2020 年秋季《高等微积分 1》期末考试试题

2020 年 12 月 30 日 19 : 00-21 : 00

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第 1 题 $10+5$ 分, 第 5 题 $7+8$ 分, 第 6 题 15 分, 其余各题每小问 5 分.

1 (1) 叙述任意一个版本的牛顿-莱布尼兹 (Newton-Leibniz) 公式, 并给出证明.

(2) 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续函数, $a,b:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的可导函数. 定义

$$H(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt.$$

计算 H 的导函数 $H'(x)$.

2 (1) 叙述带拉格朗日 (Lagrange) 余项的泰勒 (Taylor) 公式, 要求展开至一般阶数.

(2) 计算函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\pi\cot(\pi x)-\frac{1}{x}\right)$, 这里 $\cot y=\frac{\cos y}{\sin y}$ 是余切函数.

(3) 计算函数极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{x-1}\right)$.

(4) 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是 $\mathbf{R}$ 中的下凸函数且在 $\mathbf{R}$ 上有上界. 证明: f 是常值函数.

3 (1) 设 n 是正整数, 计算定积分 $\int_1^n \ln x dx$.

(2) 证明: 对正整数 n, 有

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<en\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

其中 $n!=n(n-1)\cdots 1$ 表示 n 的阶乘, $e=\lim\limits_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^m$.

4 (1) 求函数 $\arctan\left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ 的导函数.

(2) 计算不定积分

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arctan\left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx.$$

(3) 计算定积分

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arctan\left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx.$$

5 (1) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数, 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ 收敛当且仅当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ 的收敛发散性, 并请证明你的断言.

6 称形如 $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ 的函数为有理式, 其中 $P(x), Q(x)$ 都是关于 x 的多项式. 证明: 对任何有理式 $f(x)$, 不定积分 $\int f(x)dx$ 一定可以表示成一个有理式加上如下三类函数的某个线性组合:

$$\ln|x-x_0|, \quad \ln((x-x_0)^2+c), \quad \arctan(ax+b),$$

其中 $x_0, a, b, c \in \mathbf{R}$, $c > 0$.

7 (1) 设 B, δ 是给定的正数, x_0 是给定的实数. 利用恒等式 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\frac{Bn}{\pi}} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{-nB(x-x_0)^2} dx\right) = 1.$$

(2) 给定的实数 $a < b$. 设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 在 $\mathbf{R}$ 上有连续的二阶导函数. 已知 $x_0 \in (a,b)$ 是 f 在区间 $[a,b]$ 上的唯一的最大值点, 且有 $f''(x_0) = -A < 0$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_a^b e^{nf(x)} dx}{e^{nf(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{nA}}} = 1,$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}$ 表示数列极限, 上式分子中的积分是对指数函数 $e^{nf(x)}$ 积分.