数 字 电 路

Digital Circuits

04_逻辑代数基础(2)

张俊霞
zjx@ustc.edu.cn

内容提纲

逻辑函数式的标准形式

- 逻辑函数表达式，也称逻辑函数代数式，简称逻辑函数式，或者逻辑式
- 逻辑函数式的五种常用形式
  - 与－或、或－与、与非－与非、或非－或非、与－或－非等
- 逻辑函数式的两种标准形式
  - 最小项之和形式
  - 最大项之积形式

示例—逻辑函数式常用形式

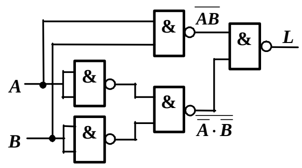
$L = AC + \bar{C}D$	与－或式
$= (A+\bar{C})(C+D)$	或－与式
$= \overline{\overline{AC}\cdot\overline{\bar{C}D}}$	与非－与非式
$= \overline{\overline{(A+\bar{C})}+\overline{(C+D)}}$	或非－或非式
$= \overline{\bar{A}C + \bar{C}\bar{D}}$	与－或－非式

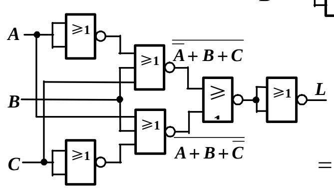
逻辑函数式的变换

- 与－或式 → 与非－与非式
  - 对整个式子应用还原律和摩根定理
- 与－或式 → 或非－或非式
  - 对每个与项应用还原律和摩根定理
  - 再对结果整个式子应用还原律

示例—逻辑函数式的变换

$$L = AB + \bar{A}\bar{B}$$
$$= \overline{\overline{AB + \bar{A}\bar{B}}}$$
$$= \overline{\overline{AB}\cdot\overline{\bar{A}\bar{B}}}$$





$$L = \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C}$$
$$= \overline{\overline{\bar{A}\bar{B}C}} + \overline{\overline{A\bar{B}\bar{C}}}$$
$$= \overline{\overline{A+B+\bar{C}} + \overline{\bar{A}+B+C}}$$

最小项定义

- 最小项(m_i)：含有全部输入变量的与项，每个变量均以原变量或反变量的形式出现一次
  - m表示最小项，下标 i为最小项编号
  - i=原变量和反变量分别取1和0构成的二进制数所对应的十进制值（注意变量次序）
- 对于**n**变量逻辑函数，共有**2^n**个最小项

例，两变量最小项共有**4**项

最小项	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}B$	$A\overline{B}$	AB
i	0 0	0 1	1 0	1 1
m_i	m_0	m_1	m_2	m_3

最小项性质

- 对于任一最小项，有且仅有一组变量取值使其值为**1**
- 对于任一组变量取值，有且仅有一个最小项为**1**

两变量全部最小项真值表

A B	$\overline{A}\,\overline{B}$ (m_0)	$\overline{A}B$ (m_1)	$A\overline{B}$ (m_2)	AB (m_3)
0 0	1	0	0	0
0 1	0	1	0	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	0	0	1

逻辑函数最小项之和形式

- 最小项的逻辑或所构成的逻辑函数表达式
- 任一逻辑函数经过变换，都能表示成唯一的最小项之和形式，也称最小项表达式

例，$L(A,B,C) = AB + \overline{A}C$

$$= AB(C+\overline{C}) + \overline{A}C(B+\overline{B})$$
$$= ABC+AB\overline{C}+\overline{A}BC+\overline{A}\,\overline{B}C$$
$$= m_7 + m_6 + m_3 + m_1$$
$$= \Sigma\, m(1, 3, 6, 7)$$

由真值表写逻辑函数式

- 将真值表中逻辑函数所有取值为**1**对应的最小项，逻辑相加即得

$$L(A, B, C)$$
$$= \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$
$$= \Sigma\, m(3, 5, 6, 7)$$

真值表

	A	**B**	**C**	**L**
m_0	0	0	0	0
m_1	0	0	1	0
m_2	0	1	0	0
m_3	0	1	1	1
m_4	1	0	0	0
m_5	1	0	1	1
m_6	1	1	0	1
m_7	1	1	1	1

由逻辑函数式列真值表

- 方法一：按变量的取值组合，逐一算出函数值
- 方法二：将函数式化为最小项之和的形式
- 方法三：根据函数式的含义直接填真值表

$L(A,B,C) = AB + \overline{A}C$

$= \Sigma\, m(1, 3, 6, 7)$

真值表

	A	**B**	**C**	**L**
m_0	0	0	0	0
m_1	0	0	1	1
m_2	0	1	0	0
m_3	0	1	1	1
m_4	1	0	0	0
m_5	1	0	1	0
m_6	1	1	0	1
m_7	1	1	1	1

逻辑函数的化简

- 逻辑函数的最简与－或表达式
  - 乘积项（与项）最少
  - 每个乘积项的因子也最少
- 逻辑函数化简的主要方法
  - 代数法（公式法）
  - 卡诺图法（图解法）

代数化简法

- 反复应用逻辑代数基本公式和常用公式，消去多余的乘积项和多余的因子
- 常用方法
  - 并项：运用 $AB+A\bar{B}=A$ 将两项并为一项，仅保留公共因子A
  - 吸收：运用 $A + AB = A$ 消去AB项，
    运用 $AB+\bar{A}C+BC=AB+\bar{A}C$ 消去BC项
  - 消因：运用 $A+\bar{A}B=A+B$ 消去因子 $\bar{A}$
  - 配项：运用 $A=AB+A\bar{B}$ 增加乘积项，再结合其他方法化简

示例—代数化简法

$L=\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}+ABC$ 并项

$=\bar{A}B+A\bar{B}C+AB$ 并项

$=B+A\bar{B}C$ 消因

$=B+AC$

$L=AB+\bar{A}\,\bar{C}+B\bar{C}$ 配项

$=AB+\bar{A}\,\bar{C}+AB\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}$ 吸收

$=AB+\bar{A}\,\bar{C}$

卡诺图

- **n**变量卡诺图：将**n**变量的全部最小项各用一个小方块表示，使逻辑相邻的最小项（只有一个变量不同）在几何位置上也相邻地排列起来，所构成的阵列图称之
- 任一**n**变量的最小项，必定和其他**n**个不同的最小项相邻

2变量卡诺图

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	$\bar{A}\,\bar{B}$	$\bar{A}B$
A	$A\bar{B}$	AB

A \ B	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

三/四变量卡诺图

- 变量取值按循环码规律排列，使各最小项之间具有循环相邻性
  - 包括上下底相邻，左右边相邻和四角相邻

三变量卡诺图

A \ BC	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

四变量卡诺图

AB \ CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

用卡诺图表示逻辑函数

- 方法一：首先将逻辑函数表示为最小项之和形式，然后在卡诺图上与这些最小项对应的方格添**1**，其余方格添**0**（有时也可用空格表示）
- 方法二：根据逻辑函数式直接填写卡诺图

$L(A,B,C) = AB + \bar{A}C$

$=\Sigma\, m(1, 3, 6, 7)$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	0	1	1

用卡诺图化简逻辑函数

- 化简依据：可将构成矩形的**2**^{i}个最小项合并，得到一个消去了**i**个变量的乘积项

AB \ CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

$\boxed{\bar{A}\bar{B}\bar{C}D+\bar{A}\bar{B}CD=\bar{A}\bar{B}D}$

$\boxed{\bar{A}B\bar{C}D+\bar{A}BCD=\bar{A}BD}$

$\boxed{\bar{A}\bar{B}D+\bar{A}BD=\bar{A}D}$

$\boxed{A\bar{B}D+ABD=AD}$

$\boxed{\bar{A}D+AD=D}$

卡诺图法化简步骤

- 根据逻辑函数或真值表填写卡诺图
  - 将逻辑函数中存在的或真值表中为1的最小项对应的方格填1，其它填0（或空）
- 用尽可能少的圈将所有填1方格圈起来
- 每个圈写出一个乘积项
  - 合并2^i个方格为一项，保留各项中相同的变量，消去i个不同变量
- 将全部乘积项相加即得最简与－或表达式

画包围圈原则

- 包围圈内的方格数一定是2^i个，且包围圈必须呈矩形
- 同一方格可以被不同的包围圈重复包围多次，但新增的包围圈中一定要有已有包围圈未曾包围的方格
- 一个包围圈的方格数要尽可能多,包围圈的数目要可能少
- 有时1方格较多时，也可圈0求$\overline{L}$后，再求L

示例—卡诺图化简(1)

$$L(A,B,C) = A\overline{C} + \overline{A}C + B\overline{C} + \overline{B}C$$

L A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	0	1

$L = A\overline{B} + \overline{A}C + B\overline{C}$

L A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	0	1

$L = A\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B$

逻辑函数的化简结果可能不唯一

示例—卡诺图化简(2)

$$L(A,B,C,D) = \Sigma(m_0, m_2, m_4, m_6, m_8 \sim m_{15})$$

L AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$L = A + \overline{D}$

L AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$\overline{L} = \overline{A}D$

$L = \overline{\overline{A}D} = A+\overline{D}$

示例—卡诺图化简(3)

L_1 AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1	1	
11		1	1	
10	1	1	1	1

L_2 AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		
01	1		1	1
11	1	1	1	1
10		1	1	1

L_3 AB \ CD	00	01	11	10
00				1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1		1

L_4 AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1		1
11	1	1	1	
10	1	1		1

含无关项的逻辑函数化简

- 无关项包括约束项和任意项
  - 约束项：不允许或不可能出现的最小项
  - 任意项：对应的函数值可以是任意的最小项
- 填函数的卡诺图时在无关项对应的格内填任意符号“×”、“d”或“Φ”
- 化简时可根据需要视为1或0，使函数化到最简
- 含有无关项的函数的两种表示形式
  - L=Σm(…)+Σd(…)
  - L=Σm(…)，约束项：Σm(…)=0

示例—含无关项的函数化简

L(A,B,C,D) = Σ m(0, 2~4, 6, 8, 10)

+ Σ d(11, 12, 14, 15)

AB \ CD	00	01	11	10
00	1		1	1
01	1			1
11	x		x	x
10	1		x	1

不考虑约束条件时：

$$L = \overline{A}\,\overline{D} + \overline{B}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}C$$

考虑约束条件时：

$$L = \overline{D} + \overline{B}C$$

The End