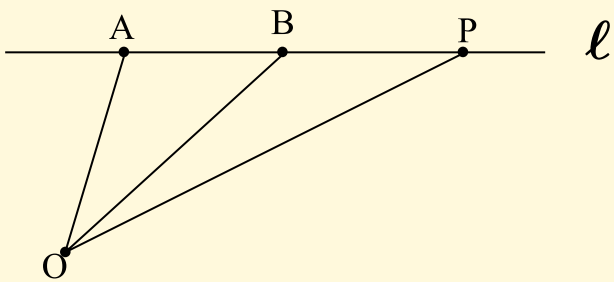
§8.2 平面与直线

8.2.1 直线的方程

在空间中，过任意不同两点 A, B 可作一条直线 ℓ. 对于直线 ℓ 上任意点 P, 由于向量 $\overrightarrow{AP}$ 与向量 $\overrightarrow{AB}$ 平行, 故存在实数 t 使得 $\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB}$ 于是

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} \tag{8.1}$$

称 (8.1) 式为直线 ℓ 的**参数方程**, 非零向量 $\overrightarrow{AB}$ 称为直线 ℓ 的**方向向量**, 而 t 称为**参数**, 当 t 取遍所有实数时, 参数方程给出直线 ℓ 上的所有点; 当 t 取遍区间 $[0, 1]$ 时, 得到线段 AB; 当 t 取遍区间 $[0, \infty)$ 时, 得到射线 $\overrightarrow{AB}$.



设点 A 的坐标为 (a_1, a_2, a_3), 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标表示为 (u_1, u_2, u_3), 点 P

的坐标为 (x, y, z), 于是直线 ℓ 的参数方程可写成坐标形式

$$\begin{cases} x = a_1 + u_1 t \\ y = a_2 + u_2 t \\ z = a_3 + u_3 t \end{cases} \tag{8.2}$$

从中消去参数 t, 则可得到直线 ℓ 的点向式方程

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3}. \tag{8.3}$$

例 1 经过点 $(2, 1, 5)$ 方向为 $(1, 0, 7)$ 的直线方程为

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-5}{7}.$$

注意 此处, 分母中的 0 只是表示方向中的一个坐标分量, 并不是用来作除数.

8.2.2 平面的方程

给定空间中一个点 M 及非零向量 $\vec{n}$, 存在唯一的一个平面 π 过 M 且与 $\vec{n}$ 垂直. 对于平面 π 上任意点 P, 都有 $\overrightarrow{MP} \perp \vec{n}$, 于是得到等式

$$\overrightarrow{MP} \cdot \vec{n} = 0. \tag{8.4}$$

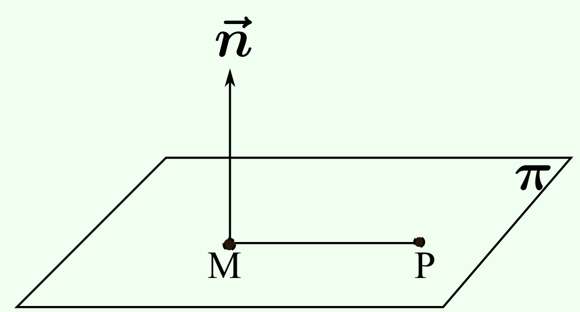
上式称为平面 π 的点法式方程. 非零向量 $\vec{n}$ 称为平面 π 的法向量.
整个空间被平面 π 分成三部分, 满足

$$\overrightarrow{MP} \cdot \vec{n} > 0$$

的点 P 在平面的上侧 ($\vec{n}$ 指向的那一侧), 而满足

$$\overrightarrow{MP} \cdot \vec{n} < 0$$

的点 P 在平面的另一侧, 满足 $\overrightarrow{MP} \cdot \vec{n} = 0$ 的点 P 在平面 π 上.



设点 M 的坐标为 (m_1, m_2, m_3), $\vec{n}$ 的坐标为 (A, B, C), 点 P 的坐标为 (x, y, z), 则点法式方程 (8.4) 可写成坐标形式

$$A(x - m_1) + B(y - m_2) + C(z - m_3) = 0.$$

将其展开合并, 可得平面 π 的一般方程

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{8.5}$$

其中 $D = -(Am_1 + Bm_2 + Cm_3)$.

例 2 求过点 $M(1,1,1)$ 和直线 $\ell: x+1 = 2y+3 = 3z-5$ 的平面 π 的一般方程.

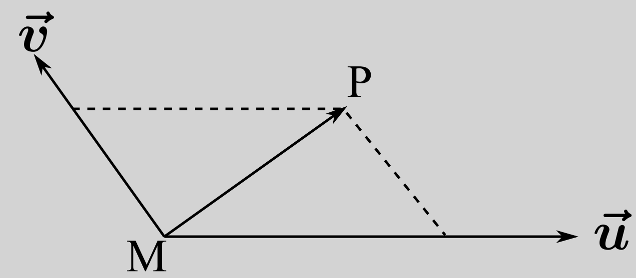
解 ℓ 经过点 $A(0,-1,2)$, π 的法向量与 $\overrightarrow{AM}$ 及 ℓ 的方向向量 $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ 都垂直, 故 π 的法向量

$$\vec{n} = (1, 2, -1) \times (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}) = (\tfrac{7}{6}, -\tfrac{4}{3}, -\tfrac{3}{2}).$$

从而可求得平面 π 的一般方程为

$$7x - 8y - 9z + 10 = 0.$$

平面的参数方程 在空间中, 两条相交且不重合的直线张成一个平面. 设 $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ 和 $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ 是平面 π 内的两个向量. 它们有公共起点 $M(a,b,c)$. 对于平面 π 上任意点 P, 都存在实数 s,t 使得 $\overrightarrow{MP}=s\vec{u}+t\vec{v}$. 于是点 P 的坐标 (x,y,z) 可表示为关于 s,t 的一次函数



$$(x,y,z)=(a+su_1+tv_1,b+su_2+tv_2,c+su_3+tv_3).$$

从而

$$\begin{cases} x=a+u_1s+v_1t \\ y=b+u_2s+v_2t \\ z=c+u_3s+v_3t. \end{cases} \tag{8.6}$$

称 (8.6) 式为平面的**参数方程**, s,t 为参数.

例 3 求经过三点 $A(1,2,3)$, $B(1,3,5)$, $C(2,4,6)$的平面 π 的参数方程和点法式方程.

解 $\overrightarrow{AB}=(0,1,2)$, $\overrightarrow{AC}=(1,2,3)$, 故 π 的参数方程为

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2+s+2t \\ z=3+2s+3t. \end{cases}$$

此平面的法向为

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-1,2,-1),$$

因此它的点法式方程为

$$-(x-1)+2(y-2)-(z-3)=0.$$

直线的一般方程 两个不平行的平面相交于一条直线 ℓ. 当这个平面的方程由一般方程 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 表示时, 将这两个方程联立就得直线 ℓ 的方程:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{8.7}$$

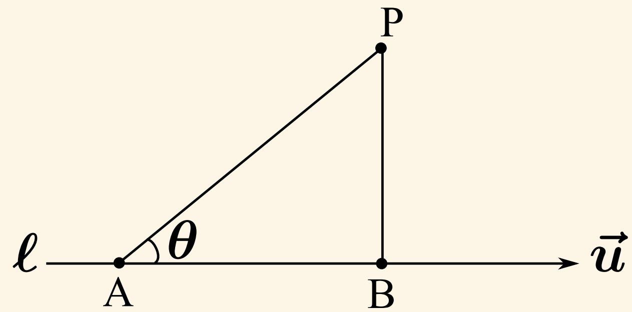
称为直线 ℓ 的一般方程. 由于通过一条直线可以作无限多个平面, 因此直线的一般方程不唯一.

平面 π_1 的法向为 $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$, 平面 π_2 的法向为 $\vec{n}_1=(A_2,B_2,C_2)$. 由于直线 ℓ 垂直于 π_1 也垂直于 π_2, 因此 ℓ 的方向为 $\vec{n}_1\times\vec{n}_2$. 于是从直线的一般方程中求出直线上一个点, 就能写出直线的点向式方程.

反之, 由直线 ℓ 的点向式方程 (8.3) (假设其中 $u_1\neq 0$) , 也很容易地写出 ℓ 的一般方程.

8.2.3 点到直线的距离

设直线 ℓ 过点 A, 方向向量为 $\vec{u}$, P 为空间中任意一点. 过点 P 作直线 ℓ 的垂线, 垂足为 B. 因为 $|\vec{u}\times\overrightarrow{AP}|$ 是 $\vec{u}$ 与 $\overrightarrow{AP}$ 张成的平行四边形的面积, 这面积也等于 $|\vec{u}|\cdot|\overrightarrow{AP}|\cdot\sin\theta$. 于是, 点 P 到直线 ℓ 的距离可表为



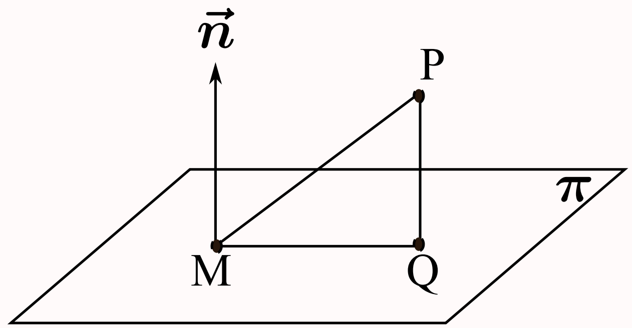
$$d=|\overrightarrow{BP}|=|\overrightarrow{AP}|\sin\theta=\frac{|\vec{u}\times\overrightarrow{AP}|}{|\vec{u}|}. \tag{8.8}$$

例 4 点 $(1,1,1)$ 到直线 $\frac{x+1}{4}=\frac{y+2}{5}=\frac{z+3}{6}$ 的距离为

$$d=\frac{|(4,5,6)\times(2,3,4)|}{|(4,5,6)|}=\frac{|(2,-4,2)|}{|(4,5,6)|}=\sqrt{\frac{24}{77}}.$$

8.2.4 点到平面的距离

设平面 π 的一般方程为 $Ax+By+Cz+D=0$, 其法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$, $M(x_0,y_0,z_0)$ 为平面 π 上任意一点, $P(x,y,z)$ 为空间中任意一点. 过点 P 作平面 π 的垂线, 垂足为 Q. 因为 $|\overrightarrow{MP}|$ 在法向的投影的长为 $\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\cdot\overrightarrow{MP}$, 所以点 P 到平面 π 的距离为



$$d=|\overrightarrow{QP}|=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{MP}|}{|\vec{n}|}=\frac{|A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

又点 M 在平面 π 上, 所以 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, 由此得

$$d=|\overrightarrow{QP}|=\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{8.9}$$

8.2.5 两直线的位置关系

向量空间中的任意两条直线 ℓ_1 和 ℓ_2, 它们可能共面（平行、相交、重合）或异面。设 ℓ_1 过点 $A(a_1, a_2, a_3)$, 方向向量为 $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$; ℓ_2 过点 $B(b_1, b_2, b_3)$, 方向向量为 $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, 则 ℓ_1 与 ℓ_2 共面的充分且必要条件是 $\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}$ 共面, 即

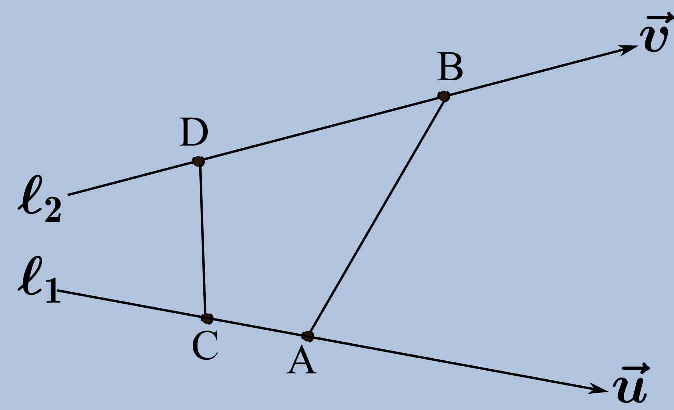
$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0. \tag{8.10}$$

共面情形:

当 ℓ_1 和 ℓ_2 共面时, 如果 $\vec{u}$ 与 $\vec{v}$ 不平行, 则称 ℓ_1 和 ℓ_2 相交, 它们所夹的锐角或直角 ϕ, 称为这两条直线的夹角. 当向量 $\vec{u}$ 与 $\vec{v}$ 平行时, 如果 B 在 ℓ_1 上或者 A 在 ℓ_2 上, 则它们重合, 否则只是平行. 当 ℓ_1 和 ℓ_2 相交时, 它们的距离显然为零; 当 ℓ_1 和 ℓ_2 平行时, ℓ_1 和 ℓ_2 的距离就等于点 B 到 ℓ_1 的距离.

异面情形:

当 ℓ_1 和 ℓ_2 异面时, 同时与 ℓ_1 和 ℓ_2 垂直相交的直线 CD 称为 ℓ_1 和 ℓ_2 的公垂线. 公垂线段 CD 的长度 $|CD|$ 称为直线 ℓ_1 和 ℓ_2 的距离. 因为 CD 垂直于 ℓ_1 和 ℓ_2, 所以 $\overrightarrow{CD}$ 与 $\vec{u}\times\vec{v}$ 平行, 从而 $\overrightarrow{CD}$ 为 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\vec{u}\times\vec{v}$ 方向上的投影. 因此



$$|CD| = \frac{|\vec{u}\times\vec{v}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}. \tag{8.11}$$

欲求公垂线 CD的方程, 只需注意到直线 CD 是平面 ACD 和平面 BCD 的交线. 而平面 ACD 的法向量为 $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{u}$, 平面 BCD 的法向量为 $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{v}$. 因此可以先求出平面 ACD 和平面 BCD 的一般方程, 然后求出直线 CD 的方程.

例 5 求直线 $\ell_1: x-1=y-2=z-3$ 和 $\ell_2: x=2y=3z$ 的夹角 θ、距离 d 以及公垂线 ℓ 的方程.

解 ℓ_1, ℓ_2, ℓ 的方向向量分别为 $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$, $\vec{u}\times\vec{v}=(-\frac{1}{6},\frac{2}{3},-\frac{1}{2})$. 故

$$\theta=\arccos\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\arccos\frac{11}{7\sqrt{3}},\quad d=\frac{|\vec{u}\times\vec{v}\cdot(1,2,3)|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{2}{\sqrt{26}}.$$

又由 $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{u}=(\frac{7}{6},-\frac{1}{3},-\frac{5}{6})$, $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{v}=(\frac{17}{36},-\frac{4}{9},-\frac{3}{4})$, 故得 ℓ_1 和 ℓ 所决定平面的点法式方程为 $7x-2y-5z+12=0$. 同理, ℓ_2 和 ℓ 所决定平面的点法式方程为 $17x-16y-27z=0$. 于是 ℓ 的一般方程为

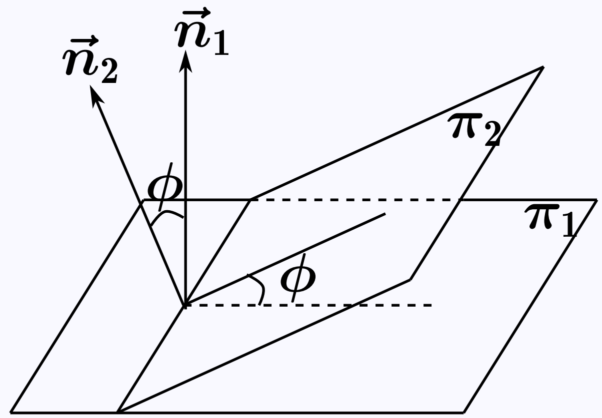
$$\begin{cases} 7x-2y-5z+12=0 \\ 17x-16y-27z=0 \end{cases}$$

8.2.6 两平面的位置关系

设空间中两平面 π_1 和 π_2 的一般方程为

$$\pi_i:\ A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0,\ i=1,2.$$

则两个平面的法向量为 $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ 和 $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$. $\vec{n}_1$ 与 $\vec{n}_2$ 所夹的锐角或直角 ϕ, 称为两平面 π_1 和 π_2 的夹角.



当 $\vec{n}_1$ 和 $\vec{n}_2$ 不平行时, 两平面相交于一条直线. 当 $\vec{n}_1$ 和 $\vec{n}_2$ 平行时, 两平面平行或重合.

$$\text{若}\ \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2},\ \text{则两平面平行.}$$

此时, 平行平面 π_1 和 π_2 的距离就等于 π_2 上任意一点到平面 π_1 的距离.

$$\text{若}\ \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2},\ \text{则两平面重合.}$$

例 6 求两平面 $x+y+z=0$ 和 $x-y-z=0$ 的夹角。

解 两平面夹角为其法向之间的夹角, 即为向量 $\vec{n}_1=(1,1,1)$ 与 $\vec{n}_2=(1,-1,-1)$ 的夹角

$$\phi=\arccos\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\arccos\frac{1}{3}.$$

例 7 求通过点 $A(1,1,1)$ 且和两条直线 $\ell_1: x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 和 $\ell_2: \frac{x-1}{2}=y+2=\frac{z-3}{4}$ 都相交的直线 ℓ 的方程.

解 过点 A 和直线 ℓ_1 的平面 π_1 的法向量 $\vec{n}_1=(1,1,1)\times(1,2,3)=(1,-2,1)$, 故平面 π_1 的一般方程为 $x-2y+z=0$. 过点 A 和直线 ℓ_2 的平面 π_2 的法向量 $\vec{n}_2=(0,3,-2)\times(2,1,4)=(14,-4,-6)$, 同理得平面 π_2 的一般方程 $7x-2y-3z-2=0$. ℓ 为平面 π_1 和 π_2 的交线, 故 ℓ 的一般方程为

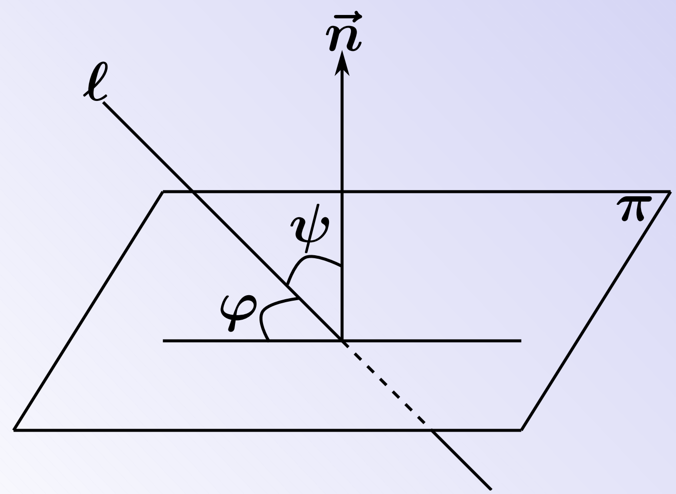
$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 7x-2y-3z-2=0 \end{cases}$$

8.2.7 直线与平面的位置关系

空间中的一条直线 ℓ 和一个平面 π 的位置关系有三种情况, 即平行、相交与直线在平面上. 设它们的方程分别为

$$\ell: \frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2} = \frac{z-a_3}{u_3},$$

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0.$$



记直线 ℓ 的方向向量为 $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, 平面 π 的法向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$, ψ 为 $\vec{u}$ 与 $\vec{n}$ 所夹的锐角或直角. 称

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi = \arcsin \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|} \tag{8.12}$$

为直线 ℓ 和平面 π 的夹角.

当 $\vec{u}$ 和 $\vec{n}$ 不垂直时, ℓ 和 π 有唯一的交点, 可通过解线性方程组求得交点的坐标. 当 $\vec{u}$ 和 $\vec{n}$ 垂直时, 若 $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D \neq 0$, 则 ℓ 和 π 平行; 若 $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D = 0$, 则 ℓ 和 π 有公共点 (a_1, a_2, a_3), 此时 ℓ 在平面 π 上.

例 8 求直线 $\ell : x = 2y = 3z$ 和平面 $\pi : x + 2y + 3z = 4$ 的夹角 φ 和交点 P.

解 $\vec{u} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, $\vec{n} = (1, 2, 3)$, 故夹角

$$\varphi = \arcsin \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|} = \arcsin \frac{18}{7\sqrt{14}}.$$

由于点 P 在 ℓ 上, 可设 P 点坐标为 $(x, \frac{x}{2}, \frac{x}{3})$. 代入平面方程, 解得 $x = \frac{4}{3}$. 故 P 点坐标为 $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{9})$.