2025 年数分 (B3) A 卷评分标准

1. 每题 5 分. 答案依次为: $(0,0,0)$, -36, 错误、正确、错误、错误.

1.6. 下面我们构造一个没有面积的平面有界区域。

(a) 先构造一个 $(0,1)$ 的开子集 A, 想法来自于 Cantor 集的构造: 取 $\{t_i = 8^{-i}\}_{i=1}^{\infty}$, 那么 $\sum_{i=1}^{\infty} 2^i t_i = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$. 易见如下可数个 $(0,1)$ 中的开区间

$$\left(\frac{2j+1}{2^i} - t_i, \frac{2j+1}{2^i} + t_i\right), \quad j = 0,1,2,\cdots,2^i-1, \quad i = 1,2,\cdots. \tag{1}$$

两两不交, 且它们的长度之和小于 $\frac{1}{2}$, 记上述开区间的并集为 A.

(b) ∂A 不是 Jordan 零测集. 若不然, 则存在有限个开区间 $J_1,\dots,J_m$, 它们覆盖 $\partial A = [0,1]\backslash A$, 且它们的长度和小于 $\frac{1}{2}$. 于是 $J_1,\dots,J_m$ 与(1)中的可数个开区间 $\{I_k\}$ 构成 $[0,1]$ 的开覆盖, 存在有限子覆盖 $J_1,\dots,J_m,I_1,\dots,I_N$, 但是这有限个开区间的长度之和小于 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. 矛盾!

(c) 令 $\Omega = A\times(0,1)\cup(0,1)\times A$, 那么 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 的连通开集.

(d) 由于 $\partial\Omega = \big([0,1]\times[0,1]\big)\backslash\Omega$, 注意到(1)中的开区间们的长度之和小于 $\frac{1}{2}$, 利用类似于 (b) 里的反证法, 可得 $\partial\Omega$ 不是零面积集合. 从而 Ω 没有面积.

2. 每小问 8 分.

2.1. 证明只用到 M 是非空闭子集. 事实上, 取 $z\in M$, 那么

$$B = M\cap\{y\in\mathbb{R}^n : |y|\le|x|+|x-z|\}$$

包含 z, 并且它紧致 (3 分). 由于 $|x-\cdot| : B\to\mathbb{R}$ 为紧致集上的连续函数, 可取到最小值 (2 分). 于是, 存在 $x_0\in B\subset M$, 满足

$$|x-x_0| = \inf_{y\in B}|x-y| = \inf_{y\in M}|x-y| \quad (3\text{ 分}).$$

2.2. 这是一道作业题 (习题 17.5:11), 按照步骤给分.

3. 利用 n 维极坐标换元公式, 将原积分化为如下单变量定积分

$$c_n \int_1^R r^{n-1-p}\,\mathrm{d}r,$$

其中常数 $c_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面的面积 (6 分). 当 $R \to +\infty$ 时, 可分如下两种情况讨论极限问题:

(a) 当 $p \leq n$ 时, 极限为 $+\infty$(3 分);

(b) 当 $p > n$ 时, 极限为 $\frac{c_n}{p-n}$(3 分).

备注: 如果没有写出 c_n 具体值, 只扣 1 分.

4. 本题是作业题 (习题 17.5:10) 改编而来, 每问 6 分.

4.1. $\mathrm{d}F_X(H) = HX^T + XH^T$. 按步骤给分.

4.2. 任取 $2S \in \mathbb{S}_n$, 令 $H = SA$(3 分), 那么由第一问得

$$\mathrm{d}F_A(SA) = SAA^T + A(SA)^T = S + S^T = 2S \quad (3\text{ 分}).$$

5. 第一问 6 分, 第二问 12 分.

5.1. 记 $S_\pm = \{X \in S : \det X = \pm 1\}$, 那么 $S_\pm$ 都非空 (2 分). 由于行列式函数 $\det : S \to \mathbb{R}$ 连续,

$$S_- = (\det)^{-1}(-1.5,\, -0.5), \quad S_+ = (\det)^{-1}(0,5,\, 1.5)$$

都是 S 的非空不交开子集 (2 分). 因此 S 不连通 (2 分).

5.2. 首先陈述结论: 行列式 1 的 $X \in \mathbb{M}_2$ 是 f 的条件极值点当且仅当 $XX^T = I_2$; 此时, X 是 f 的最小值点. 答案写对就给 4 分. 问题的讨论分如下四个部分, 分值分别为 4, 4, 2, 2.

(1) 设 $f(A) = \operatorname{tr} AA^T$, $\Phi(A) = \det A - 1$. 记 $A = (a_{ij})$, 记 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 对于任意 $A \in \{\Phi = 0\}$,
$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_{ij}} = A_{ij},$$
可以将 $\nabla\Phi(A)$ 等同于 A 的伴随 A^*. 由于 $\det A = 1$, $A^* = A^{-1}$ 不是零矩阵. 由隐函数定义, $\{\Phi = 0\}$ 是 $\mathbb{M}_2 = \mathbb{R}^4$ 中的 3 维 C^1 曲面.

(2) 设 A 为 $f|_{\{\Phi=0\}}$ 的极值点. 那么由 Lagrange 乘数法的几何意义, 存在 $\lambda \in \mathbb{R}$, 使得对于任意 $1 \le i, j \le 2$, $a_{ij} = \lambda A_{ij}$, i.e. $A = \lambda (A^*)^T$. 由于 $\det A = 1$, 我们有 $A^* = A^{-1}$ 以及
$$AA^T = \lambda AA^* = \lambda AA^{-1} = \lambda I_2.$$
对上式两边取 trace 得, $0 < \operatorname{tr} AA^T = 2\lambda$, 从而 $\lambda > 0$. 对上式两边取行列式得 $\lambda^2 = 1$, 所以 $\lambda = 1$, 从而 $AA^T = I_2$, 此时 $f(A) = 2$.

(3) $f(A)$ 的几何意义是零矩阵 $\mathbf{0}$(原点) 到 A 的距离的平方. 由于 $\{\Phi = 0\} \subset \mathbb{M}_n$ 为闭子集, f 在 $\{\Phi = 0\}$ 上一定取到最小值, 也是极小值. 由第 2 步知道 $f|_{\{\Phi=0\}}$ 的所有极小值点构成集合 $\mathrm{SO}(2) := \{A \in \mathbb{M}_2 :\ \det A = 1,\ AA^T = I_2\}$, 且极小值为 2.

(4) 若能证明 $\mathrm{SO}(2)$ 是 $\mathbb{M}_2$ 的 1 维 C^1 曲面, 那么 $f|_{\mathrm{SO}(2)}$ 为常值 2, 从而第 3 步中的极小值点都不是严格的. 由于 $\mathrm{O}(2) = \{A \in \mathbb{M}_2 :\ AA^T = I_2\}$ 是 $\mathbb{M}_2$ 的 1 维曲面. 任取 $A \in \mathrm{SO}(2) \subset \mathrm{O}(2)$, 存在 4 维开球 $B_\delta(A)$ 使得 $B_\delta(A) \cap \mathrm{O}(2)$ 可以表达成 1 维开集上的 C^1 映射的图像. 当 $0 < \delta << 1$ 时, 由 det 的连续性, $B_\delta(A) \cap \mathrm{O}(2)$ 中的矩阵的行列式等于 1, 从而 $B_\delta(A) \cap \mathrm{O}(2) \subset \mathrm{SO(n)}$. 即证 $\mathrm{SO}(2)$ 是 $\mathbb{M}_2$ 的 1 维子流形. 事实上, $\mathrm{O}(2)$ 恰好有两个相同维数的连通分支: $\mathrm{SO}(2)$ 和 $\mathrm{NO}(2) = \{A \in \mathrm{O}(2) : \det A = -1\}$.

6. 每问 6 分.

6.1. 由于 $\varphi(U) \subset f^{-1}(0)$ 以及后者没有内点, 那么 $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ 也没有内点 (1 分). (反证法) 假设存在 $x^0 \in U$, φ 在 x^0 处的微分的秩序等于 m, 不妨设 $n \geq m$(1 分). 由于 φ 的微分的秩取得最大值 m 是一个开性质, 存在 x^0 的邻域 $V \subset U$, 使得 $\mathrm{d}\varphi$ 在 V 上的秩恒为 m(2 分). 利用秩定理, 略去参数变换, 在 $x^0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ 的附近我们可把 φ 看成 $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_m)$. 于是 $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$ 是 $\varphi(V) \subset \varphi(U)$ 的内点, 矛盾 (2 分).

6.2. 证明分如下三步, 分值均为 2 分.

(a) 任取 U 的紧致子集 K, 利用 $\operatorname{rk} \mathrm{d}\varphi$ 恒小于 m, 模仿例 18.1.2. 的证明, 可以证得 $\varphi(K) \subset \mathbb{R}^m$ 是 Jordan 零测集, 从而也是 Lebesgue 零测集.

(b) 断言: 存在一列紧致集合 $\{K_n\}$, 使得 $U = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$. 事实上, 先不妨设 $U \neq \mathbb{R}^n$, 那么可以如下构造 K_n:

$$K_n = \left\{ x \in U : |x| \leq n,\, |x - y| \geq \frac{1}{n} \text{ as } y \notin U \right\}.$$

(c) 注意到可数个 Lebesgue 零测集之并也是 Lebesgue 零测集, 以及 $\varphi(U) = \cup_{n=1}^{\infty} \varphi(K_n)$, 得证.