$\hat{L}^2 = \frac{-\hbar^2}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})$

$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$

中国科学技术大学
UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA
地址:中国安徽省合肥市 电话:0551-63602184 传真:0551-63631760 网址:http://www.ustc.edu.cn

第四章 氢原子

氢原子在球坐标下的波函数可表示为

$\psi(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)\,Y_l^m(\theta,\varphi)$

氢原子三个量子数:

n: 主量子数. 表示能量状态.

$E = \frac{E_1}{n^2}$ $n=1,2,3,\dots$

l 为角动量量子数. $l=0,1,\dots,n-1$

m 为磁量子数. $m=-l,-l+1,\dots,1,\dots,l$

即 $n=1,2,3,4$

对应 S P D F

$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$. $\hat{L}_z\phi_m = m\hbar\phi_m$.

ϕ_m 是 L_z 的本征函数, 本征值为 $m\hbar$.

$\hat{L}^2 Y_{lm} = l(l+1)Y_{lm}\hbar^2$

Y_{lm} 是 $\hat{L}^2$ 的本征函数.

本征值是 $l(l+1)\hbar^2$

可以看到自旋算符 $\hat{S}^2$. $\hat{S}_z$ 与 $\hat{L}$ 有极其相似的性质. 与第五章相联系 $r\to -r$

$\psi(r,\theta,\varphi) = R_{nl}\cdot Y_{lm}$ $Y' = (-1)^l Y$

$R_{10} = 2\left(\frac{z}{a_1}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{zr}{a_1}}$ $Y^* = (-1)^m Y$

$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\cos\theta = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{z}{r}$

eg. 对波函数 $\psi = (r+x+\overset{2}{y}+2z)f(r)$ 进行测量, 求对应角动量本征值态

$\psi = (1+\frac{x}{r}+2\frac{y}{r}+2\frac{z}{r})rf(r)$

$= R(r)\cdot\sum_l C_k Y_{lm}$

$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ $Y_1 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{z}{r}$

$Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(\frac{x}{r}\pm i\frac{y}{r})$

$\therefore \psi = rf(r)[\sqrt{4\pi}Y_{00} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}(Y_{1,-1}-Y_{1,1})$
$+2i\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(Y_{1,-1}+Y_{1,1}) + 2\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{10}]$

$\propto Y_{00} + \sqrt{\frac{1}{6}}(1+2i)Y_{1,-1} + \sqrt{\frac{1}{6}}(-1+2i)Y_{11} + \sqrt{\frac{4}{3}}Y_{10}$

$\sum_i C_i^2 = \frac{5}{6}\times2+1+\frac{4}{3} = 4$.

$l = \begin{cases} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{3}{4} \end{cases}$ $m = \begin{cases} 0 & \frac{7}{12} \\ 1 & \frac{5}{24} \\ -1 & \frac{5}{24} \end{cases}$

$L_z = m\hbar = \begin{cases} 0 & \frac{7}{12} \\ \hbar & \frac{5}{24} \\ -\hbar & \frac{5}{24} \end{cases}$

$L^2 = l(l+1)\hbar^2 = \begin{cases} 0 & \frac{1}{4} \\ 2\hbar^2 & \frac{3}{4} \end{cases}$

不同态电子最可能位置. $r = n^2 a_0$. (玻尔半径)

$\bar{r} = \frac{a_1}{2z}[3n^2 - l(l+1)]$

$\overline{r^{-1}} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{z}{a_1}\right)$

$\overline{r^2} = \frac{1}{2}[5n^2+1-3l(l+1)]n^2\left(\frac{a_1}{z}\right)^2$

跃迁选择定则 $\Delta m = \pm1$. $\Delta m = 0$

$\Delta l = \pm1$.

eg1. 假设粒子波函数形式为

$$\psi(x,y,z)=\frac{\alpha^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\pi}}z\exp(-\alpha(x^2+y^2+z^2))$$

证明粒子处于角动量本征态上，并求 L^2、L_z 本征值。

$$\psi(x,y,z)=\frac{\alpha^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\pi}}r\cos\theta\exp(-\alpha r^2)$$

$$\hat{L}^2\psi(x,y,z)$$

$$=\frac{-\hbar^2}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\cos\theta}{\partial\theta}\right)f(r)$$

$$=\frac{-2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}\cdot-\hbar^2 f(r)$$

$$=2\hbar^2\cos\theta f(r)=2\hbar^2\psi$$

$$\therefore L^2=2\hbar^2$$

$$\hat{L}_z\psi=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi=0,\quad L_z=0.$$

☆ $\hat{L}^2=\frac{-\hbar^2}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$

$\hat{L}_z=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$

eg2. 证明在 L_z 本征态上，角动量沿与z轴成θ角的方向的平均值为 $m\hbar\cos\theta$

$$\vec{n}=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$$

$$L=\sin\theta\cos\varphi L_x+\sin\theta\sin\varphi L_y+L_z\cos\theta$$

$$\therefore\langle L\rangle=\cos\theta\langle L_z\rangle=m\hbar\cos\theta$$

eg3. 求氢原子基态 Δx、Δp_x，验证不确定关系成立。 根据球对称性

$$\langle x\rangle=0.$$

$$\psi_0=R_{10}Y_{00}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\cdot 2a_0^{-\frac{3}{2}}e^{-r/a_0}$$

$$\langle x^2\rangle=\frac{1}{3}\langle r^2\rangle=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}r^2\left[e^{-r/a_0}\cdot\frac{2a_0^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{4\pi}}\right]^2r^2dr$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{+\infty}r^4e^{-\frac{r^2}{a_0^2}}\frac{1}{a_0^3}dr=\int_0^{+\infty}e^{-t}\cdot t^2a_0^3\frac{1}{a_0^3}d\,a_0\sqrt{t}$$

$$=\frac{1}{3}a_0^2\int_0^{+\infty}t^{\frac{3}{2}}e^{-t^2}dt$$

$$=\frac{1}{3}a_0^2\cdot\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times 2a_0^2=a_0^2.$$

$$\langle x\rangle=a_0$$

$$\langle p_x\rangle=0.$$

$$\langle p_x^2\rangle=\frac{1}{3}\langle p^2\rangle=-\frac{1}{3}\hbar^2\int\psi\frac{\partial^2}{\partial r^2}\psi\, r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$=-\frac{1}{3}\hbar^2\cdot\frac{4\pi}{\sqrt{4\pi}}\int_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\hbar^2}{3a_0^2}\qquad\Delta p_x=\frac{\hbar}{\sqrt{3}a_0}$$

$$\Delta x\Delta p_x=\frac{\hbar}{\sqrt{3}}>\frac{\hbar}{2}$$

eg3. 基态氢原子处于经典不允许区域的概率?

$$E_k-V=-\frac{\hbar^2}{2\mu a_0^2}+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}<0$$

$$r>2a_0$$

$$\int_{2a_0}^{+\infty}R_{10}^2r^2dr=\int_{2a_0}^{+\infty}4a_0^{-3}\cdot r^2e^{-\frac{r^2}{a_0^2}}dr$$

$$=\int_2^{+\infty}\frac{4t}{a_0}e^{-t}\,d\,a_0\sqrt{t}$$

$$=2\int_2^{+\infty}\sqrt{t}e^{-t}dt$$

$$=\cancel{2e^{-x^2}\Big|_4^{+\infty}=2e^{-4}}$$

$$\cancel{2\int_2^{+\infty}pe^{-p^2}dp}$$

$$\cancel{4\cdots p^2}$$

$\psi\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$.

eg4. 假设氢原子 $t=0$ 时处于

$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{200} - \psi_{100})$ 上.

计算 $\langle r \rangle$ 的时间演化.

$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{200} e^{-iE_2 t/\hbar} - \psi_{100} e^{-iE_1 t/\hbar})$

$\langle r \rangle = \int r\, \psi \cdot \psi^*$

$$\cancel{= \int \int \frac{r^2 \sin\theta}{\ldots}\, d\theta\, d\varphi}$$

$$\int r \cdot \left(|\psi_{200}|^2 + |\psi_{100}|^2 - 2\cos\omega t\, \psi_{100}\psi_{200}\right) r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$\cancel{= \frac{1}{2} \int r^3 \ldots \frac{4}{a_0^3} e^{-\frac{r}{a_0}} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{a_0^3}}$$

$= \left(\frac{15}{4} + \frac{32\sqrt{2}}{81}\cos\omega t\right) a_0 \quad \omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$

核心在于此时在没有学后来算符的情况下. 仍是用 $\cancel{\langle p \rangle = \int p}$ $\langle x \rangle = \int x \cdot \psi \cdot \psi^*$

$\langle \hat{p} \rangle = \int \hat{p} \cdot \psi \psi^*$

相当于利用第三章知识解决具体问题.

第五章. 自旋.

如第三章知道, $\psi(r)$, $\psi(p)$ 都可表示状态 很不方便. 因此引入狄拉克符号 $|\psi\rangle$. 右矢. 表示一个抽象的波函数.

相当于将一个波函数映射为一个向量.

波函数.	狄拉克符号
本征态叠加	基矢量线性加
共轭相乘	共轭转置相乘.
$\psi=\sum c_n\psi_n$.	$\lvert\psi\rangle=\sum c_n\lvert n\rangle$
算符	$\lvert\psi\rangle\langle\psi\rvert$.
内积 $\int\psi\psi^*$	$\langle\psi\lvert\psi\rangle$

eg. 态矢量的矩阵表示.

$|0\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. $|1\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt2}(|0\rangle+i|1\rangle)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{i}{\sqrt2}\end{pmatrix}$

$\langle\psi|=\frac{1}{\sqrt2}(\langle0|-i\langle1|)=(\frac{1}{\sqrt2},\frac{i}{\sqrt2})$

$\langle\psi|\psi\rangle=\frac12+\frac12=1$.

$|\psi\rangle\langle\psi|=\begin{pmatrix}\frac12 & -\frac{i}{2}\\\frac{i}{2} & \frac12\end{pmatrix}$

直积态: 对于两个 H_1 H_2, 拼接希尔伯特空间为 $H_1\otimes H_2$.

$|0_A\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $|1_A\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $|0_B\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $|1_B\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$|0_A 0_B\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1*\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\0*\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix}$

$|0_A,1_B\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.

$|1_A,0_B\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

$|1_A,1_B\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

计算 $|\psi_A\rangle=\frac{1}{\sqrt2}(|0_A\rangle+i|1_A\rangle)$

$|\psi_B\rangle=\frac{1}{\sqrt2}(|0_B\rangle-i|1_B\rangle)$

的直积态

$|\psi_A\rangle=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{i}{\sqrt2}\end{pmatrix}$

$|\psi_B\rangle=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{i}{\sqrt2}\end{pmatrix}$

$|\psi_A,\psi_B\rangle=\begin{pmatrix}\frac12\\-\frac{i}{2}\\\frac{i}{2}\\\frac12\end{pmatrix}$

$=\frac12(|0_A,0_B\rangle-i|0_A,1_B\rangle+i|1_A,0_B\rangle+|1_A,1_B\rangle)$

二. 电子自旋的发现.

塞曼效应. 由于量子数m.

不同m在磁场中能量不同. 发生能级劈裂

1921年 SG实验.(斯特恩-盖拉赫)

基态氢原子 $l=0$. $m=0$. 在磁场中不应发生劈裂. 但观察到两条谱线. 因此电子具有内禀角动量. 即为自旋.

S在任意方向只有两个取值 $S_z=\pm\frac{\hbar}{2}$.

定义新物理量: 总角动量. $\vec J=\vec L+\vec S$

轨道角 自旋角.

$j^2=s^2+l^2-2sl$.

$j^2=j(j+1)\hbar^2$. $j_z=m_j\hbar$

$m_j=-j,-j+1,\dots,j$.

$j=l+s,l+s-1,\dots,|l-s|$.

$^{2s+1}L_j$

l	0	1	2	3
L	S	P	D	F

3. 原子磁矩

$\vec\mu = \vec\mu_s + \vec\mu_l = -\frac{\mu_B}{\hbar}(g_l \vec l + g_s \vec s)$

$g_l = 1.\ \ g_s = 2$ ☆

由于存在进动，只有 $\vec j$ 方向有意义

$\vec{\mu_j} = -g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec j$

$g = 1 + \frac{j^2+s^2-l^2}{2j^2}$

朗道g因子.

☆4. 自旋算符和泡利矩阵:

可以发现 $\vec s$ 与 $\vec l$ 具有极其相似的性质.

引入自旋算符 $\hat s$ 作用到波函数上.

$\hat s^2$ 本征值 $q = s(s+1)\hbar^2$ s是等于 $\frac12$.

$m_s = -s, \dots, 0, \dots, s.\quad m_s = \pm\frac12.$

$\hat s_z$ 本征值为 $\pm\frac{\hbar}{2}$

$\{\hat s^2, \hat s_z\}$ 的共同本征态构成自旋表象:

两个本征态基矢量分别表示为 $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$

引入 $\hat s = \frac{\hbar}{2}\hat\sigma$

泡利算符可表示为矩阵形式:

$\hat\sigma_x = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\quad \hat\sigma_y = \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\quad \hat\sigma_z = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

本征值为 ±1. 即求矩阵~~本~~特征值

eg. 求 $\hat\sigma_y$ 算符的本征态和本征值.

并给出 $\binom{\alpha}{\beta}$ 上的 $\hat\sigma_y$ 测量值和几率.

$\hat\sigma_y = \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\quad |\lambda - \hat\sigma_y| = \begin{vmatrix}\lambda & i\\ -i & \lambda\end{vmatrix}$

$\lambda^2 - 1 = 0\quad \lambda = \pm1.$

$\hat\sigma_y x = x$

$\begin{cases}-iy = x\\ ix = y.\end{cases}\quad |x|^2+|y|^2=1$

$|\uparrow\rangle_y = \frac{1}{\sqrt2}\binom{1}{i}$

$|\downarrow\rangle_y = \frac{1}{\sqrt2}\binom{1}{-i}$

$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\sqrt2}(\alpha|\uparrow\rangle_y + \alpha|\downarrow\rangle_y - i\beta|\uparrow\rangle_y + i\beta|\downarrow\rangle_y)$

$= \frac{1}{\sqrt2}[(\alpha - i\beta)|\uparrow\rangle_y + (\alpha+i\beta)|\downarrow\rangle_y]$

几率均为 $\frac12$.

即将量子态用本征矢量加以表示，此处不涉及具体物理量表象

只是矩阵运算.

☆(2) 自旋算符在任意方向投影的波函数

$\hat\sigma\cdot\vec n = \hat\sigma_x n_x + \hat\sigma_y n_y + \hat\sigma_z n_z$

$= \begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x+in_y & -n_z\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta(\cos\varphi - i\sin\varphi)\\ \sin\theta(\cos\varphi + i\sin\varphi) & -\cos\theta\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi}\\ \sin\theta e^{i\varphi} & \cdots\end{pmatrix}$

本征值：±1.

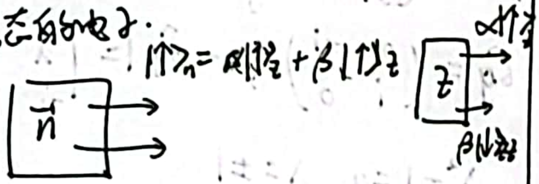
本征态. $|\uparrow\rangle_n = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{-\frac{i\varphi}{2}} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix}$

$|\downarrow\rangle_n = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} e^{-\frac{i\varphi}{2}} \\ \cos\frac{\theta}{2} e^{\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix}$

5. 梯度磁场下电场偏转与SG装置.

通过梯度磁场级联，制备不同自旋态的电子.

$|\uparrow\rangle_n = \alpha|\uparrow\rangle_z + \beta|\downarrow\rangle_z$



6. 磁场下电子自旋的进动和自旋转动算符.

$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\omega t} \\ e^{i\omega t} \end{pmatrix}$. 2ω 称为拉莫尔频率.

$\langle \hat{S}_x \rangle = \langle \psi(t)|\hat{S}_x|\psi(t)\rangle$

$= \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{1}{2} (e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} \\ e^{i\omega t} \end{pmatrix}$

$= \frac{\hbar}{4} (e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}) \begin{pmatrix} e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} \end{pmatrix}$

$= \frac{\hbar}{2} \cos 2\omega t$

7. Bloch球与自旋动力学 ☆

自旋空间中每个量子态对应球面上一个点.

$\vec{n}$ 与 $|\uparrow\rangle_n$ 一一对应.

系统在Hamiltonian控制下演化对应于操作 $\exp\{-\frac{i}{2}\alpha\,\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\}$

其意义将量子态绕轴 $\vec{n}$ 转动α角.

$|\uparrow\rangle_{n'} = [\exp\{-\frac{i}{2}\alpha\,\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\}]|\uparrow\rangle_{n_0}$

8. 粒子全同性、波函数对称性及泡利不相容原理

原子内的多电子波函数满足交换反对称

自旋为半整数.

☆ LS 耦合 (双电子)

$S = s_1 + s_2$, 或 $s_1 - s_2$. 也即是1或0. 总自旋角动量. (费米子).

$S^2 = s(s+1)\hbar^2$. $M_S = s, s-1, \ldots, -s$

$L = l_1 + l_2$

总轨道角动量. $L = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, \ldots, |l_1 - l_2|$

$L = l(l+1)\hbar^2$ $M_L = -L, \ldots, L$.

$\vec{L} + \vec{S} = \vec{J}$ 总角动量

和 $J = L+S, \ldots, |L-S|$.

$^{2S+1}L_J$ $L+S$ 必须为偶数!

eg. 氦原子外有两个电子，(nl), $(1s)$

LS耦合. 求电子可能状态

若 $(1s)(2s)$, 求电子可能状态.

$S = s_1 + s_2 = 1$ 或 0. ∵ 电子不能全同

∴ $\vec{s}_1 + \vec{s}_2 = 0$. $s = 0$. $l = 0$

$^{2S+1}L_J$ $^1S_0$

$(1s)(2s)$ 状态下 有 $^1S_0$

$S = 1$. $^3S_1$

第六章. 量子比特

6.1 二能级系统.

二能级系统能用一组完备正交基来表示

$|\psi\rangle = c_1|\uparrow\rangle + c_2|\downarrow\rangle$. $|c_1|^2+|c_2|^2=1$

与自旋类比. $|n\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$

θ决定在z轴上的投影.

方位角φ决定了几率幅的相位差

6.2 二能级系统及其操控.

二能级系统演化能用幺正算符表示

对应于Bloch球上的转动.

$\exp\{-i\frac{\theta}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\}$

空间中任意算符可用泡利矩阵分解:

Hadamard 算符:

$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\sigma}_z+\hat{\sigma}_x)$.

6.3 纯态、混合态与密度算符

密度算符 $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$

$Tr(\rho^2)=1$. 纯态. 记判定即可.

$Tr(\rho^2)=0$. 最大混态

6.4 量子比特:

H ~~[illegible]~~

H: 基态、激发态等概率.

X: 比特反转.

Z: 添加π相位 Y: 添加$\frac{\pi}{2}$相位.

物理实现: (以光子偏振态为例)

半波片: $\begin{pmatrix} \cos2\gamma, & \sin2\gamma \\ \sin2\gamma, & -\cos2\gamma \end{pmatrix}$

$\frac{1}{4}$波片: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1-i\cos2\gamma, & -i\sin2\gamma \\ -i\sin2\gamma, & 1+i\cos2\gamma \end{pmatrix}$

单量子比特操作对应Bloch球上的操作

$R(\eta) = \exp\{-\frac{i}{2}\eta\,\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\}$

用 $\hat{U} = \hat{U}_{qwp}\hat{U}_{hwp}\hat{U}_{qwp}$

可实现任意操作

~~纯态~~ 叠加态: $|\psi\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$

尽管 测一定概率得到$|1\rangle$或$|0\rangle$.

但其是确定物理状态.

混态: 以经典概率处于某些确定量子态.

最大混态可用任意一对正交态等概率混合

量子不可克隆定理: 单个未知量子态不可精确克隆.

第七章：量子信息.

7.1 EPR佯谬，量子纠缠与Bell不等式

实在性：不干扰系统前提下.

可以确定物理量的值，一定有一对象具物理实在性.

定域性：事件与信息只能不超光速的传播

波函数不对物理实在有完备性描述：

量子纠缠：

考虑二电子自旋系统，有量子态 $|\psi_A\rangle, |\psi_B\rangle$.

可用 $|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$ 表示：

$$= (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)_A (\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle)_B$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \alpha\delta \\ \beta\gamma \\ \beta\delta \end{pmatrix}$$

如果不能写成直积形式：

则存在量子纠缠.

eg. $\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$

$$= (a|0\rangle + b|1\rangle)(c|0\rangle + d|1\rangle)$$

$$= ac|00\rangle + bd|11\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle$$

$ac=\alpha,\ \beta=bd\quad ad=0.\ bc=0$

无解. 所以无法写成直积态

存在量子纠缠.

$$\frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

纠缠态严格数学定义：

当且仅当 $\rho = \sum p_i |\psi_i\rangle_A\langle\psi_i| \otimes |\psi\rangle_B\langle\psi|$.

不能成立　　的概念

(不考).

记得. 纯态的即可

Bell不等式：

出现波函数不完备性，是因为忽略了一些隐变量(假说).

对局域隐变量

$$|1 + P(b,c)| \geq |P(a,b) - P(a,c)|$$

CHSH不等式：

$$S = P(a_0 b_0) + P(a_1 b_0) + P(a_0 b_1) - P(a_1 b_1)$$

≤ 2. (局部隐变量)

$\leq 2\sqrt{2}$. (量子理论)

实验验证后，量子理论正确

量子测量与纠缠：

测量先发生纠缠，然后发生退相干.

实验制备纠缠：

两量子比特门从直积态制备纠缠态

7.3 量子信息

1. 量子通信及量子密钥分发

~~①　一次　密.~~ 量子密钥分发 + 一次一密.

↓

无条件安全的保密通信.

BB84方案

编码状态集合：光子四种偏振态.

~~$|\updownarrow\rangle\ |\leftrightarrow\rangle\ |\nearrow\rangle\ |\nwarrow\rangle$~~

$|\updownarrow\rangle \quad |\leftrightarrow\rangle \quad |\nearrow\!\!\!\swarrow\rangle \quad |\nwarrow\!\!\!\searrow\rangle$

组内两态正交. 每一组在另一组上投影相等

对应经典密钥依次为 $\{|\updownarrow\rangle, |\leftrightarrow\rangle, |\nearrow\!\!\!\swarrow\rangle, |\nwarrow\!\!\!\searrow\rangle\}$.

$\{1, 0, 1, 0\}$　测量方式：

$+$　$|\updownarrow\rangle\ |\leftrightarrow\rangle$. 对应 σ_z

$-$　$|\nearrow\!\!\!\swarrow\rangle.\ |\nwarrow\!\!\!\searrow\rangle$. 对应 σ_x

通信协议:

Alice 将一串量子比特串 $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ 传给 Bob

Bob 随机测量.

Alice 告诉 Bob 哪些测量基正确.

并未公布测量结果，但已经得到密钥.

7.3 量子隐形传态.

假设 Alice Bob 共享一对纠缠

$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

Alice 待传输：$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

三体系统状态为 $|\psi\rangle|\Phi\rangle_{23}$

$= (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

用 Bell 基展开

$$\begin{cases} |\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle) \\ |\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle) \end{cases}$$

分辨贝尔基即可得到待传输粒子状态 (Alice 需通过经典信道告知 Bob)

量子纠缠交换:

$|\psi^+\rangle_{23} \Longleftrightarrow |\Phi^+\rangle_{14}$

$|\psi^-\rangle_{23} \Longleftrightarrow |\Phi^-\rangle_{14}$

$|\Phi^+\rangle_{23} \Longleftrightarrow |\Phi^+\rangle_{14}$

$|\Phi^-\rangle_{23} \Longleftrightarrow |\psi^-\rangle_{14}$

(这部分我也没听懂)

7.4 量子计算.

量子操作可以仅靠二进制逻辑门运行.

三比特逻辑门可以以任意精度逼近一个幺正操作

通用量子计算机流程:

① 初态 $|0\rangle|0\rangle\cdots|0\rangle$

② 在初态上进行一系列幺正演化.

③ 在 $|0\rangle$ $|1\rangle$ 基上测量.

④ 对结果进行验证

量子逻辑门举例:

两比特量子逻辑门：CNOT 受控非门

$|00\rangle \to |00\rangle$

$|01\rangle \to |01\rangle$

$|11\rangle \to |10\rangle$

$|10\rangle \to |11\rangle$

量子 CNOT 门：可生成纠缠或去纠缠

$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)_A \ \text{CNOT} (|0\rangle)_B$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ 纠缠态

目标比特也可改变控制比特

$(|0\rangle + |1\rangle) \text{CNOT} (|0\rangle - |1\rangle)$

$= |0\rangle(|0\rangle - |1\rangle) + |1\rangle(-|0\rangle + |1\rangle)$

$= (|0\rangle - |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)$

CZ 门：受控相位门.

$|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$ 都不变

$|11\rangle \to -|11\rangle$