

中国科学技术大学

2017-2018 第二学期期末考试题 (2)

考试科目: 随机过程 (B) 得分: _____

学生所在系: _____ 姓名: _____ 学号: _____

(2018 年 6 月 29 日, 半开卷)

一、(24 分。填空题每空 3 分, 其余每空 2 分) 判断是非与填空:

(1) (判断是非) 设 S 为一不可约马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的状态空间, 则对任意 $i, j \in S$:

(a) i, j 均为正常返状态 (); (b) $\mu_i = \mu_j$, 其中 $\mu_i = \sum_{n=0}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$ ();

(c) i, j 未必为常返状态 (); (d) $d(i) = d(j) \in (0, \infty)$ ()。

(2) (判断是非) 设马氏链共有 n 个状态, 且 $i \rightarrow j$, 则:

(a) 可用至多 n 步由 i 转移到 j (); (b) 由 i 转移到 j 至少要用 n 步 ()。

(3) (填空) 设粒子在数轴上由 0 出发作对称随机游动, 则它回到 0 的平均时间为 ()。

(4) (填空) 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一强度为 λ 的 Poisson 过程, $s, t > 0$, 则:

$P\{N(s) = k | N(s+t) = n\} = (\quad) (0 \leq k \leq n)$; $E\{N(s+t) | N(s)\}$ 的期望为 (), 方差为 ()。

二、(15 分) 设某路段发生交通事故的次数 $N(t)$ 为一 Poisson 过程, 且平均每月发生交通事故 2 次。又设 $t=0$ 表示去年 12 月底, 试求:

(1) 到今年 3 月底为止未发生交通事故的概率是多少?

(2) 若已知到今年 3 月底已发生了 4 次交通事故, 问到 6 月底至少发生 7 次交通事故的概率是多少?

(3) 若每次事故造成的经济损失 Y (单位: 万元) 服从参数为 0.1 的指数分布, 且各次损失相互独立, 试求到 6 月底为止因交通事故而造成的总损失的期望值。

三、(15 分) 一只蚂蚁沿着一个等边三角形 (顶点记为 a, b, c) 的边爬行, 假定在时刻 n 它位于某一顶点 (例如 a), 则在下一时刻 ($n+1$) 它爬到另外两个顶点 (b 和 c) 的概率都等于 $1/2$ 。试用一个马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 描述这个过程 (状态: a, b, c), 并且

(1) 写出该马氏链的转移概率矩阵 P ;

(2) 试求 $P^{(n)} = P^n$;

(3) 试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = ?$

四、(18分) 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为区间 $[0, 3]$ 上的随机游动, 其转移概率矩阵为:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

试求质点由 k 出发而被 0 吸收的概率 p_k 及它被吸收的平均步数 v_k , ($k = 1, 2, 3$)。

五、(16分) 设 A 与 B 独立, 都服从 $[-1, 1]$ 上的均匀分布, 定义随机过程:

$$X(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t, \quad (t \in \mathbf{R}, \omega_0 \text{ 为非零常数})$$

(1) 证明 $\{X(t), t \in \mathbf{R}\}$ 为宽平稳过程;

(2) 试求其功率谱密度函数 $S(\omega)$ 。

六、(12分) 设平稳过程 $X = \{X(t), t \in \mathbf{R}\}$ (均值为 0) 的功率谱密度函数为:

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 14}{\omega^4 + 13\omega^2 + 36}$$

(1) 试求 X 的协方差函数 $R(\tau)$;

(2) 问 X 的均值是否有遍历性? 为什么?

(完)