定理10(P84) 若$J \triangleq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| x^n, x \in \mathbb{R}$的收敛半径为$R$，记$I \triangleq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$，则

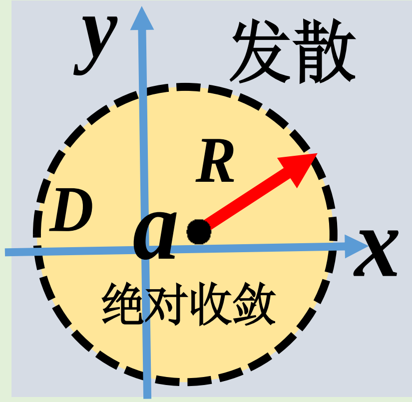
(1) 若$0 < R < +\infty$，则

(i) I 在圆$D: |z-a| < R$ 内绝对收敛；

(ii) I在圆外域：$|z-a| > R$处处发散；

(2)若$R = +\infty$，则 I 全平面内收敛；

(3)若$R = 0$，则I 在全平面内除$z = a$ 外处处发散.



定理10(P84) ⇒

称$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| x^n, x \in \mathbb{R}$的收敛半径$R$ 为幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ 的收敛半径. ★★★★★

若$0 < R \le +\infty$，则称圆$D: |z-a| < R$ 为 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ 的收敛圆.

称$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|a_n|x^n,\ x\in\mathbb{R}$ 的收敛半径R 为幂级数 $I\triangleq\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$ 的收敛半径.

(1)若$0<R\le+\infty$，则称圆$D:|z-a|<R$ 为I 的收敛圆;

定理10(P85) $\Longrightarrow$ I 在收敛圆$D:|z-a|<R$ 内处处绝对收敛.

由Abel定理之2)知,$\forall 0<\rho<R$，则I 在$|z-a|\le\rho$ 上绝对一致收敛.

(2) 当$0<R<+\infty$时，在收敛圆的边界圆周$|z-a|=R$ 上任一点，

I 可能收敛, 也可能发散. 需具体问题具体分析. (参考P103习题第1(3)题)

(3) 若$R=0$, I 在全平面内只有在点$z=a$ 收敛.

根据$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|a_n|x^n,\ x\in\mathbb{R}$ 收敛半径R 的达朗贝尔计算公式或柯西计算公式知：

若$a_n\ne 0(n=0,\ 1,2,\cdots)$, 则$I$ 的收敛半径$R=\dfrac{1}{r}$,

$$\text{其中 } r=\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|},\ \text{或 } r=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right).\quad \text{(P 84)}$$

例 试求幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^p}$ (p为正整数)的收敛半径 R.

解 因为 $a_n=\frac{1}{n^p}$,

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^p}=1.$$

所以 收敛半径 $R=\frac{1}{r}=1.$ #

根据$\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|x^n,\ x\in\mathbb{R}$ 收敛半径R 的达朗贝尔计算公式或柯西计算公式知:

若$a_n\neq 0(n=0,1,2,\cdots)$, 则 幂级数I 的收敛半径$R=\frac{1}{r}$,

其中 $r=\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, 或 $r=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right).$ (P84)

定理11(P 84-85)

若 $f(z)=I\equiv\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$ 收敛半径为 $R>0$，则在 $|z-a|<R$ 内：

1) 幂级数和函数 $f(z)$ 解析，且可以逐项求任意阶导数，

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{+\infty}a_n n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(z-a)^{n-k},\quad k\ge 1.\quad (5.8.1)$$

2) $a_k=\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$，$k\ge 0$.

证明 1) 首先每一项 $a_n(z-a)^n$ 在全平面解析，$n=0,1,2,\cdots$.

对于圆 $|z-a|<R$ 内任取一点 z_0，$\exists\rho>0$ 使得 $|z_0-a|<\rho<R$.

由Abel定理之2)(P 83)知，幂级数 I 在闭圆 $|z-a|\le\rho$ 上绝对一致收敛.

由(P 81 - P 82)定理8知，幂级数 I 的和函数 $f(z)$ 在圆 $|z-a|<\rho$ 内解析，

且可以逐项求任意阶导数，得(5.8.1).

定理11(P 84-85) 若$f(z)=I\equiv\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$收敛半径为$R>0$，则在$|z-a|<R$内：

1)幂级数和函数$f(z)$解析，且可以逐项求任意阶导数，

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{+\infty}n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k} \quad (5.8.1)$$

$$=\sum_{m=0}^{+\infty}(m+k)(m+k-1)\cdots(m+1)a_{m+k}(z-a)^m, \quad k\geq 1. \quad (5.8.2)$$

2) $a_k=\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$, $k\geq 0$.

证明：1) $|z-a|<R$内任取一点z_0，取ρ使得$|z_0-a|<\rho<R$.

在$|z-a|\leq\rho$内，由Abel定理之2)(P 83)得I绝对一致收敛. 故在$|z-a|<\rho$内由(P 81-82)定理8证得(5.8.1).

记 $m=n-k$，则$n=m+k$. 当 $n=k$ 时，$m=0$，

故在$|z-a|<\rho$ 内，(5.8.2)成立. $|z_0-a|<\rho$，(5.8.2)在$z=z_0$成立.

由z_0任意性知，$f(z)$在收敛圆$|z-a|<R$内解析，且(5.8.1)和(5.8.2)成立.

定理11(P84-85) 若$f(z)=I\equiv\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$收敛半径为$R>0$，则在$|z-a|<R$内:

1)幂级数和函数$f(z)$解析, 且可以逐项求任意阶导数,

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{+\infty}n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k} \quad (5.8.1)$$

$$=\sum_{m=0}^{+\infty}(m+k)(m+k-1)\cdots(m+1)a_{m+k}(z-a)^m, \quad k\geq 1. \quad (5.8.2)$$

2) $a_k=\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$, $k\geq 0$.

证明 2) $\forall k\in\mathbb{Z}^+$, 在(5.8.1)中取$z=a$, (5.8.1)左端只有常数项($n=k$时)不等于0, 故

$$f^{(k)}(a)=k(k-1)\cdots 1\cdot a_k=k!a_k, \text{ 故 } a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

在原式$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$中取$z=a$得, $a_0=f(a)$. 故结论2)成立. #

定理11(P 84-85) 若$f(z)=I\equiv\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$收敛半径为$R>0$，则在$|z-a|<R$内:

1)幂级数和函数$f(z)$解析, 且可以逐项求任意阶导数,

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{+\infty}n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k} \quad (5.8.1)$$

$$=\sum_{m=0}^{+\infty}(m+k)(m+k-1)\cdots(m+1)a_{m+k}(z-a)^m, \quad k\geq 1. \quad (5.8.2)$$

2) $a_k=\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$, $k\geq 0.$

注: (5.8.2)右端级数和原幂级数 I 有相同收敛半径, 相同收敛圆.

因为, $$\lim_{m\to+\infty}\frac{|(m+1+k)(m+1+k-1)\cdots(m+1+1)a_{m+1+k}|}{|(m+k)(m+k-1)\cdots(m+1)a_{m+k}|}=\lim_{m\to+\infty}\frac{|a_{m+1+k}|}{|a_{m+k}|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

两边取倒数得结论. #

定理11(P 84-85) $\Rightarrow$ 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ 的和函数 $f(z)$ 在收敛圆 $|z-a|<R$ 内解析, 且

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},\ k \ge 0.$$

反之，是否任一解析函数可以在解析域展开成幂级数?

5.3 解析函数的Taylor(泰勒)展开 ★★★★★

定理12(P85) 设 $f(z)$ 在点 a 解析，以 a 为中心作一个圆 D: $|z-a|<R$,

并令圆 D 半径 R 不断扩大，直至 D 边界 $|z-a|=R$ 首次碰上 $f(z)$ 奇点为止，

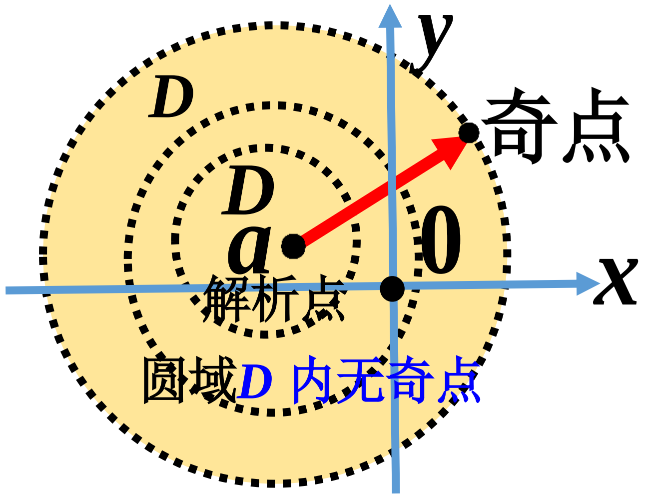
则在此圆域 D 内，$f(z)$ 可展开成幂级数：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n,\ \text{且}\ a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\ n=0,1,2,\cdots.$$

定理12(P85) 设 $f(z)$在点 a 解析，以 a 为中心作一个圆D: $|z-a|<R$,
并令圆D的半径R不断扩大，直至D边界 $|z-a|=R$ 首次碰上 $f(z)$ 奇点为止，
则在此圆域D内，$f(z)$可展开成幂级数：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n,\ \text{且}\ a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\quad n=0,1,2,\cdots.$$

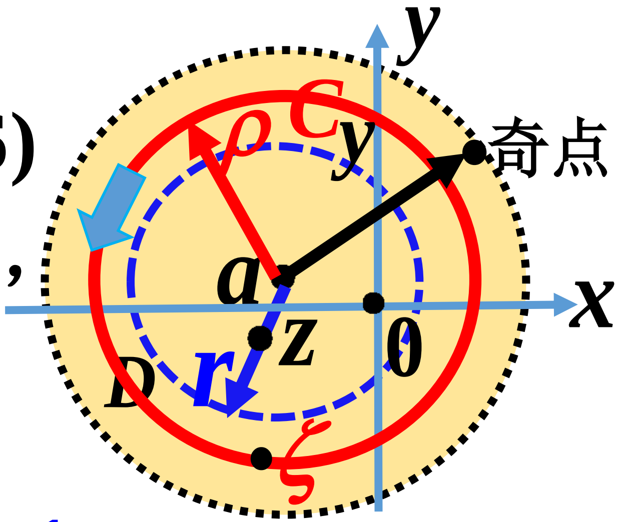
证明思路：
1) 用柯西积分公式把 $f(z)$表示成积分；
2) 把被积函数用：$|z|<1$ 时，$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, (P 79例2),表示成级数.



(P 86)

定理12(P85) 设 $f(z)$在点 a 解析，若以 a 为中心作一个圆D: $|z-a|<R$，并令圆D的半径R不断扩大，直至D边界首次碰上 $f(z)$ 的 奇点为止，则在此圆域D内，$f(z)$可展开成幂级数：$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$，$a_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

证明：$\forall z\in D$, $\exists r,\rho$, 使得$|z-a|<r<\rho<R$, 则圆周C: $|\zeta-a|=\rho$ (逆时针) 完全含在D 内， (P 86)



故 $f(z)$在C及其内部不会碰到奇点即解析. 由柯西积分公式，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)-(z-a)}d\zeta.$$

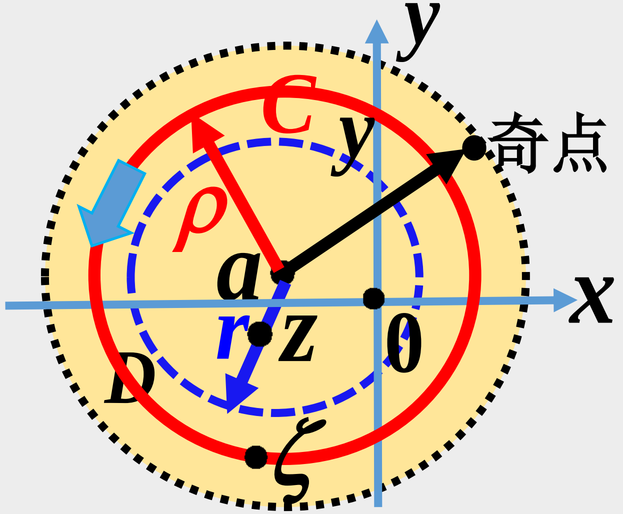
当$\zeta\in C$ 时，$|\zeta-a|=\rho>r>|z-a|$, $\left|\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right|<\dfrac{r}{\rho}<1$,

$$\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{\zeta-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}=\frac{1}{\zeta-a}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}},$$

例2(P 79)

关于ζ 在C上一致收敛，因有强级数$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n$.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)-(z-a)}\mathrm{d}\zeta.$$



当$\zeta\in C$ 时，$|\zeta-a|=\rho>r>|z-a|$，

$$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|<\frac{r}{\rho}<1,\quad \frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{\zeta-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}$$

$$=\frac{1}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}.$$

(关于ζ 在$C:|\zeta-a|=\rho$上一致收敛.)

故 $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-a)^n f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\right\}\mathrm{d}\zeta$ (由P81定理7知, 可以逐项积分)

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_C\frac{(z-a)^n f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right\}=\sum_{n=0}^{+\infty}(z-a)^n\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right\}$$

(用柯西导数积分公式)

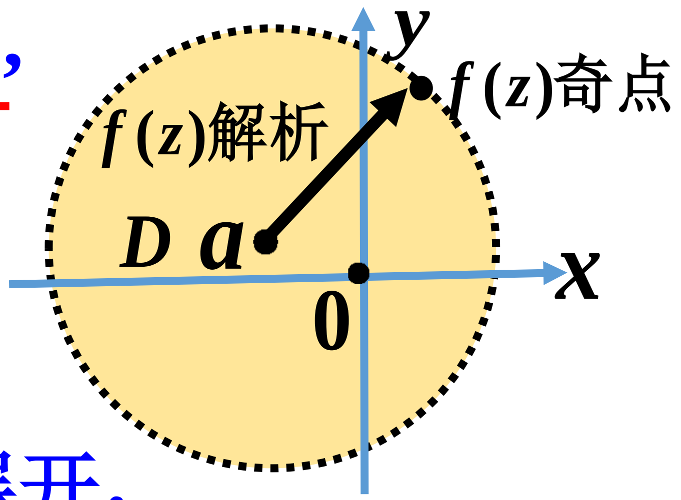
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

因z是D内任意一点, 故此式在D 内处处成立. #

定理12(P85) 设 $f(z)$在点 a 解析，若以 a 为中心作一个圆D: $|z-a|<R$，并令圆D的半径R不断扩大， 直至D边界首次碰上 $f(z)$ 的 奇点为止，则在此圆域D内，$f(z)$可展开成幂级数: $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$，$a_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

收敛半径 $R=|$展开点$a-f(z)$的离a最近的奇点$|$，

即，收敛半径 $R=\min\limits_{\eta\in\{f(z)\text{奇点}\}}|a-\eta|$.



(若 $f(z)$在全平面解析， 则收敛半径$R=+\infty$.)

称幂级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ 为 $f(z)$在a点的 泰勒展开，

或者: $f(z)$在圆$|z-a|<R$ 内的泰勒展开.

注：幂级数展开点a须是被展开函数的解析点.

定理12(P85) 设 $f(z)$在点 a 解析,则 $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n,\ a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\ |z-a|<R,$

称为在a或在$|z-a|<R$的泰勒展式, 其中$R=|a-f(z)$的离a最近的奇点$|$.

推论1(P86): $f(z)$在任一解析点 a 的泰勒展式是唯一的.

证明：若 $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$， 又有, $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n(z-a)^n$.

由定理12(P85)以及定理11(P84-85)知，

$$a_n=b_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\quad n=0,1,2,\cdots.\ \#$$

由推论1(P86)得

推论2(P86)：任一幂级数(若收敛半径$R>0$)是

它自身的和函数在收敛圆内的泰勒展式.

定理10,11(P84-85) 幂级数 $I \triangleq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ 的收敛半径 $R=\frac{1}{r}$, $r=\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ 或 $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$,

I 的和函数 $f(z)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k(z-a)^k$ 在收敛圆 $|z-a|<R$ 内解析, 可逐项求任意阶导数,

$$a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\ n=0,1,2,\cdots.$$

定理12(P85) 设 $f(z)$ 在点 a 解析, 则 $f(z)$ 在 a 点可以唯一地泰勒展开为 $(z-a)$ 的幂级数:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,\quad |z-a|<R,\quad R=|a-f(z)\text{的离}a\text{最近的奇点}|.$$

定理13(P87): $f(z)$ 在区域 D 内解析的充要条件是:

$f(z)$ 在 D 内任一点 a 可以展开成 $(z-a)$ 的幂级数.

定理11(P84-85)+定理12(P85)

定理13(P87)：$f(z)$在区域D内解析的充要条件是：$f(z)$在D内任一点a可以展开成$z-a$的幂级数.

以下命题等价

(1) $f(z)$在区域D内解析；

(2) (定义6(P25)) $f(z)$在D内的每一点z可微；

(3) $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, u,v在D内每一点可微且满足C-R方程；

(4) $f(z)$在D内任一点a可以展开成$z-a$的幂级数.

(5) 此外，$f(z)$在单连通区域D内解析等价于

$f(z)$在单连通区域D内连续且对D内任一闭路C, $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=0$.

定理12(P 85) ⇒ 若$f(z)$在点a解析, 取$R = |a - f(z)$的离a最近的奇点$|$.

则 $f(z)$在a或收敛圆$|z-a| < R$ 内的泰勒展开为

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n, \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n = 0,1,2,\cdots.$$

与实函数一样，利用上面的展开公式，可得

$e^z, \cos z, \sin z$ 在$z = 0$ 的泰勒展开为

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots,$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots,$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots.$$

(P 80)

熟记

$e^z, \cos z, \sin z$在全平面解析，故它们收敛半径$R = +\infty$.

例2(P 79)

当$|z|<1$时，$\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$，是$\dfrac{1}{1-z}$在$z=0$的泰勒展开.

特别重要　熟记

$z=1$是$\dfrac{1}{1-z}$的唯一奇点，$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$的收敛半径$R=|0-1|=1.$

当$|z|<1$时，$\dfrac{1}{1+z}=\dfrac{1}{1-(-z)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n=1-z+z^2-z^3+z^4-z^5+\cdots.$

特别重要　熟记

例 求 $\dfrac{1}{1+z^4}$ 在 $z=0$ 的泰勒展式.

解 当 $|z|<1$ 时, $|z^4|<1$, 故 $\dfrac{1}{1+z^4}=\dfrac{1}{1-(-z^4)}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{4n}$. #

例. 将 $\cos^2 z$ 在 $z=0$ 展开成幂级数.

解 先去平方.

$\boxed{\text{不要用 } (\cos z \text{ 展开式})^2.}$

$$\cos^2 z=\frac{1}{2}(1+\cos 2z)=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(2+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}z^{2n}}{(2n)!}\right),\quad |z|<+\infty. \ \#$$

例6(P87). 求$f(z)=\dfrac{1}{1-z}$在$z=\mathrm{i}$的泰勒展开.

当 $|z|<1$ 时，$\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$.

解 $z=1$是$\dfrac{1}{1-z}$的唯一奇点，故

收敛半径 $R=|\mathrm{i}-1|=(\sqrt{2})$.

收敛半径$=|$展开点$-$离展开点最近奇点$|$.

收敛圆：$|z-$展开点$|<$收敛半径.

在收敛圆$|z-\mathrm{i}|<(\sqrt{2})$内，$|z-\mathrm{i}|<|\mathrm{i}-1|$，$\left|\dfrac{z-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right|<1$,

$$f(z)=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{(1-\mathrm{i})-(z-\mathrm{i})}=\frac{1}{1-\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}}$$

$$=\frac{1}{1-\mathrm{i}}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-\mathrm{i})^n}{(1-\mathrm{i})^{n+1}},\quad |z-\mathrm{i}|<(\sqrt{2}).\ \#$$

例. 求 e^z 在 $z=a$ 的泰勒展式. (a为任一复数)

解 $$e^z=e^{z-a+a}=e^a e^{z-a}=e^a\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-a)^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^a}{n!}(z-a)^n,\quad |z-a|<+\infty.\quad \#$$

e^z 在 $z=0$ 的泰勒展式为

$$e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots,$$

e^z 在全平面解析，故它们收敛半径 $R=+\infty$.

例. 求$f(z)=\dfrac{1}{2+2z+z^2}$在$z=2\mathrm{i}$的泰勒展开. $\boxed{\text{展开点是}2\mathrm{i}}$

解 由$2+2z+z^2=0$解得$f(z)$奇点 $z_1=-1+\mathrm{i}$, $z_2=-1-\mathrm{i}$.

$R=\min\{|2\mathrm{i}-(-1+\mathrm{i})|,\ |2\mathrm{i}-(-1-\mathrm{i})|\}=\min\{|\mathrm{i}+1|,\ |3\mathrm{i}+1|\}=(\sqrt{2})$.

当$|z-2\mathrm{i}|<(\sqrt{2})$时，令 $w=z-2\mathrm{i}$, $|w|<(\sqrt{2})$, $\left|\dfrac{w}{\mathrm{i}+1}\right|<1$, $\left|\dfrac{w}{1+3\mathrm{i}}\right|<1$,

$$f(z)=\frac{1}{(z+1-\mathrm{i})(z+1+\mathrm{i})}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{1-\mathrm{i}+z}-\frac{1}{1+\mathrm{i}+z}\right)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{1-\mathrm{i}+2\mathrm{i}+(z-2\mathrm{i})}-\frac{1}{1+\mathrm{i}+2\mathrm{i}+(z-2\mathrm{i})}\right)$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left\{\frac{1}{(1+\mathrm{i})+w}-\frac{1}{(1+3\mathrm{i})+w}\right\}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left\{\frac{1}{1+\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{1+\frac{w}{1+\mathrm{i}}}-\frac{1}{1+3\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{1+\frac{w}{1+3\mathrm{i}}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{w}{1+\mathrm{i}}\right)^n-\frac{1}{2\mathrm{i}(1+3\mathrm{i})}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{w}{1+3\mathrm{i}}\right)^n$$ (必须合并整理)

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\mathrm{i}}\left\{\frac{1}{(1+\mathrm{i})^{n+1}}-\frac{1}{(1+3\mathrm{i})^{n+1}}\right\}(z-2\mathrm{i})^n=\cdots(\text{化简}).\quad \#$$

$\boxed{\text{习题3(5)(P103)类似.}}$

$\boxed{\text{例9(P88)也类似.}}$

$\boxed{\text{对有理函数, 先分解为简单有理真分式(及多项式)之和，再泰勒展开.}}$

例. 将 $\int_0^z \cos z^2 \,\mathrm{d}z$ 展为 z 的幂级数. (习题103-104页3(9)(10)可仿照此例.)

解 先求被积函数的泰勒展开，再逐项积分.

$$\cos z^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(z^2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{4n}}{(2n)!},$$ 全平面绝对收敛.

故 $$\int_0^z \cos z^2 \,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^z z^{4n} \,\mathrm{d}z \right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(4n+1)} z^{4n+1}, \qquad |z| < +\infty. \quad \#$$

例7(P 87). 将 $e^z\cos z, e^z\sin z$ 展为 z 的幂级数. (在 $z=0$ 展开)

解 因 $e^z(\cos z+i\sin z)=e^z\cdot e^{iz}=e^{(1+i)z}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n z^n}{n!}$, (1)

$e^z(\cos z-i\sin z)=e^z\cdot e^{-iz}=e^{(1-i)z}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1-i)^n z^n}{n!}$. (2)

两式相加除以2得,

$$e^z\cos z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n+(1-i)^n}{2(n!)}z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\{(\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}\}^n+\{(\sqrt{2})e^{-i\frac{\pi}{4}}\}^n}{2(n!)}z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{i\frac{n\pi}{4}}+e^{-i\frac{n\pi}{4}}}{2(n!)}(\sqrt{2})^n z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\cos\frac{n\pi}{4})(\sqrt{2})^n}{n!}z^n .$$

类似地, 两式相减除以2i 得

$$e^z\sin z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{2i(n!)}z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sin\frac{n\pi}{4})(\sqrt{2})^n}{n!}z^n . \quad \#$$

习题3(4)(P 103)用此例方法求展式. 不在分母的三角函数尽量化成指数函数去展开.

补例. 将 $\dfrac{z}{(1+z^2)^2}$ 在 $z=0$ 展开为幂级数. (整理到作业本.)

解 由 $(1+z^2)^2=0$ 解得奇点 $z=\pm i$. 故 $R=|0-(\pm i)|=1$.

(1)因 $\left(\dfrac{1}{1+z^2}\right)'=-\dfrac{2z}{(1+z^2)^2}$, 故 $\dfrac{z}{(1+z^2)^2}=-\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{1+z^2}\right)'$.

在收敛圆 $|z|<1$ 内,

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{1-(-z^2)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z^2)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n}.$$

(2) 逐项求导得

$$\left(\frac{1}{1+z^2}\right)'=\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{(-1)^n z^{2n}\right\}'=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n 2nz^{2n-1}.$$

故 $$\frac{z}{(1+z^2)^2}=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1+z^2}\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}nz^{2n-1}. \quad \#$$

分母带平方:先分子换成1,分母去外层平方,展开,再逐项求导.

例. 将$(z^2+z)\sin z$ 展为z 的幂级数. (在$z=0$ 泰勒展开)

解 $$(z^2+z)\sin z=(z^2+z)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+3}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+2}\quad \text{(合并整理)}$$

$$\sin\frac{2n+3}{2}\pi=(-1)^{n+1}$$

$$\cos\frac{2n+2}{2}\pi=(-1)^{n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+2)\frac{-\sin\frac{2n+3}{2}\pi}{(2n+2)!}z^{2n+3}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-\cos\frac{2n+2}{2}\pi}{(2n+1)!}z^{2n+2}$$

m是偶数时, $\sin\frac{m}{2}\pi=0.$

m是奇数时, $\cos\frac{m}{2}\pi=0.$

$$=\sum_{m=2}^{+\infty}(m-1)\frac{-\sin\frac{m}{2}\pi}{(m-1)!}z^m+\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{-\cos\frac{m}{2}\pi}{(m-1)!}z^m$$

$$=-\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{(m-1)\sin\frac{m}{2}\pi+\cos\frac{m}{2}\pi}{(m-1)!}z^m.\quad \#$$ (习题103页3(2)可仿照此例.)

例9(P 88). 设t是参数, $-1\le t\le 1$, 求$f(z)=\dfrac{4-z^2}{4-4zt+z^2}$在$z=0$ 的泰勒展式.

解 先求奇点. $-1\le t\le 1$, 由 $4-4zt+z^2=0$ 可解得

$f(z)$有两个奇点$z=\dfrac{4t\pm\sqrt{16t^2-4\cdot 4}}{2}=2\left(t\pm \mathrm{i}\sqrt{1-t^2}\right)$.

$$R=\left|2\left(t\pm \mathrm{i}\sqrt{1-t^2}\right)-0\right|=2\sqrt{t^2+\left(\pm\sqrt{1-t^2}\right)^2}=2.$$

故当 $|t|\le 1$ 时, $f(z)$在$|z|<2$ 内解析. 令$t=\cos u$, 则

奇点$2\left(t\pm \mathrm{i}\sqrt{1-t^2}\right)=2(\cos u\pm \mathrm{i}\sin u)=2\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}u}$.

$f(z)=\dfrac{4-z^2}{4-4z\cos u+z^2}$类似于实函数中的有理分式,

与实函数情形类似，先把有理式分解.

$$f(z)=\frac{4-z^2}{4-4z\cos u+z^2}=\frac{-(4-4z\cos u+z^2)+8-4z\cos u}{4-4z\cos u+z^2}$$ (分子凑分母或立竖式)

$$=-1+\frac{8-4z\cos u}{(\underline{2e^{iu}}-z)(\underline{2e^{-iu}}-z)}=-1+\frac{2-z\cos u}{\left(1-\frac{e^{-iu}}{2}z\right)\left(1-\frac{e^{iu}}{2}z\right)}$$

$$=-1+\frac{1}{1-\frac{e^{-iu}}{2}z}+\frac{1}{1-\frac{e^{iu}}{2}z}.$$

当$|z|<2$时，$\left|\frac{e^{-iu}}{2}z\right|=\frac{1}{2}|z|<1$，$\left|\frac{e^{iu}}{2}z\right|=\frac{1}{2}|z|<1$，

$$R=\left|2\left(t\pm i\sqrt{1-t^2}\right)-0\right|=2\sqrt{t^2+\left(\pm\sqrt{1-t^2}\right)^2}=2.$$

故当 $|t|\le 1$ 时，$f(z)$在$|z|<2$ 内解析． 令$t=\cos u$，则

奇点$2\left(t\pm i\sqrt{1-t^2}\right)=2(\cos u\pm i\sin u)=2e^{\pm iu}$．

$f(z)=\dfrac{4-z^2}{4-4z\cos u+z^2}$类似于实函数中的有理分式，

与实函数情形类似，先把有理式分解.

$$f(z)=\frac{4-z^2}{4-4z\cos u+z^2}=\frac{-(4-4z\cos u+z^2)+8-4z\cos u}{4-4z\cos u+z^2}$$ (分子凑分母)

$$=-1+\frac{8-4z\cos u}{(2e^{iu}-z)(2e^{-iu}-z)}=-1+\frac{2-z\cos u}{\left(1-\frac{e^{-iu}}{2}z\right)\left(1-\frac{e^{iu}}{2}z\right)}$$

$$=-1+\frac{1}{1-\frac{e^{-iu}}{2}z}+\frac{1}{1-\frac{e^{iu}}{2}z}.$$

当 $|z|<2$ 时, $\left|\frac{e^{-iu}}{2}z\right|=\frac{1}{2}|z|<1$, $\left|\frac{e^{iu}}{2}z\right|=\frac{1}{2}|z|<1$,

$$f(z)=-1+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{-iu}}{2}z\right)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{iu}}{2}z\right)^n=-1+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{-inu}+e^{inu}}{2^n}\right)z^n$$

$$=-1+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\cos nu}{2^{n-1}}\right)z^n=-1+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\cos n(\arccos t)\right)z^n.$$

$t=\cos u$, $u=\arccos t$.

记 $T_n(t)=\frac{\cos n(\arccos t)}{2^{n-1}}$, $n=1,2,\cdots$, 则 $f(z)=-1+\sum_{n=0}^{+\infty}T_n(t)z^n$.

$T_n(t)$是关于t 的 n 次多项式, 称为切比雪夫多项式. #

作业：P103-104

3(1), (2), (3),(4),(5),(6)(提示：$\sin^2 z = \frac{1-\cos 2z}{2}$)

(9)(先将e^{z^2}展开，再逐项积分)

6(1)(2)(提示参考下一页PPT)

7 $\left(\text{利用} e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \text{和} e^{|z|} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!} \right)$

补. 将$\frac{z}{(1+z^2)^2}$在$z=0$展开为幂级数. (参见此PPT的P 24)

背熟：P84-85定理11和P 85定理12，P82-83定理3.

提示

6(1)(2)

(提示：在当$|z|<1$时，$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$里取$z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$a\in(-1,1)$,

左边分母实数化, 再比较等式两边的实部和虚部.

注：考虑$\ln(1-z)$的泰勒展开, 类似地可证明(3)，自己练习.)

例 求e^z, $\cos z$, $\sin z$在$z=a$ 的泰勒展式.(a为任一复数)

解 $e^z = e^a \cdot e^{z-a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^a (z-a)^n}{n!}, \quad |z-a| < +\infty.$

$$\cos z = \cos(z-a+a) = \cos a \cos(z-a) - \sin a \sin(z-a)$$

$$= (\cos a) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-a)^{2n} - (\sin a) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-a)^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos a \cos\frac{(2n)\pi}{2}}{(2n)!}(z-a)^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin a \sin\frac{2n+1}{2}\pi}{(2n+1)!}(z-a)^{2n+1}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\cos a \cos\frac{m\pi}{2} - \sin a \sin\frac{m\pi}{2}}{m!}(z-a)^m = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\cos\left(a+\frac{m\pi}{2}\right)}{m!}(z-a)^m,$$

当m是奇数时，$\cos\frac{m\pi}{2}=0$;

当m是偶数时，$\sin\frac{m\pi}{2}=0$.

因$R=+\infty$，故 $|z-a|<+\infty$. $\sin z$类似. #

P68习题17 试证明无界区域柯西积分公式：设 $f(z)$ 在闭路C及其外部区域 D 内解析，

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=A\neq\infty,\quad 则\ \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta=\begin{cases}-f(a)+A, & a\in D,\\ A, & a\in C的内区域.\end{cases}$$

证明：取 $M>0$ 充分大，使得闭路 C 完全含在圆周 $C_{a,M}$：$|\zeta-a|=M$ 内部，

记由$C_{a,M}$和C^-所围成的多联通区域为G，$G\subset D$. 则由条件知，$f(z)$ 在 G 内解析.

1) 若 $a\in D$， 则$a\in G$. 根据多联通区域柯西积分公式(P59定理5)，

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{|\zeta-a|=M}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta-\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta\right\}=f(a),\quad 即\ \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta=-f(a)+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=M}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta.\quad (1)$$

即 $$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=M}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta-A=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=M}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta-A\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=M}\frac{1}{\zeta-a}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=M}\frac{f(\zeta)-A}{\zeta-a}d\zeta.$$

由长大不等式，$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=M}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta-A\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=M}\frac{f(\zeta)-A}{\zeta-a}d\zeta\right|\le\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\max\limits_{|\zeta-a|=M}|f(\zeta)-A|}{M}\cdot 2\pi M=\max_{|\zeta-a|=M}|f(\zeta)-A|.$$

因为 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=A$，令$M\to+\infty$得 $\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=M}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta=A$. 故 $\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta=-f(a)+A.$

P68习题17 试证明无界区域柯西积分公式：设 $f(z)$ 在闭路C及其外部区域 D 内解析，

$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=A\neq\infty$，则 $\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta=\begin{cases}-f(a)+A, & a\in D,\\ A, & a\in C\text{的内区域}.\end{cases}$

证明：取 $M>0$ 充分大，使得闭路 C 完全含在圆周 $C_{a,M}$：$|\zeta-a|=M$ 内部，

记由$C_{a,M}$和C^- 所围成的多联通区域为G，$G\subset D$. 则由条件知，$f(z)$ 在 G 内解析.

2) 若 $a\in C$的内区域，则 $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-a}$ 在G内解析. 根据多联通区域柯西积分定理(P55 定理3)，

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\left\{\int_{|\zeta-a|=M}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta-\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta\right\}=0,\quad \text{即}\ \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{|\zeta-a|=M}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta.\quad (2)$$

由1)，根据 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=A$， 可以证明：$\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_{|\zeta-a|=M}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta=A.$

故 $\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta=A.$ #

例. 将$\int_0^z \frac{\cos^2 z-1}{z^2}\,dz$展为$z$ 的幂级数. (习题103-104页3(6)(9)(10)可仿照此例.)

解 先求被积函数的泰勒展开，再逐项积分.

$$\frac{\cos^2 z-1}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(\underline{\frac{1+\cos 2z}{2}}-1\right)=\frac{1}{2z^2}(\cos 2z-1)=\frac{1}{2z^2}\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}-1\right\}$$

$$=\frac{1}{2z^2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n-2},$$ 全平面绝对收敛.

故 $$\int_0^z \frac{\cos^2 z-1}{z^2}\,dz=\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}\int_0^z z^{2n-2}\,dz\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!(2n-1)}z^{2n-1}.\quad \#$$

18世纪早期英国牛顿学派最优秀代表人物之一的英国数学家泰勒(Brook Taylor)，于1685年（乙丑年）8月18日在米德尔塞克斯的埃德蒙顿出生。[1] 1709年后移居伦敦，获法学硕士学位。[1] 他在1712年当选为英国皇家学会会员，并于两年后获法学博士学位。同年（即1714年）出任英国皇家学会秘书，四年后因健康理由辞退职务。 最后在1731年12月29日于伦敦逝世。他提出了著名的泰勒公式,开创了有限差分理论.

[1]梁宗巨．数学家传略辞典：山东教育出版社，1989.

(来自百度百科)