{=}Y\Rightarrow X\overset{d}{=}Y$. 则对$\forall\{n'\}$, $\exists\{n_k\}\subset\{n'\}$ s.t. $X_{n_k}\xrightarrow{d}X$ $\therefore X_n\xrightarrow{d}X$.

Def: 胎紧(tight): 若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 紧集 K s.t. $\liminf\limits_{n\to\infty}P(X_n\in K)>1-\varepsilon$ 整体用紧集控制. (类似一致可积).

RMK: ① 这是r.v.到胎紧的推广: $\limsup\limits_{n\to\infty}P(|X_n|>r)\to0\ (r\to\infty)\Leftrightarrow\liminf\limits_{n\to\infty}P(|X_n|\le r)\to1\ (r\to\infty)$

② S完备可分, X为r.e. 则 X 胎紧.

③ 对实值的 X_n. 若 X_n 胎紧, 则收敛子列的极限分布为真正的分布.

④ $X_n\xrightarrow{d}X\Rightarrow X_n$ 胎紧.

Thm12 (Prohorov 定理): 设 S 为度量空间. $X_1,X_2\cdots$ 为 S 值随机元 则 X_n 胎紧蕴含 X_n 依分布相对紧; 若 S 完备可分 则 胎紧 $\Leftrightarrow$ 依分布相对紧.

可分⟺可数稠密子集⟺可数拓扑基⟺开覆盖有可数子覆盖.

紧-σ紧-可分.

一些补充：(基本例子).

Eg: $C=C[0,1]$ $\|x\|=\sup_{0\le t\le 1}|x(t)|$, $\rho(x,y)=\|x-y\|$. 则 $\rho(x_n,x)\to 0$ 表示一致收敛.

(1) C是可分空间 (2) C是完备空间. (3) C与$\mathbb{R}^\infty$不是σ-紧的.

Pf: (1) $D_k=\{f\in C: f$在$I_{ki}=[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}]$, $1\le i\le k$上线性, 且$f(\frac{i}{k})\in\mathbb{Q}$, $i=0,\dots,k\}$.
则D_k可数. $\bigcup_{k=1}^\infty D_k\triangleq D$可数. 下证D稠密: $\forall x\in C$, $\varepsilon>0$, 由于x一致连续
故$\exists k>0$, s.t. $\forall t\in I_{ki}$, $|x(t)-x(\frac{i}{k})|<\varepsilon$, $\forall 1\le i\le k$. 取$y\in D_k$
s.t. $|y(\frac{i}{k})-x(\frac{i}{k})|<\varepsilon$ $\forall 1\le i\le k$. ∴ $|y(\frac{i}{k})-x(t)|\le 2\varepsilon$, $|y(\frac{i-1}{k})-x(t)|\le 2\varepsilon$, $\forall t\in I_{ki}$
又$y(t)$介于$y(\frac{i}{k})$与$y(\frac{i-1}{k})$之间. 故 $\rho(x,y)\le 2\varepsilon$. ▣

(2) 若x_n为基本列. 即 $\varepsilon_n=\sup_{m>n}\rho(x_n,x_m)\to_n 0$ 则 $\forall t\in[0,1]$, $\{x_n(t)\}$是基本列.
故 $x_n(t)\to x(t)$ (逐点). 而$|x_n(t)-x_m(t)|\le\varepsilon_n$ $\forall t\in[0,1]$, 令$m\to\infty$
∴ $|x_n(t)-x(t)|\le\varepsilon_n$ 故$x_n(t)$一致收敛于$x(t)$. 故$x\in C$. ▣.

(3) 取 $z_n(t)=\begin{cases} nt, & t\in[0,\frac1n] \\ 2-nt, & t\in[\frac1n,\frac2n] \\ 0, & t>\frac2n\end{cases}$ claim: $\forall\varepsilon>0$, $\{\varepsilon z_n\}$无子列收敛.
(若$\rho(\varepsilon z_{n_i},z)\to 0$ 则 $\varepsilon z_{n_i}\to z$ pointwise. ⇒ $z\equiv 0$. 但$\rho(\varepsilon z_{n_i},0)=\varepsilon$ 矛盾!)
故而$\overline{B(0,\varepsilon)}$为有界闭集, 但不是紧集 同理$\overline{B(x,\varepsilon)}$不紧 故C中每个紧集无内点 故而不可能σ紧.

RMK: 随着空间"变大", 紧性减弱. $\underset{\text{紧}}{[0,1]}\to\underset{\sigma\text{紧}}{\mathbb{R}}\to\underset{\sigma\text{紧}}{\mathbb{R}^k}\to\underset{\text{可分}}{\mathbb{R}^\infty}\rightleftarrows\begin{matrix}C([0,\infty),\mathbb{R})\\ \underset{\text{可分}}{C([0,1],\mathbb{R})}\end{matrix}$

Def: $(S,\mathcal{S})$上p.m. P 称为tight: $\forall\varepsilon>0$, ∃紧集K s.t. $P(K)>1-\varepsilon$.

Thm: 完备可分空间的概率测度一定是tight.

Pf: 由于S可分. 则$\forall k$, 取一列半径为$\frac1k$的开球 $A_{k1},\dots,A_{kn}\dots$ 覆盖S.
取n_k充分大 s.t. $P(\bigcup_{i=1}^{n_k}A_{ki})>1-\frac{\varepsilon}{2^k}$ 由完备性: $\bigcap_{k=1}^\infty\bigcup_{i=1}^{n_k}A_{ki}$ 的闭包K
为紧集 且 $P(K)>1-\varepsilon$
完全有界

RMK: 由此可知 $C[0,1]$上的概率测度是tight的.

Eg: 考虑$\mathbb{R}$上的p.m. $P_n=\delta_n$. 由Helly定理: $\forall\{F_n\}$ $\exists\{F_{n'}\}\subset\{F_n\}$ s.t. $F_{n'}(x)\xrightarrow{v}F(x)$
则$F(x)\equiv 0$. 故 $F(x)$不是分布函数. (原因: P_n质量逃逸).
(若$P_{n_i(m)}\Rightarrow_m Q$ 则 $Q(-k,k)\le\varliminf_{n_i\to\infty}P_{n_i}(-k,k)=0$, $\forall k$)

完全有界集M之def: $\forall \varepsilon>0, \exists x_1,\cdots,x_m \in M, r_1,\cdots,r_m<\varepsilon, M\subset \bigcup_{k=1}^{} B(x_k,r_k)$.

完备空间中: 完全有界 $\Leftrightarrow$ 列紧.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 The month
DATE Mon Tue Wed Thu Fri Sat Sun

Eg: μ_n为$[-n,n]$上之均匀分布, $P_n=\begin{cases}\delta_0, & 2\mid n\\ \frac{1}{3}\delta_0+\frac{2}{3}\mu_n, & 2\nmid n\end{cases}$.

若$\{P_{n_i}\}$中$\{n_i\}$有无穷个偶数. 则$\{P_{n_i}\}$有弱收敛子列. 若n_i均为奇数

则$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & x<0\\ \frac{2}{3}, & x\geq 0\end{cases}$ 若$P_{n_{i(m)}}\Rightarrow_m Q$, 则$Q(-k,k)\leq\frac{1}{3}$. $\forall k\in N^*$.

Pf of Prohorov:

(1) 胎紧推出依分布相对紧: (类似Helly定理). 理解: $P(X\in F)\geq\varlimsup_{n\to\infty}P(X_n\in F)$. 故需 $\varliminf_{n\to\infty}P(X_n\in K)>1-\varepsilon$ 之条件.

(2) 若S完备可分. 且X_n依分布相对紧但不胎紧. 则$\exists\varepsilon>0, \forall M\in N, \exists X_{n_M}$ s.t. $P(X_{n_M}\in[-M,M])<1-\varepsilon$. 又$X_n$依分布相对紧. 则$\exists\{n'\}\subset\{n_M\}$ s.t. $X_{n'}\xrightarrow{d}Y$

则$X_{n'}$胎紧. 矛盾!

另一直接证明: 考虑开集列$G_n\uparrow S$. $\forall\varepsilon>0$, $\exists n$, s.t. $P(G_n)>1-\varepsilon$ $\forall P\in\Pi$. (Π为X_n诱导之p.m.全体). (否则: $\exists\varepsilon_0>0, \forall n$ $\exists P_n\in\Pi$ s.t. $P_n(G_n)\leq 1-\varepsilon$. 则由相对紧性 $P_{n_i}\Rightarrow_i Q$. 但$Q(G_n)\leq\varliminf_{i\to\infty}P_{n_i}(G_n)\leq\varliminf_{i\to\infty}P_{n_i}(G_{n_i})\leq 1-\varepsilon$. 但$G_n\uparrow S$ 故$Q(G_n)\uparrow 1$

矛盾!) $\forall k$, 取一列开球$A_{k1},\cdots A_{kn}\cdots$ 半径为$\frac{1}{k}$. 覆盖S. 则$\exists n_k$ s.t.

$P(\bigcup_{i\leq n_k}A_{ki})>1-\frac{\varepsilon}{2^k}$ $\forall P\in\Pi$. 记$K=\bar{A}$, $A=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i\leq n_k}A_{ki}$ 则A为完全有界集

由完备性 A为列紧集. 又K为闭集 故K为紧集 并且$P(K)>1-\varepsilon$. $\forall P\in\Pi$

RMk: 这一证明可作为"完备可分空间中. $X_n\xrightarrow{d}X\Rightarrow X_n$ tight"之证明.

Eg: (Prohorov定理之一个应用): 取P为$(S,\mathcal{B}(S))$上概率测度. $S=[0,\infty)$

则P之Laplace变换 $L(t)=\int_0^\infty e^{-tx}P(dx)$ 由唯一性定理 L与P一一对应.

则 $P_n\Rightarrow P \Leftrightarrow L_n(t)\to L(t)$ $\forall t\geq 0$.

pf: "$\Rightarrow$"由定义显然 "$\Leftarrow$": $\frac{1}{u}\int_0^u(1-L_n(t))dt=\frac{1}{u}\int_{x\geq 0}\int_0^u(1-e^{-tx})dt\,P_n(dx)$

$\geq\frac{1}{u}\int_{x>\frac{1}{u}}\int_0^u(1-e^{-t/u})dt\,P_n(dx)=\frac{1}{e}P_n(\frac{1}{u},\infty)$ 又$L(t)$连续. 且$L(0)=1$

故$\forall\varepsilon>0$, $\exists u$ s.t. $u^{-1}\int_0^u(1-L(t))dt<\frac{\varepsilon}{e}$

$\because u^{-1}\int_0^u (1-L_n(t))dt < \frac{\varepsilon}{2}$ (当 $n>n_0$ 时) $\therefore P_n(\frac{1}{u},\infty) < \varepsilon \quad \forall n>n_0$

故 $P_n[0,\frac{1}{u}]) > 1-\varepsilon$，$\forall n>n_0$. 故 P_n 胎紧. 由Helly定理. 每个 P_n 子列都有子列收敛. 又由Laplace变换的唯一性. 极限p.m.相同 ▣.

Thm13: 完备可分的度量空间上：$X_n \xrightarrow{d} X \iff X_n \xrightarrow{fd} X$ 且 X_n 胎紧 (Thm11+Thm12)

. $C=C[0,1]$ 中：

Def: $\forall x\in C$，x 的连续模 $w(x,h)=\sup_{|s-t|\le\delta}|x(s)-x(t)|$，$0<\delta\le 1$

RMK: ① $\lim_{\delta\to 0} w(x,\delta)=0$ 表示 x 一致连续 故 C 中的 x 均满足

② 故 $\forall x,y\in C$. $|w_x(\delta)-w_y(\delta)|\le 2\rho(x,y)$ 故 $w(x,\delta)$ 关于 x 连续

Thm14: 记 P_n 为 $(C,\mathcal{G})$ 上的p.m. $\{P_n\}$ 胎紧 $\iff$ (i)+(ii).

(i) $\forall\varepsilon>0$，$\exists a, n_0$, s.t. $P_n(x: |x(0)|\ge a)\le\varepsilon$，$\forall n\ge n_0$.

(ii) $\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty} P_n(x: w(x,\delta)\ge\varepsilon)=0$. $(\forall\varepsilon>0)$.

Lemma: (Arezela-Ascoli): $A\subset C$，则 A 相对紧 $\iff \sup_{x\in A}|x(0)|<\infty$ 且 $\lim_{\delta\to 0}\sup_{x\in A} w_x(\delta)=0$. (RMK: 若 $\bar{A}$ 为紧集，则称 A 为相对紧集)

Pf of Thm14:

$\Rightarrow$ 若 P_n tight: $\forall\varepsilon>0$，取紧集 K s.t. $P_n(K)>1-\varepsilon$ $\forall n$ 由AA Lemma:

$\exists a>0$，s.t. $K\subset[x: |x(0)|\le a]$，$\exists\delta>0$，s.t. $K\subset[x: w_x(\delta)\le\varepsilon]$ 故必要性得证

$\Leftarrow$: 由于完备可分空间上的测度是紧的. 故不妨. $\forall\varepsilon>0$，$\exists a$，$\sup_n P_n(x: |x(0)|\ge a)\le\varepsilon$

$\lim_{\delta\to 0}\sup_n P_n(x: w_x(\delta)\ge\varepsilon)=0$. $B=\{x: |x(0)|\le a\}$ 则 $\inf_n P_n B\ge 1-\varepsilon$

取 δ_k s.t. $B_k=\{x: w_x(\delta_k)<\frac{1}{k}\}$ 且 $P_n(B_k)\ge 1-\frac{\varepsilon}{2^k}$ $\forall n\ge 1$.

记 $A=B\cap\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k$ $K=\bar{A}$. 则 $P_n(K)\ge 1-2\varepsilon$ $\forall n\ge 1$. A 是相对紧集 (AA Lemma) 故 K 为紧集. 故 P_n tight.

且 $X_n \xrightarrow{fd} X$

Thm15: X_n 为 $(C,\mathcal{B}(C))$ 上之 r.e. 若 $\lim_{h\to 0}\limsup_{n\to\infty} E(w(X_n,h)\wedge 1)=0$ (*)

则 X_n 胎紧.

Pf: 记 $P_n(X\in B)=P(X_n\in B)$ 由 $X_n\xrightarrow{fd}X$ 知 $X_n(0)\xrightarrow{d}X(0)$. 故 $X_n(0)$ 胎紧

故 $\forall \varepsilon>0$ $\exists a>0$, $\exists n_0>0$ s.t. $P(|X_n(0)|\geq a)\leq \varepsilon$, $\forall n>n_0$. 即 Thm14 之 (i) 成立.

而由 $E(|X|\wedge 1)\geq \varepsilon P(|X|\geq \varepsilon)$, $(\varepsilon<1)$ 知 Thm14 之 (2) 成立. ▨

RMK: ① 在 $C=C[0,1]$ 中 $X_n\xrightarrow{d}X$ 之一个充分条件为 $X_n\xrightarrow{fd}X$, 且

$\lim_{h\to 0}\limsup_{n\to\infty} E(w(X_n,h)\wedge 1)=0$.

② 事实上 (*) 与 Thm 14 (ii) 等价. ($E|X_n|\wedge 1\to 0 \Leftrightarrow X_n\xrightarrow{P}0$).

③ (*) 成立之一个充分条件为: $\forall \varepsilon>0$, $\eta>0$. $\exists \delta, n_0$, $(0<\delta<1)$, s.t. $\forall\, 0<t\leq 1$.

当 $n\geq n_0$ 时: $\mathbb{P}(\sup_{t\leq s\leq t+\delta}|X_n(t)-X_n(s)|\geq \varepsilon)\leq \eta$.

即 $\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim}_{n\to\infty} P(w(X_n,\delta)\geq\varepsilon)=0$. (此条件十分类似 AA 引理中 $\lim_{\delta\to 0}\sup_n w(X_n,\delta)=0$. X_n为确定的函数

$\Leftarrow \lim_{\delta\to 0}\delta^{-1}\overline{\lim}_{n\to\infty}\sup_t P(\sup_{t\leq s\leq t+\delta}|X_n(t)-X_n(s)|\geq\varepsilon)=0$. (注意: $\{w(X_n,\delta)>3\varepsilon\}\subset \bigcup_{i=0}^{[1/\delta]}\{\sup_{i\delta\leq s\leq (i+1)\delta}|X_n(s)-X_n(i\delta)|\geq\varepsilon\}$

关于弱收敛之一些注记:

1. 点列弱收敛: X 为赋范线性空间, $x_n, x\in X$. 若 $\forall f\in X^*$, 有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x)$ 则称 $x_n\xrightarrow{w}x$.

对比: $\|x_n-x\|\to 0$ 称为强收敛

对于函数空间,其对偶空间取有界线性泛函.(有界⟺连续) $\phi\in V^*$

2. (1) 对偶空间: $V^*=\{f\mid f:V\to\mathbb{R},\ f为线性泛函\}$. $V^{**}=\{v^{**}\mid v^{**}(\phi)=\Phi_v(\phi)=\phi(v)\}$

(2) Fourier 变换即为对偶空间之 L^2 等距同构, 对于一般之 L^p 函数, 其 Fourier 变换之结果由函数推广为分布.

3. 泛函列之弱收敛: (1) $f_n, f\in X^*$, $f_n\xrightarrow{w}f$ 若 $\forall F\in X^{**}$, $F(f_n)\to F(f)$.

(2) $f_n\xrightarrow{w^*}f$ 若 $\forall x\in X$, $f_n(x)\to f(x)$.

一般之 $X\xrightarrow{inc}X^{**}$, 故 $f_n\xrightarrow{w}f$ 比 $f_n\xrightarrow{w^*}f$ 强

若 X 自反之: 即 X 与 X^{**} 等距同构, 则弱收敛与弱*收敛相同.

注意 X^{**} 一定是完备之, 故自反空间一定是 Banach 空间.

$L^p[a,b]$ $(1<p<\infty)$ 是自反的. $L^1[a,b]$ $(p=1)$ 不是自反的. $C[0,1]$ 不自反

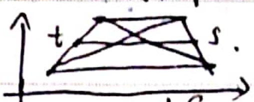
4. 由 Riesz 表示定理: $M(X) \cong C_c(X)^*$ $M(X)$ 为 X 上测度全体.

∴ X 上测度 μ_n 的弱收敛 ⟺ $C_c(X)^*$ 的弱*收敛 即 $\forall f\in C_c(X)$, $I_n(f)\to I(f)$ 即 $\int_X f\,d\mu_n \to \int_X f\,d\mu$ 故而 $X_n \xrightarrow{d} X$, $P_{X_n} \Rightarrow P_X$ 是弱收敛.

Thm 14 (Donsker) 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ i.i.d. $E\xi_i=0$. $E\xi_i^2=\sigma^2$, $X_n(t)=\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\{\sum_{k=1}^{[nt]}\xi_k+\{nt\}\xi_{[nt]+1}\}$ $0\le t\le 1$ 则 $X_n \xrightarrow{d} B$.

Pf: (1) $X_n \xrightarrow{fd} B$ ↙CLT+同分布转化一下 (2) $\lim_{\delta\to0}\delta^{-1}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_t P(\sup_{t\le s\le t+\delta}|X_n(t)-X(s)|\ge\varepsilon)=0$.

(2) $|X_n(t)-X_n(s)| \le \frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\max\{|S_{[nt]}-S_{[ns]}|, |S_{[nt]}-S_{[ns]+1}|, |S_{[nt]+1}-S_{[ns]}|, |S_{[nt]+1}-S_{[ns]-1}|\}$.



∴ $P(\sup_{t\le s\le t+\delta}|X_n(t)-X_n(s)|\ge\varepsilon) \le P(\sup_{[nt]\le k\le[n(t+\delta)]+1}\frac{2|S_k-S_{[nt]}|}{\sqrt{n}\sigma}\ge\varepsilon)$ $S_{k+m}-S_m \overset{d}{=} S_k$

$\le P(\sup_{1\le k\le[n\delta]+2}|S_k|\ge\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{n}\sigma)$ ↙与t无关 把sup放掉.

(注: ① $P(\sup_{1\le k\le[n\delta]}\frac{|S_k|}{\sqrt{n}\sigma}\ge\frac{\varepsilon}{2})\approx P(\sup_{0\le t\le\delta}|X_n(t)|\ge\frac{\varepsilon}{2})\to P(\max_{0\le t\le\delta}|B(t)|\ge\frac{\varepsilon}{2})$. 可由 BM 的具体性质给出概率值.

↙把 $\sup_{t\le s\le t+\delta}$ 放掉.

② Levy不等式: $P(\max_{1\le k\le n}|S_k+m(S_n-S_k)|\ge\varepsilon)\le 2P(|S_n|\ge\varepsilon)$

$m(S_n-S_k)$ 中位数. $|m(S_n-S_k)|\le\sqrt{2Var(S_n-S_k)}=\sqrt{2(n-k)}\,\sigma\le\sqrt{2n}\,\sigma$.

$P(\max_{1\le k\le n}|S_k|\ge\lambda\sigma_n\sqrt{n})\le P(\max|S_k+m(S_n-S_k)|\ge(\lambda-\sqrt{2})\sigma\sqrt{n})$

$\le 2P(|S_n|\ge(\lambda-\sqrt{2})\sigma\sqrt{n})\to 2P(|N|\ge(\lambda-\sqrt{2}))\le C\exp(-(\lambda-\sqrt{2})^2/2)$

$P(N\ge x)\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{x^2}{2}}$. ☆ 常用放缩.

∴ $\lim_{\delta\to0}\delta^{-1}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_t P(\sup_{t\le s\le t+\delta}|X_n(t)-X_n(s)|\ge\varepsilon)$

$\le\lim_{\delta\to0}\delta^{-1}\exp(-\frac{1}{8}(\varepsilon/\sqrt{\delta}-2\sqrt{2})^2)=0$

RMK:

① $P(X\ge m)\ge\frac{1}{2}$ 且 $P(X\le m)\ge\frac{1}{2}$, 则 m 称为 X 的中位数 记为 $m(X)$.

② Levy不等式的证明: S.P. Thm 5.2.7. 反射原理.

其他形式的Lévy不等式: $P(\max_{1\le k\le n}(S_k+m(S_n-S_k)) \ge x) \le 2P(S_n\le x)$

若 X_i 对称分布, 则 $P(\max_{1\le k\le n} S_k \ge x) \le 2P(S_n\le x)$

$P(\max_{1\le k\le n}|S_k|\ge x) \le 2P(|S_n|\le x)$.

RMK: ① Donsker定理的别称: Donsker 不变原理, 弱不变原理, 泛函中心极限定理

② $X_n \xrightarrow{d} B$, f 为连续映射, 则 $f(X_n)\xrightarrow{d} f(B)$. f 可为积分, max, 投影等.

应用Donsker定理关键是 f 的构造.

Eg1: $f=\pi_1$, 则 Donsker定理变成CLT. $f=\pi_t$, 则 $\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} B(t)\sim N(0,t)$.

$f=\pi_{t_1,t_2}$ 则 $\left(\frac{S_{[nt_1]}}{\sqrt{n}\sigma}, \frac{S_{[nt_2]}}{\sqrt{n}\sigma}\right) \to (B_{t_1}, B_{t_2})$

Eg2: $h: C[0,1]\to\mathbb{R}$ $h(x)=\sup_{0\le t\le 1} x(t)$, $x\in C[0,1]$.

则 $|h(x)-h(y)| = |\sup x(t)-\sup y(t)| \le \sup_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)| = \rho(x,y)$ ($\because |h(x)| \le \rho(x,0)$).

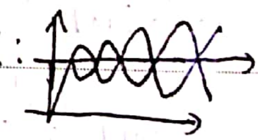
故 h 为Lip连续映射. (RMk: $h(x)=\int_0^1 x^n(t)\,dt$.)

故 $h(X_n)=\frac{\max_{1\le k\le n} S_k}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \sup_{0\le t\le 1} B(t) \overset{d}{=} |B_1|$. 类似 $\frac{\max_{1\le k\le n}|S_k|}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \sup_{0\le t\le 1}|B(t)|$.

进一步取 S_n 为SSRW, 由此可得 $\sup_{0\le t\le 1} B(t)$, $\sup_{0\le t\le 1}|B(t)|$ 的 …… 分布

计算: $P(\max_{1\le k\le n} S_k \ge m)$. 令 $\tau_m = \inf\{k: S_k\ge m\}$.

$\therefore P(\max S_k\ge m) = P(\tau_m\le n)$ 用反射原理:



$= P(S_n<m, \tau\le n) =$

$C[0,\infty))$ 空间.

· $C[0,n])$ 空间: $\rho_n(x,y)=\sup_{0\le t\le n}|x(t)-y(t)|$ $h: C[0,1]\to C[0,n]$. $x(t)\to x(nt)$ 为双射

· $C([0,\infty))$ 空间: $\rho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\left(\sup_{0\le t\le n}|x(t)-y(t)| \wedge 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\left(\rho_n(x|_{[0,n]}, y|_{[0,n]})\wedge 1\right)$

Thm7: 设 $X, X_1, X_2\cdots$ 为 $C[0,\infty)$ 上 r.e. 则 $X_n\xrightarrow{d} X \iff \forall n\ge 1$:

$X_n|_{[0,n]} \xrightarrow{d} X|_{[0,n]}$ 成立.

Pf: $\Rightarrow$: $\pi_n: C[0,\infty)\to C[0,n]$ $x\mapsto x|_{[0,n]}$. 由 ρ, ρ_n 的定义显然 π_n 连续

$\Leftarrow$: 设 X^k 为 X 在 $[0,k]$ 上限制. $\because X_n^k \xrightarrow{d} X^k$, $\forall k$.

$=(\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_k)(X_n^k)$.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 The month

DATE Mon Tue Wed Thu Fri Sat Sun

$(\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_k)$ 是 $C([0,\infty), \mathbb{R}) \to C([0,\infty), \mathbb{R}^k)$ 上连续映射

$\therefore (X_n^1, X_n^2, \cdots, X_n^k) \xrightarrow{d} (X^1, \cdots, X^k)$. 由Thm9：$(X_n^1, X_n^2, \cdots) \xrightarrow{d} (X^1, X^2, \cdots)$

$\Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$.

RMK: Thm16 中 $0\le t\le 1$ 可推广为 $0\le t<\infty$. (只需在 $C[0,k]$ 上 $X_n \to B$. 令 $\tilde{X}(t)=X(kt)$ 即可).

r.c.l.l.

$D[0,1]$: $x\in D[0,1]$ $\forall t\in[0,1]$ $x(t+)=\lim_{s\to t+} x(s)=x(t)$. $x(t-)=\lim_{s\uparrow t} x(s)$ 存在.

令 $w_x(T)=w(x,T)=\sup_{s,t\in T}|x(s)-x(t)|$. 且 $w_x(\delta)=\sup_{1\le t\le 1-\delta} w_x[t,t+\delta]$.

Lemma: $\forall x\in D$, $\forall \varepsilon>0$, $\exists$ $t_0, t_1, \cdots t_v$, $0=t_0<t_1<\cdots<t_v=1$. 且 $w_x[t_{i-1}, t_i)<\varepsilon$.

Pf: $\tau=\sup\{t\in[0,1]: [0,t)$ 可分成有限个 $[t_{i-1},t_i)$ 且 $w_x[t_{i-1},t_i)<\varepsilon\}$

由于 $x(0)=x(0+)$ 故 $\tau>0$. 又 $x(\tau-)$ 存在 故 $[0,\tau)$ 可如上分解. 又 $x(\tau)=x(\tau+)$

故 $\tau<1$ 不可能

RMK: ① $\forall\varepsilon>0$, $x(t)$ 中满足 $|x(t)-x(t-)|>\varepsilon$ 之 t 有限.

② x 间断点至多可数 ③ x 有界 $\sup_{0\le t\le 1}|x(t)|<\infty$ ④ x 可用简单函数一致逼近

③ Def: $w_x'(\delta)=w_x'(x,\delta)=\inf_{\{t_i\}}\max_{1\le i\le v} w_x[t_{i-1},t_i)$. inf 取遍所有 $\{t_i\}$. 满足 $\max_{1\le i\le v}(t_i-t_{i-1})>\delta$.

· 拓扑 (Skorohod J_1) 存在 $D[0,1]$ 上之完备可分度量 s.t. $d(x_n,x)\to 0 \Leftrightarrow$

$\exists$ $[0,1]$ 上之时间变换 λ_n 有 $\sup_s|\lambda_n(s)-s|+\sup_s|x_n(\lambda_n(s))-x(s)|\to 0$.

时间变换: $\lambda:[0,1]\to[0,1]$ 单增连续双射. $\lambda(0)=0$, $\lambda(1)=1$.

RMK: ① $D[0,1]$, $\rho(x,y)=\sup_s|x(s)-y(s)|$ 则 (D,ρ) 不可分.

② $d(x,y)=\inf_{\lambda\in\Lambda}\{\|\lambda-I\|\vee\|x-y\lambda\|\}$ $\|x-y\|=\rho(x,y)$.

③ $x\in C$, $d(x_n,x)\to 0 \Rightarrow \rho(x_n,x)\to 0$. 并且可构造 d, $d(x,y)\le\rho(x,y)$.

④ X_n, X 为 $C[0,1]$ 上之 r.e. 则 $(D[0,1],d)$ 上 $X_n\xrightarrow{d}X \Leftrightarrow (C[0,1],\rho)$ 上 $X_n\xrightarrow{d}X$

因此可证：$\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} B$ on $(D[0,1], d)$。

· 投影映射：① $\pi(0), \pi(1)$ 在 $D[0,1]$ 上处处连续。

② π_t 在 $x \in D[0,1]$ 上连续 $\Leftrightarrow$ x 在 t 连续，π_t 几乎处处连续。

Thm18：$X, X_1, \cdots$ 为 $(D[0,1], d)$ 上 r.e. 则 $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow$ 在稠密子集 $T=\{t\geq 0: \Delta X(t) = |X(t)-X(t-)|=0 \text{ a.s.}\}$ 上有 $X_n \xrightarrow{f.d.} X$ 且 $\lim\limits_{\delta\to 0}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} E|w'(X_n,\delta)\wedge 1| = 0$ (*)

RMK：① 一般 $T=[0,1]$

② 若 $\forall \varepsilon>0, \eta>0$，存在 $\delta\in(0,1)$ 和 n_0 s.t. $n\geq n_0$ 时 $P(w(X_n,\delta)\geq\varepsilon)\leq\eta$。则 * 成立

若有 $X_n \xrightarrow{d} X$ 则 $P(X\in C)=1$。故 $\left(\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}\sigma}\right) \xrightarrow{d} B_t$ 对 Skorokhod J_1 拓扑成立。

Pf：在 $(C[0,1],\rho)$ 上 $X_n \xrightarrow{d} B$ 故在 $(D[0,1], d)$ 上 $X_n \xrightarrow{d} B$.

$\therefore d(X_n(t), \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}\sigma}) \leq \rho(X_n(t), \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}\sigma}) \leq \frac{\max_i |\xi_i|}{\sqrt{n}\sigma} \to 0$

· $\xi_1, \xi_2, \cdots$ i.i.d，$\frac{S_n-a_n}{b_n} \xrightarrow{d} X$ (称稳定分布)。$\Rightarrow \left(\frac{S_{[nt]}-a_{[nt]}}{b_n}\right)_{t\in[0,1]} \xrightarrow{d} (X(t))_{t\in[0,1]}$

$(X(t))_{t\in[0,1]}$ 为稳定过程 $X(1) \overset{d}{=} X$.

故BM是Levy过程.

故稳定过程与Levy过程很常见.（把 i.i.d 序列变成独立序列，那是 Levy 过程）.

Brownian 运动性质简介，略，详见随机过程.

如 $\frac{1}{c}B(c^2t)$，$X(t)=\begin{cases}0 & t=0\\ tB(\frac{1}{t}) & t>0\end{cases}$ 仍为 BM.

注：① $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{B_t}{t} \overset{a.s.}{=} 0$ 证明：$\frac{B(n)}{n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(B(k)-B(k-1)) \xrightarrow{a.s.} 0$ (SSLN).

$\sup\limits_{n<s<n+1}|B(s)-B(n)|$ i.i.d 与 $Y_0=\sup\limits_{0<s<1}B(s) \overset{d}{=} |N|$.

② $Y_1, \cdots, Y_n$ i.i.d r.v. $E|Y|<\infty$. 则 $\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{a.s.} 0$ 且 $\frac{\max_{1\leq k\leq n} Y_k}{n} \xrightarrow{a.s.} 0$.

Brownian 运动的轨道性质：

(1) $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\frac{|B(t)|}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1$. a.s.（由于对称性，该性质与重对数律差不多）.

(5) 设 $0\le a_T\le T$, 则 $\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-a_T}\frac{B(t+a_T)-B(t)}{\sqrt{2a_T(\log(\frac{T}{a_T})+\log\log T)}}=1$

(2) $\lim_{t\to\infty}\frac{|S_t|}{\sqrt{2t\log\log t}}=1$. a.s.

(3). $\lim_{h\downarrow 0}\sup_{0\le t\le 1-h}\frac{1}{\sqrt{2h\log\frac{1}{h}}}|B(t+h)-B(t)|=1$ a.s.

(4) $\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{\sqrt{2h\log\frac{1}{h}}}\sup_{0\le t\le 1-h}\sup_{0\le s\le h}|B(t+s)-B(t)|=1$ a.s.

· 马氏性与强马氏性(回略)

· 鞅性: B_t, B_t^2-t, $\exp(\theta B_t-\frac{1}{2}\theta t^2)$, $B_t^3-3tB_t$, $B_t^4-6tB_t^3+3t^2$.

RMK: 多项式形式的鞅的构造方法:

$E\exp(\theta B_t-\frac{1}{2}\theta^2 t)=1$. 对此恒式两边求导k次再令 $\theta=0$. 即可得k次多项式形式的鞅. 如 $Ee^{\Delta}(B_t-\theta t)=0\Rightarrow Ee^{\Delta}((B_t-\theta t)^2-t)=0$

$\Rightarrow Ee^{\Delta}[((B_t-\theta t)^2-t)(B_t-\theta t)+2(\theta t-B_t)t]=0$. 令 $\theta=0$.

即得: $E(B_t^3-3tB_t)=0$.

强不变原理. Skorokhod嵌入: $\left(\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}}\right)_{t\ge 0}\xrightarrow{d}(B_t)_{t\ge 0}$. $\quad S_n=B(T_n)$. ↓嵌入.

停时定理: X_t 为右连续鞅. $\mathcal{F}_t$ 右连续. T为有界停时 则 $EX_T=EX_0$

Prop1: 记 $T_a=\inf\{t>0: B_t=a\}$, $a<x<b$. 则 $P_x(T_a<T_b)=\frac{b-x}{b-a}$

Pf: $T_a<\infty$ a.s. $T_b<\infty$ a.s. $T=T_a\wedge T_b$ 为停时.

$\therefore E_xB(T\wedge t)=E_xB(0)=x$ 令 $t\to\infty$ 由有界收敛 可知: $E_xB(T)=x$.

$\therefore x=E_xB(T)=aP(T_a<T_b)+bP_x(T_b<T_a)$, $P(T_a=T_b)=0$.

$\therefore P_x(T_a<T_b)=\frac{b-x}{b-a}$, $P_x(T_b\le T_a)=\frac{x-a}{b-a}$

Prop2: $E_x(T_a\wedge T_b)=(x-a)(b-x)$. $\quad (E_0(T_a\wedge T_b)=-ab)$.

Pf: 不妨 $x=0$. $E_0(B^2(T\wedge t)-T\wedge t)=0$. ($\{B_t^2-t, t\ge 0\}$ 为鞅).

$\therefore E_0B^2(T)=E_0(T)$. (左边D.C.T. 右边M.C.T).

$\therefore E_0T=E_0B^2(T)=a^2\frac{b}{b-a}-\frac{b^2a}{b-a}=-ab$.

RMK: $T_a<\infty$ a.s. $ET_a=\infty$. $E(T_a\wedge T_b)=-ab$.

$T_a\stackrel{d}{=}a^2/B_1^2$. p.d.f 为 $f(t)=\frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp(-\frac{a^2}{2t})$.

Lemma (嵌入引理): 设 r.v. X 满足 $EX=0$ $\mathrm{Var}X=\sigma^2\in(0,\infty)$. 则 $\exists$ B.M. $(B_t)_{t\geq0}$ 及停时 τ s.t. $B_\tau \overset{d}{=} X$, 且 $E\tau=\sigma^2$.

Pf: 设 $B=(B_t)_{t\geq0}$ 为 B.M. 取 r.v. U,V 与 B 独立. 且 $U\leq 0\leq V$, F 为 X 的分布函数

$P(U=0,V=0)=P(X=0)$, $P((U,V)\in A)=c^{-1}\iint_A (v-u)\,dF(u)\,dF(v)$,

其中 $c=EX^+=EX^-$ 令 $\tau=\tau_{U,V}=\inf\{t: B(t)\notin(U,V)\}$.

$\forall a>0$, $P(B_\tau>a)=E(P(B_\tau>a)|U,V))=E(\frac{-U}{V-U}I(V>a))$

$=c^{-1}\int_{-\infty}^{0}\int_a^{+\infty}-u\,dF(u)dF(v)=c^{-1}EX^-P(X>a)=P(X>a)$.

$\forall a<0$, $P(B_\tau<a)=E(\frac{V}{U-V}I(U<a))=P(X<a)$.

$\therefore B_\tau\overset{d}{=}X$, 且 $EX^2=EB_\tau^2=E\tau$. □.

RMK: 从中可体会停时的神奇之处. 停时定理很关键.

(Thm19) (Skorohod 嵌入定理): 设 X_n i.i.d, $EX_1=0$, $EX_1^2=1$. $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$

则 $\exists$ B.M. $\{B_t,t\geq0\}$ 以及与之独立的 i.i.d r.v. 列 $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$, $E\tau_n=1$, $\tau_n>0$

s.t. $B(\sum_{i=1}^n\tau_i)-B(\sum_{i=1}^{n-1}\tau_{i-1})$ i.i.d. 且与 X_i 同分布. 进而: $(B(\sum_{i=1}^n\tau_i))_{n\geq0}\overset{d}{=}(S_n)_{n\geq0}$

Pf: 构造 (U_i,V_i) $i=1,2,3\cdots$, i.i.d $\sim(U,V)$ 且与 B 独立.

则 $B_{\tau_{U_1,V_1}}\overset{d}{=}X_1$ 且 $B_2(t):=(B(t+\tau_1)-B(\tau_1))_{t\geq0}$ 与 $\mathcal{F}_{\tau_1}$ 独立

在 B_2 上定义 $\tau_{U_2V_2}$ 则 $B_{\tau_{U_2,V_2}}\overset{d}{=}X_2$

故归纳定义 $B^{(n)}(t):=B(t+\sum_{i=1}^n\tau_i)-B(\sum_{i=1}^n\tau_i)$, 在 $B^{(n)}$ 上定义 $\tau_{U_{n+1},V_{n+1}}$. □.

RMK: Skorohod 嵌入 = 嵌入引理 + 强马氏性, "S_n 差不多与 B_n 同分布".

嵌入定理的应用.

(Thm20) (Strasseen 强逼近 (强不变) 原理): 设 X_n i.i.d. $EX_n=0$, $EX_n^2=1$.

则 $\exists$ 新概率空间 $(\hat\Omega,\hat{\mathcal{F}},\hat{\mathbb{P}})$ 及其上 B.M. $B=\{B_t,t\geq0\}$ 和 r.v.

序列 $\{\hat S_n,n\geq1\}\overset{d}{=}\{S_n,n\geq1\}$ $(S_n=\sum_{k=1}^n X_k)$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\hat S_n-B(n)|}{\sqrt{n\log\log n}}=0\ \text{a.s.}$$

Pf: 取 $\widetilde{S}_n = B(\tau_1+\cdots+\tau_n)$. 则 $(\widetilde{S}_n)_{n\geq 0} \overset{d}{=} (S_n)_{n\geq 0}$;

$\widetilde{S}_n - B(n) = B(\tau_1+\cdots+\tau_n) - B(n)$; $\forall \varepsilon>0$. 令 $\Omega_\varepsilon := \{|\tau_1+\cdots+\tau_n - n| \leq \varepsilon n \text{ e.v.}\}$ 仅有限个不满足

$= \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\{|\tau_1+\cdots+\tau_n-n|\leq \varepsilon n\}$ 由 SSLN 知 $P(\Omega_\varepsilon)=1$.

由 B.M. 轨道性质(5) 知: ($T=n$, $a_n=\varepsilon n$ n 充分大时,在 Ω_ε 上.

$$\sup_{0\leq t\leq n-a_n}\sup_{0\leq s\leq a_n}\frac{|B(t+s)-B(t)|}{\sqrt{2a_n(\log(n/a_n)+\log\log n)}} \leq 1+\varepsilon \quad a.s.$$ 令 $\eta_n = \sum_{k=1}^{n}\tau_k - n$

$$\therefore \frac{|B(n+\eta_n)-B(n)|}{\sqrt{n\log\log n}} \leq \sup_{0\leq t\leq n-a_n}\sup_{0\leq s\leq a_n}\frac{|B(t+s)-B(t)|}{\sqrt{2a_n(\log(n/a_n)+\log\log n)}}\cdot\sqrt{\frac{2a_n(\log(n/a_n)+\log\log n)}{n\log\log n}}$$

$$\leq (1+\varepsilon)\sqrt{2\varepsilon(1+\log\tfrac{1}{\varepsilon}/\log\log n)} \overset{a.s.}{\leq} 4\sqrt{\varepsilon}.$$ (当 n 充分大时). ▨

RMK: 事实上我们可得较强结论: (由证明过程可知).

$$\frac{1}{\sqrt{n\log\log n}}\max_{1\leq k\leq n}|\widetilde{S}_k - B(k)| \to 0 \text{ a.s.}$$

Thm 21: (1) $\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{1\leq k\leq n}|\widetilde{S}_k - B_k| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. (2) $\max_{0\leq t\leq 1}\left|\frac{\widetilde{S}_{[nt]}}{\sqrt{n}} - \frac{B_{nt}}{\sqrt{n}}\right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Pf: (1) LHS $\overset{d}{=}$ (Scaling-Property) $\max_{1\leq k\leq n}\left|B\left(\frac{\tau_1+\cdots+\tau_k}{n}\right) - B\left(\frac{k}{n}\right)\right|$. $\because \eta_n/n \to 0$ a.s.

$\therefore \max_{1\leq k\leq n}|\eta_k|/n \to 0$ a.s. 记此式成立的集合为 Ω_0, $P(\Omega_0)=1$.

则 $\forall\varepsilon>0$, $w\in\Omega_0$, 由于 $\{B(w,t): 0\leq t\leq 2\}$ 一致连续, 故 $\exists\delta>0$,

$|t-s|<\delta$ 时 $|B(w,t)-B(w,s)|<\varepsilon$, 设 $n\geq n_0(w)$ 时, $\frac{\max|\eta_k|}{n}<\delta$

$\therefore \max_{1\leq k\leq n}\left|B\left(\frac{\tau_1+\cdots+\tau_k}{n}(w)\right) - B\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \varepsilon$. ▨

(2) 记 $\xi_i := \sup_{i-1\leq t\leq i}|B_t - B_{i-1}|$ 则 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ i.i.d $\sim \sup_{0\leq t\leq 1}|B_t| \Rightarrow E\xi_1^2<\infty$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{n}}\max_{1\leq i\leq n}\xi_i \xrightarrow{a.s.} 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}\sup_{0\leq t\leq n}|B_t - B_{[t]}| \xrightarrow{a.s.} 0$.

即 $\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{0\leq t\leq 1}|B_{[nt]} - B_{nt}| \xrightarrow{a.s.} 0$

由 (1) $\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{1\leq k\leq n}|\widetilde{S}_k - B_k| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\max_{0\leq t\leq 1}|\widetilde{S}_{[nt]} - B_{[nt]}|$ 证毕!

RMk：推论：注意 $\left(\frac{B(nt)}{\sqrt{n}}\right)_{t\geq 0} \overset{d}{=} (B(t))$.

$\therefore \frac{\tilde{S}_{[nt]}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} B(t)$ 再次对S列作连续化，得Donsker定理。

$\therefore \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} B(t)$.（再次证明了Donsker定理！）

此方法可以认为是Donsker定理的第二种方法！所用强逼近证明依概率收敛。

Donsker的应用：构造连续映射

(1). $f: C[0,1] \to R$. $f(x) = \int_0^1 x^k(t)dt$；

$\because |f(x)-f(y)| \leq \int_0^1 |x^k(t)-y^k(t)|dt \leq \sup_{0\leq t\leq 1} |x^k(t)-y^k(t)|$

$\leq \sup_{0\leq t\leq 1} |x(t)-y(t)|\, k \max\{\sup|x^{k-1}(t)|, \sup|y^{k-1}(t)|\} \to 0$.

（当 $\rho(x,y)\to 0$ 时）故f连续.（不一定一致连续！）

而 $\int_0^1 \frac{S_{[nt]}^k}{n^{k/2}} dt = \sum_{i=1}^{n-1} S_i^k / n^{\frac{k}{2}+1}$

$\int_0^1 \frac{S_{nt}^k - S_{[nt]}^k}{n^{k/2}} dt \leq n^{-\frac{k}{2}} \max_{1\leq k\leq n} |S_i^k - S_{i-1}^k| \leq n^{-\frac{k}{2}} k \max|X_i| \max|S_i|^{k-1}$

$= k \cdot \max_i \left|\frac{S_i}{\sqrt{n}}\right|^{k-1} \cdot \frac{\max|X_i|}{\sqrt{n}} \xrightarrow{P} 0$.

$\therefore n^{-\frac{k}{2}-1} \sum_{i=1}^{n} S_i^k \xrightarrow{d} \int_0^1 B_t^k dt$

$\int_0^1 B_t dt = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} B_{\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{n}$. 故 $\int_0^1 B_t$ 服从正态分布.

$E\left(\int_0^1 B_t dt\right) = \int_0^1 EB_t dt = 0$.

巧妙把积分值乘积转化为重积分！

$E\left(\int_0^1 B_t dt \int_0^1 B_s ds\right) = E\left(\int_0^1\int_0^1 B_t B_s\, dt ds\right) = \int_{[0,1]\times[0,1]} EB_tB_s\, dtds$

$= \iint_{[0,1]\times[0,1]} t\wedge s\, dtds = 2\int_0^1\int_0^t s\,ds\,dt = \frac{1}{3}$

$\therefore Var\left(\int_0^1 B_t dt\right) = \frac{1}{3}$. $\Rightarrow \int_0^1 B_t dt \sim N(0,\frac{1}{3})$.

$\therefore n^{-3/2} \sum_{k=1}^{n} (n+1-k) X_k \xrightarrow{d} N(0,\frac{1}{3})$.

类似计算可知 $\int_0^1 B_t^2 dt \sim N(0,\frac{9}{5})$

Stochastic Calculus

附：随机积分简介：

1. 简单过程 s.c. 定义：若 $\pi=\{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ 是 $[0,T]$ 的一个划分，$W(t)$ 为BM.

$\Delta(t)\in\mathcal{F}_t$. $\forall w\in\Omega$. $\Delta_w(t)=\Delta(t_j)$, $t_j\le t<t_{j+1}$.

Def: $\int_0^t \Delta(u)\,dW(u)=\sum_{j=0}^{k-1}\Delta(t_j)[W(t_{j+1})-W(t_j)]+\Delta(t_k)[W(t)-W(t_k)]$, $t_k\le t\le t_{k+1}$.

这里是 t_j 而不是 t_{j+1}!

2. 一般过程 s.c. 定义：取 $\Delta_n(t)\xrightarrow{L^2}\Delta(t)$，$\Delta_n(t)$ 为简单过程.

Def: $\int_0^t \Delta(u)dW(u)=\lim_{n\to\infty}\int_0^t \Delta_n(u)dW(u)$.

3. 性质 (1) $I(t)$ 是一个 MTG 且样本路径连续. (2) $I(t)\in\mathcal{F}_t$.

(3) $EI^2(t)=E\int_0^t \Delta^2(u)du$. (4) $[I,I](t)=\int_0^t \Delta^2(u)du$; $[X,X](t)$ 表示 $X(t)$ 二次变差

(5) $f(W(t))-f(W(0))=\int_0^t f'(W(u))\,dW(u)+\frac{1}{2}\int_0^t f''(W(u))\,du$.

Eg: $\int_0^t W(u)dW(u)=\frac{1}{2}W^2(t)-\frac{1}{2}t$, $t\ge 0$.

微分形式 $df(W(t))=f'(W(t))\,dW(t)+\frac{1}{2}f''(W(t))\,dt$.

RMK: 对于 (4). $dI(t)\,dI(t)=\Delta^2(t)dt$. $dW(t)dW(t)=dt$

由Ito公式可得. $B_t^k-\frac{1}{2}\int_0^t k(k-1)B_u^{k-2}du$ 是一个鞅.

Stein方法：

参考书：① Ross N. Fundamentals of Stein's method Probability Survey, 2011, 210-293；· Barbour A.D. Holst. L. and Janson S. Poisson approximation 1992

② · Chen H.Y, Goldstein L. and Shao Q. Normal approximation by steins method. 2011.

(key Lemma)：设 Z 为 r.v. 则 $Z\sim N(0,1) \Leftrightarrow E(Zf(Z)) = Ef'(Z)$ 对所有满足 $E|f'(Z)|<\infty$ 的 AC 函数成立.

分部积分不行.

Pf: $\Rightarrow$ $Ef'(Z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} f'(t)dt \times \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} df(t)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_t^\infty w e^{-\frac{w^2}{2}} dw\, f'(t)dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t w e^{-\frac{w^2}{2}} dw\, f'(t)dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_0^w f'(t)dt\, w e^{-\frac{w^2}{2}} dw - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \int_w^0 f'(t)dt\, w e^{-\frac{1}{2}w^2} dw$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty (f(w)-f(0)) w e^{-\frac{w^2}{2}} dw - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 (f(0)-f(w)) w e^{-\frac{w^2}{2}} dw$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(w) w e^{-\frac{w^2}{2}} dw = E(Zf(Z))$$

$\Leftarrow$ 需要 Lemma 2：

Lemma 2：$\forall z \in \mathbb{R}$ (fixed) $\Phi(z) = P(Z\le z)$ 则 Stein 方程 $f'(w) - wf(w) = 1_{\{w\le z\}} - \Phi(z)$ 的有界解唯一

$$f_z(w) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}\, e^{w^2/2} \Phi(w)[1-\Phi(z)] & w\le z \\ \sqrt{2\pi}\, e^{w^2/2} \Phi(z)[1-\Phi(w)] & w>z \end{cases}$$

RMK：Stein 方程的来源. $E(wf(w) - f'(w)) \approx 0$.

$P(W\le x) - \Phi(x) = E(f_x'(W) - Wf_x(W)) \Rightarrow f'(w) - wf(w) = I(w\le x) - \Phi(x)$.

但此方程的解性质不好！故考虑：

$Eh(W) - Eh(Z) = Ef_h'(W) - EWf_h(W) \Rightarrow f'(w) - wf(w) = h(w) - Eh(Z)$

注：$W_n \xrightarrow{d} Z \Leftrightarrow Eh(W_n) \to Eh(Z)$. h 取 e^{itx} 时 即 $Ee^{itW_n} \to Ee^{itZ}$.

但 $(e^{itx})' = ite^{itx}$. 不一致有界.

证明收敛的方法都会涉及距离.

Pf of Lemma 2: 考虑 $(e^{-w^2/2}f_z(w))' = e^{-\frac{w^2}{2}}f_z'(w) - we^{-w^2/2}f_z(w)$

$\overset{\text{stein}}{=} e^{-w^2/2}(1(w\le z) - \Phi(z))$

∴ $e^{-w^2/2}f_z(w) = \int_w^\infty e^{-t^2/2}(\Phi(z) - 1(t\le z))\,dt + C$

∴ $f_z(w) = e^{w^2/2}\int_w^\infty e^{-t^2/2}(\Phi(z)-1(t\le z))\,dt + Ce^{w^2/2}$. 由有界性 $C=0$

∴ $f_z(w) = e^{w^2/2}\sqrt{2\pi}\,[\Phi(z)(1-\Phi(w)) - (\Phi(z)-\Phi(w))]$, ($w\le z$ 时)

$= e^{w^2/2}\sqrt{2\pi}\,\Phi(w)[1-\Phi(z)]$　　$w>z$ 同理.

(由 $f_z(w)$ 绝对连续可加 key Lemma 的 ⇐ 得证!)

RMK: $f_z(w)$ 的性质 (1) $f_z(w)$ 有界连续, $0<f_z(w)\le \min\{\frac{\sqrt{2\pi}}{4}, \frac{1}{|z|}\}$.

Pf: $f_z(w)\le \sqrt{2\pi}\,e^{z^2/2}\Phi(z)(1-\Phi(z))$

$|z|f_z(w)\le\sqrt{2\pi}\,|z|e^{z^2/2}\Phi(z)(1-\Phi(z))$. (∵ $|z|(1-\Phi(z))\le\Phi'(z)$

$\le\Phi(z)\le 1$　　$\Phi(x)(1-\Phi(x))\le\frac{1}{4}\Phi'(x)$)

(2) $|f_z'(x)|\le 1$　(3) $|f_z'(w)-f_z'(v)|\le 1$. f_z' 性质不是很好. 故将stein方程改进一下:

· 对 ∀ 满足 $E|h(Z)|<\infty$ 的可测函数 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 考虑Stein方程.

$f'(w)-wf(w) = h(w)-E(h(Z))$　(∵ $E[f'(W)-Wf(W)] = Eh(W)-Eh(Z)$).

类似Lemma 2 可解出:

$$f_h(w) = e^{w^2/2}\int_{-\infty}^{w}(h(x)-Eh(Z))e^{-x^2/2}dx = -e^{w^2/2}\int_w^\infty (h(x)-Eh(Z))e^{-x^2/2}dx$$

f_h 的性质:

(1) 若 h 有界, 则 $\|f_h\|\le\sqrt{\pi}\|h\|$, $\|f_h'\|\le 4\|h\|$

(2) 若 $h\in AC(\mathbb{R})$, $\|f_h\|\le 2\|h'\|$, $\|f_h'\|\le\sqrt{\frac{2}{\pi}}\|h'\|$, $\|f_h''\|\le 2\|h'\|$

距离：(1) Kolmogorov 距离：

$d_K(X,Y)=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|P(X\le x)-P(Y\le x)|=\sup\limits_{h\in\mathcal{H}_1}|Eh(X)-Eh(Y)|$，$\mathcal{H}_1=\{h(t)=I(t\le x),x\in\mathbb{R}\}$.

(2) 全变差距离：

$d_{TV}(X,Y)=\sup\limits_{A}|P(X\in A)-P(Y\in A)|=\sup\limits_{h\in\mathcal{H}_2}|Eh(X)-Eh(Y)|$ $\mathcal{H}_2=\{h(t)=I(t\in A),A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\}$

(3) Weierstrass 距离：

$d_W(X,Y)=\sup\limits_{h\in\mathcal{H}_3}|Eh(X)-Eh(Y)|$ $\mathcal{H}_3=\{h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},|h(x)-h(y)|\le|x-y|\}$.

比较：(1) $d_K(X,Y)\le d_{TV}(X,Y)$ 故 $d_{TV}(X_n,X)\to0\Rightarrow d_K(X_n,X)\to0\Rightarrow X_n\xrightarrow{d}X$

(2) $d_W(X_n,X)\to0\Rightarrow Eh(X_n)\to Eh(X)$，$h\in\mathcal{H}$．故 $Eh(X_n)\to Eh(X)$ 对 $\forall h\in Lip(\mathbb{R})$ 成立．又 $\overline{Lip(\mathbb{R})}\supset C_b(\mathbb{R})$．故 $Eh(X_n)\to Eh(X)$ $\forall h\in C_b(\mathbb{R})$ 成立

故 $X_n\xrightarrow{d}X$．（用折线段函数逼近）

(3) 若 Y 有 p.d.f. $f_Y(y)$，且 $f_Y(y)\le C$ $\forall y\in\mathbb{R}$ 成立，则有：

$d_K(X,Y)\le\sqrt{2C\,d_W(X,Y)}$（故此时 $d_W(X_n,X)\to0\Rightarrow d_K(X_n,X)\to0$

(4) 由 B-E 不等式 $d_K(\frac{S_n}{\sqrt{n}},Z)\le A\frac{E|X|^3}{\sqrt{n}\sigma^3}$，其中 $Z\sim N(0,\sigma^2)$．$EX_i^2=\sigma^2$．$EX_i=0$．

连续时用 d_K 或 d_W．不能用 d_{TV}（正态时不好）；离散时用 d_{TV}．

（如 Poisson 收敛定理证明．离散状态空间的 Markov 链极限分布）．

一些性质：(1) $d_{TV}(W,Z)=\frac{1}{2}\sum\limits_{w\in\Omega}|P(W=s)-P(Z=s)|$．

(2) $d_{TV}(F,G)=\inf\{P(X\ne Y):X\sim F,Y\sim G\}$（耦合的想法．把服从 F,G 的 X,Y 放在一个概率空间上．——证明中称为 coupling）．

(3) $d_W(F,G)=\inf\{E|X-Y|:X\sim F,Y\sim G\}$．

$d_W(W,Z)=\sup\limits_{h\in\mathcal{H}_3}|Eh(W)-Eh(Z)|=\sup\limits_{h\in\mathcal{H}_3}|E(f_h'(W)-Wf_h(W))|$

$\le\sup\limits_{f\in\mathcal{D}}|E(f'(W)-Wf(W))|$ $\mathcal{D}=\{f:f$ 二次可微 $\|f\|\le 2,\|f'\|\le\sqrt{\frac{2}{\pi}},\|f''\|\le2\}$

$\mathcal{D}_1=\{f:f$ 二次可微，$\|f\|,\|f'\|,\|f''\|\le1\}$．

Prop: 设 X_i 独立，$EX_i=0$. $W=\sum_{i=1}^n X_i$ $EW^2=1$. 则 $d_W(W,Z)\le 3\sum_{i=1}^n E|X_i|^3$

RMK: 取 $h(x)=|x|$. 则 $h\in H_3$. 由此Prop: $\big|E|W|-E|N|\big|\le 3\sum_{i=1}^n E|X_i|^3$.

而 $E|N|=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$，且 $\sum E|X_i|^3\le \frac{C_1}{\sqrt{n}}$ $\Rightarrow$ $\big|E|W|-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\big|\le \frac{C}{\sqrt{n}}$.

不严格之表述:

Pf: $EWf(W)=\sum_{i=1}^n X_i f(W)$，记 $W^{(i)}=W-X_i$. 其中 $f\in\mathcal{D}$

$=\sum_{i=1}^n EX_i\left(f(W^{(i)})+X_i f'(W^{(i)})+\frac{\theta}{2}\|f''\|X_i^2\right)$ $0\le\theta\le1$, θ为r.v., X_i与$W^{(i)}$独立!

$=\sum_{i=1}^n EX_i^2 f(W^{(i)})+\frac{\hat\theta}{2}\|f''\|\sum_{i=1}^n E|X_i|^3$, $0\le\hat\theta=E\theta\le1$

$Ef'(W)=\sum_{i=1}^n EX_i^2\, Ef'(W)=\sum_{i=1}^n EX_i^2\, E\left(f'(W^{(i)})+\theta|X_i|\|f''\|\right)$, $0\le\theta\le1$, θ为r.v.

$=\sum_{i=1}^n EX_i^2\, Ef'(W^{(i)})+\hat\theta\|f''\|\sum_{i=1}^n E|X_i|\cdot EX_i^2$

严格证明:

Lemma1: X为r.v. 则 $E|X|\,E|X|^2\le E|X|^3$.

Pf: 由Jesen不等式: $E|X|\le(E|X|^3)^{\frac13}$, $E|X|^2\le E(|X|^3)^{\frac23}$

故 L.H.S $\le E|X|^3$.

Lemma2: X为r.v. f,g为单增函数. 则 $Ef(X)g(X)\ge Ef(X)Eg(X)$.

(Lemma2为Lemma1之推广).

Pf: 取X'为X之独立复制. 则 $E(f(X)-f(X'))(g(X)-g(X'))\ge0$

$\Rightarrow Ef(X)g(X)-Ef(X)Eg(X')-Eg(X)Ef(X')+Ef(X')g(X')\ge0$

$\Rightarrow 2Ef(X)g(X)-2Ef(X)Eg(X)\ge0$. ∎.

回到严格证明:

$EWf(W)=\sum_{i=1}^n EX_if(W)\overset{\text{独立性}}{=}\sum_{i=1}^n EX_i(f(W)-f(W^{(i)}))=\sum_{i=1}^n EX_i(f(W)-f(W^{(i)})$
$-X_if'(W^{(i)}))+\sum_{i=1}^n EX_i^2f'(W^{(i)})$, 而 $EX_i^2f'(W^{(i)})=EX_i^2Ef'(W^{(i)})$,

$\sum_{i=1}^n EX_i^2=EW^2=1$ 故而:

$|EWf(W)-Ef'(W)|\le\left|\sum_{i=1}^n EX_i(f(W)-f(W^{(i)})-X_if'(W^{(i)}))\right|+\sum_{i=1}^n EX_i^2\left|E(f'(W)\right.$
$\left.-f'(W^{(i)}))\right|\le\sum_{i=1}^n E|X_i|\frac{|X_i|^2}{2}\|f''\|+\sum_{i=1}^n EX_i^2\|f''\|E|X_i|$

(Lemma1) $\le\frac{3}{2}\|f''\|\sum_{i=1}^n E|X_i|^3\le3\sum_{i=1}^n E|X_i|^3$.

RMk：上述过程进行Taylor估计时：可更加精细：

$|f(W)-f(W^{(i)})-X_i f'(W^{(i)})| \leq 2|X_i|\,\|f'\| \wedge \frac{1}{2}|X_i|^2\|f''\|$

$|f'(W)-f'(W^{(i)})| \leq |X_i| \wedge 2$ $(f \in \mathscr{D})$. 又由Lemma2：$EX_i^2 E(|X_i| \wedge 1) \leq E(X_i^2 \wedge |X_i|^3)$.

$\therefore |EWf(W)-Ef'(W)| \leq C\sum_{i=1}^{n} E(|X_i|^2 \wedge |X_i|^3)$.

故命题可加强为：$d_W(W,Z) \leq C\sum_{i=1}^{n} E(|X_i|^2 \wedge |X_i|^3) \leq C\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^{2+\delta}$. $\forall \delta>0$

事实Berry-Essen界也可以类似改进：

$d_K(\frac{S_n}{\sqrt{n}}, N(0,1)) \leq C\cdot E(\frac{|\xi|^3}{\sqrt{n}} \wedge |\xi|^2) = nE((\frac{|\xi|}{\sqrt{n}})^3 \wedge (\frac{|\xi|}{\sqrt{n}})^2)$.

附：$d_K(X,Y) \leq \sqrt{2C d_W(X,Y)}$ 之证明：

2021.6.21.

例：设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为r.v. （不独立） $EX_i=0$, $EW^2=1$, $(W=\sum_{i=1}^{n}X_i)$. $\forall i=1,2,\cdots,n$.

$\exists N_i$, s.t. $X_i \perp\!\!\!\perp \{X_j, j\notin N_i\}$. 且$|N_i| \leq D$. 下估计$d_W(W,Z)$ $(Z\sim N(0,1))$

解：$\because EWf(W)=\sum_{i=1}^{n}EX_i(f(W)-f(W^i))$ 其中 $W^i := \sum_{j\notin N_i} X_j$.

$=\sum_{i=1}^{n}EX_i\underbrace{(f(W)-f(W^i)-(W-W^i)f'(W))}_{\text{泰勒}} + \sum_{i=1}^{n}EX_i(W-W^i)f'(W)$.

$|EWf(W)-Ef'(W)| \leq \boxed{\sum_{i=1}^{n}E|X_i|\cdot\frac{1}{2}\|f''\|(W-W^i)^2} + |\sum_{i=1}^{n}Ef'(W)(1-X_i(W-W^i))| := I + II$

$|I| \leq \sum_{i=1}^{n}E|X_i|(W-W^i)^2 = \sum_{i=1}^{n}E|X_i|(\sum_{j\in N_i}X_j)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}E|X_i|\,|N_i|(\sum_{j\in N_i}X_j^2)$

$\le D\sum_{i=1}^{n} E|X_i|\left(\sum_{j\in N_i} X_j^2\right) \le D\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in N_i} E\frac{|X_i|^3+2|X_j|^3}{3} \le D\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in N_i} E\left(|X_i|^3+|X_j|^3\right)$

$\le 2D^2\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^3$

$\text{II} = \left|Ef'(W)\sum_{i=1}^{n}(1-X_i(W-W^i))\right| \le \left[E(f'(W))^2\, E\left(\sum_{i=1}^{n}(1-X_i(W-W^i))\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

$\le C\sqrt{E\left[\sum_{i=1}^{n}(1-X_i(W-W^i))\right]^2}$ $\quad \sum_{i=1}^{n} EX_i(W-W^i) = \sum EX_iW = EW^2 = 1.$

$= C\sqrt{Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i(W-W^i)\right)}$ $\quad Var(\sum X_i(W-W^i))$ 考虑 $\sum EX_i^4$ 作为上界，

Proposition：$\hat{K}(t) = \frac{\Delta}{2\lambda}\left(1(-\Delta\le t\le 0) - 1(0<t\le -\Delta)\right)$ $\quad \Delta = W-W'$. W'为W的交换对

$EWf(W) = E\int_{-\infty}^{\infty} f'(W+v)\hat{K}(v)\,dv + ERf(W)$，$R$为小量.

则$|E(h(W)-h(Z))| \le \|h'\|\left(E|1-\hat{K}_1| + 2E\hat{K}_2 + 2E|R|\right)$ 其中：

$\hat{K}_1 = E\left(\int_{-\infty}^{\infty}\hat{K}(u)\,du \,\middle|\, \mathcal{F}\right)$ $\quad \hat{K}_2 = \int_{-\infty}^{\infty}|u\hat{K}(u)|\,du$. $\mathcal{F}$为包含$\sigma(W)$的σ域.

Pf: $|Eh(W)-Eh(Z)| = |Ef_h'(W) - EWf(W)| = |Ef'(W) - E\int_{-\infty}^{\infty} f'(W+v)\hat{K}(v)\,dv - ERf(W)$

$= |Ef_h'(W)(1-\hat{K}_1) + E\int_{-\infty}^{\infty}(f_h'(W)-f_h'(W+u))\hat{K}(u)\,du - ERf_h(W)|$

$|Ef_h'(W)(1-\hat{K}_1)| \le \|h'\|\sqrt{\frac{2}{\pi}}E|1-\hat{K}_1|$,

$|E\int_{-\infty}^{\infty}(f_h'(W)-f_h'(W+t))\hat{K}(t)\,dt| \le E\int_{-\infty}^{\infty}\|f_h''\|\,|t|\,\hat{K}(t)\,dt \le 2\|h'\|E\hat{K}_2$

$|ERf_h(W)| \le \|f_h\|E|R| \le 2\|h'\|E|R|$.

$E\int_{-\infty}^{\infty} f_h'(W)\hat{K}(u)\,du = Ef_h'(W)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{K}(u)\,du = E\left(f_h'(W)\,E\left(\int_{-\infty}^{\infty}\hat{K}(u)\,du \,\middle|\, W\right)\right) = Ef_h'(W)\hat{K}_1$

$|Eh(W)-Eh(Z)| = |E(f_h'(W)-Wf_h(W))| = |E(f_h'(W)-f_h'(W+\Delta))| \le E\|f_h''\|\,|\Delta|$

$\le 2\|h'\|E|\Delta|$

例：(1) $W = \sum_{i=1}^{n}\xi_i$ $\quad \xi_i$独立 $\quad E\xi_i = 0$. 则：

$EWf(W) = \sum E\xi_i f(W) = \sum E\xi_i(f(W)-f(W^i)) = \sum E\xi_i\int_0^{\xi_i} f'(W^i+t)\,dt$

$= \sum\int_{-\infty}^{\infty} Ef'(W^i+t)K_i(t)\,dt$,

$K_i(t) = E\xi_i\left(I(0\le t\le \xi_i) - I(\xi_i\le t\le 0)\right)$.

(2) 可交换对：若 ① $(W,W') \stackrel{d}{=} (W',W)$，则称其为可交换对。

② ∃ 较小 λ s.t. $E(W'-W|W) = -\lambda W + o(\lambda)$，$E((W'-W)^2|W) = 2\lambda + o(\lambda)$

$E(|W'-W|^3|W) = o(\lambda)$

$E(W'-W)(f(W')+f(W)) = 0$

$0 = E(W'-W)(f(W')+f(W)) = E(W'-W)(f(W')-f(W)) + 2E(W'-W)f(W)$

$\approx E(W'-W)^2 f'(W) + 2Ef(W)\cdot(-\lambda W) + o(\lambda) \approx 2\lambda Ef'(W) - 2\lambda EWf(W) + o(\lambda)$.

Thm: 设 $E(W-W'|W) = \lambda(W-R)$，则 $EWf(W) = \frac{1}{2\lambda}E(W-W')(f(W)-f(W')) + ERf(W)$.（记 $\Delta = W-W'$）$= \frac{1}{2\lambda}E\Delta\int_0^{-\Delta} f'(W+u)\,du + ERf(W)$

$= E\int_{-\infty}^{\infty} f'(W+u)\hat{K}(u)\,du + ERf(W)$　　$\hat{K}(u) = \frac{\Delta}{2\lambda}(I(-\Delta<u<0) - I(0\le u<\Delta))$

$\hat{K}_1 = \frac{1}{2\lambda}E(\Delta^2|\mathcal{F})$　　$\hat{K}_2 = \frac{1}{4\lambda}|\Delta|^3$.

例：$X_1, X_2, \cdots, X_n$ i.i.d. $EX_i = 0$，$Var(X_i) = 1$. $E|X_i|^3 < \infty$. $W = \sum X_i/\sqrt{n}$.

令 $W' = \frac{X_1' + \sum_{i=2}^{n} X_i}{\sqrt{n}} = W + \frac{X_1'-X_1}{\sqrt{n}}$.（$X_1'$ 与 X_1 同分布且与 X_i 独立）

∴ $(W',W) \stackrel{d}{=} (W,W')$

设 (X_i') 为 (X_i) 复制. I 为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中均匀分布 r.v.（即随机下标），I 与其他 r.v. 独立

令 $W' = W + \frac{X_I'-X_I}{\sqrt{n}}$　　且 $E(W'-W|X_1,\cdots,X_n) = E(\frac{X_I'-X_I}{\sqrt{n}}|X_1,\cdots,X_n)$

$= \frac{1}{n}E(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i'-X_i)}{\sqrt{n}}|X_1,\cdots,X_n) = -\frac{1}{n}W$.

∴ $E((W'-W)^2|\mathcal{F}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(\frac{(X_i'-X_i)^2}{n}|X_1,\cdots,X_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2+1)$　　□

· $W = f(X_1,\cdots,X_n)$. $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布. (X_i') 与 (X_i) 复制 I 独立随机下标

$W' = f(X_1, \cdots, X_i, \cdots, X_n)$ 若 X_i 仅独立，则 I 的分布依赖 X_i 的方差.

size bias coupling

· 设 $X \geq 0$，$EX = \mu$，称 X^s 具有 size-bias 分布，若对 $\forall$ 满足 $E|Xf(X)| < \infty$ 的 f 都有 $EXf(X) = \mu Ef(X^s)$

X^s 的分布：$dF^s(x) = \frac{x}{\mu} dF(x)$ $\begin{cases} P(X^s = k) = kP(X=k)/\mu \\ X^s \sim x p_X(x)/\mu \end{cases}$

$d_{TV}(F, G) = \inf\{P(X \neq Y), X \sim F, Y \sim G\}$

· 设 $Var(X) = \sigma^2$，$W = \frac{X-\mu}{\sigma}$，$W^s = \frac{X^s - \mu}{\sigma}$

$$E Wf(W) = E\frac{X-\mu}{\sigma} f\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} EXf\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) - \frac{\mu}{\sigma} Ef\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \frac{\mu}{\sigma} Ef\left(\frac{X^s - \mu}{\sigma}\right) - \frac{\mu}{\sigma} Ef(W) = \frac{\mu}{\sigma} E(f(W^s) - f(W))$$

· $E(X^s - X | X) = \frac{\sigma^2}{\mu} 1$

详见参考书②的 chapter 2.

极限理论所讲内容概要

一、极限定理（CLT）.

1. 特征函数的性质：基本性质；Parseval恒等式，反转公式，Taylor展开与矩，连续性定理，一些估计.

2. CLT：Lindeberg-Feller CLT（特征函数法证.（刘老师用的试函数证））.核心：Lindeberg替换思想）Feller-Levy CLT（独立和，充要条件）；二阶矩不存在时CLT.（充要）

3. 收敛的误差（正态）：Kolmogorov距离 Berry-Eessen不等式. Eessen不等式 Edgeworth展开. Cramer大偏差.

4. Poisson收敛：$\left|\prod_{m=1}^{n} z_m - \prod_{m=1}^{n} w_m\right| \le \theta^{n-1}\sum_{m=1}^{n}|z_m - w_m|$，全变差距离（离散常用）
$d_{TV}(\sum X_i, \sum Y_i) \le \sum d_{TV}(X_i, Y_i)$.

5. 稳定分布. i.i.d 收敛的吸引域. 无穷可分分布：独立和的吸引域

二、条件期望与鞅论.

1. R-N导数：Jordan-Hahn分解 Lebesgue分解.

2. 条件期望的定义与性质：验证时常对示性函数验证即可. 条件期望具体计算（待定系数法）.
条件期望的收敛性，正交性（投影），条件方差，条件期望的局部性；条件概率（分布）
条件独立与Markov性.

3. 鞅：(1) 停时的基本性质，$\mathcal{F}_T$的性质，停时的例子.

(2) 鞅的定义.鞅差.鞅的例子.鞅变换、Doob分解. Efron-Stein不等式；上穿不等式，鞅收敛，Levy 0-1律，L^p收敛，L^1收敛 可交换列. 可交换σ域；尾σ域. de-Finetti定理.
H-S 0-1律；停时定理.

三、度量空间的弱收敛：

1. 弱收敛的五个等价命题；连续映射定理及其加强.

2. 具体的例子. $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^\infty$, $C[0,1]$, $C[0,\infty)$, $D[0,1]$ 上 $X_n \xrightarrow{d} X$ 的充要条件.
随着空间变复杂，上面的度量，拓扑变复杂，故紧性的要求变复杂.
核心定理：Donsker定理.（紧性的探索：相对紧 $\xrightarrow{\text{Prohorov}}$ 胎紧 $\xrightarrow{\text{Thm14}}$ 两个概率表述 $\xrightarrow{\text{Thm15}}$ 具体表述
一个概率表达.（便于验证）

应用：构造连续映射得到各种极限分布

3. Skrokhod 嵌入定理⇒Strasseen强逼近定理 ⇒ $\max_{0\le t\le 1}\left|\frac{\tilde{S}_{[nt]}}{\sqrt{n}}-\frac{B_{nt}}{\sqrt{n}}\right|\xrightarrow{P}0$ ⇒ Donsker.

常见连续映射: $(\pi_{t_1},\cdots,\pi_{t_n})$, $\sup_{0\le t\le 1}x(t)$, $\int_0^1 x^k(t)dt$.

四 Stein方法: $EZf(Z)=Ef'(Z) \iff Z\sim N(0,1)$.

Stein方程: $f'(w)-wf(w)=1(w\le x)-\Phi(x)$. $f'(w)-wf(w)=h(w)-Eh(Z)$

Stein方程之处理: K函数, 可交换对, Zero Bias, Size Bias.

Berry-Essen不等式证明: $E\xi_i=0$, 独立, $\sum E\xi_i^2=1$, $\gamma=\sum E|\xi_i|^3$.

$E(Wf(W))=\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}E(f'(W^{(i)}+t))K_i(t)dt$ $\quad K_i(t)=E\xi_i(1(0\le t\le \xi_i)-1(-\xi_i\le t<0))$

Lemma1: $\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}P(W^{(i)}+t\le z)K_i(t)dt-\Phi(z)\right|\le 2.44\gamma$.

Lemma2: $\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}P(W^{(i)}+t\le z)K_i(t)dt-P(W\le z)\right|\le 6.95\gamma$.

Pf of Lemma1: RMK: $\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}P(W^{(i)}+t\le z)K_i(t)dt=P(W^*\le z)-\Phi(z)$. $W^*=W-\xi_i+\xi_i^*$. $\xi_i^*\sim\frac{K_i(t)}{E\xi_i^2}$ pdf.

W^*为W之Zero bias coupling

记$f=f_z$为$f'(w)-wf(w)=1(w\le z)-\Phi(z)$之解. 则:

$EWf(W)=\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}Ef'(W^{(i)}+t)K_i(t)dt=\sum\int E\{(W^{(i)}+t)f(W^{(i)}+t)+1(W^{(i)}+t\le z)-\Phi(z)\}K_i(t)dt$ $\Rightarrow \sum\int P(W^{(i)}+t\le z)K_i(t)-\Phi(z)=\sum\int E\{Wf(W)-(W^{(i)}+t)f(W^{(i)}+t)\}K_i(t)dt$, 注意 $|Wf(W)-(W^{(i)}+t)f(W^{(i)}+t)|=|(W^{(i)}+\xi_i)f(W^{(i)}+\xi_i)-(W^{(i)}+t)f(W^{(i)}+t)|$

$\le\left(|W^{(i)}|+\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\right)(|\xi_i|+t)$ $\overset{E|W^{(i)}|\le 1}{\Rightarrow}$ L.H.S $\le(1+\sqrt{2\pi}/4)\sum\int(E|\xi_i|+|t|)K(t)dt$

$\le(1+\sqrt{2\pi}/4)\sum E|\xi_i|E\xi_i^2+\frac{1}{2}E|\xi_i|^3\le 2.44\gamma$.

Pf of Lemma2:

L.H.S. $\le\sum\int|P(W^{(i)}+t\le z)-P(W\le z)|K_i(t)dt=\sum\int|P(z-t\vee\xi_i\le W^{(i)}\le z-t\wedge\xi_i)|K_i(t)dt$

$\overset{☆}{\le}\sum\int E\{\sqrt{2}(|t|+|\xi_i|)+2(\sqrt{2}+1)\gamma\}K_i(t)dt=\sqrt{2}\sum\frac{1}{2}E|\xi_i|^3+E|\xi_i|E\xi_i^2+2(\sqrt{2}+1)\gamma$

$\le 6.95\gamma$.

其中☆用到了Lemma3: 集中不等式: $\forall a<b$, $1\le i\le n$.

$P(a\le W^{(i)}\le b)\le\sqrt{2}(b-a)+2(\sqrt{2}+1)\gamma$, $\gamma=\sum E|\xi_i|^3$. $W^{(i)}=\sum_{j\ne i}\xi_j$.

由Lemma1+Lemma2 Berry-Essen不等式得证!