§11.5 Gauss 定理和 Stokes 定理

11.5.1 Gauss 定理

Green 公式给出了平面中的向量场 $\vec{F}=(P,Q)$ 沿环路 L 的环量

$$\oint_L Pdx+Qdy$$

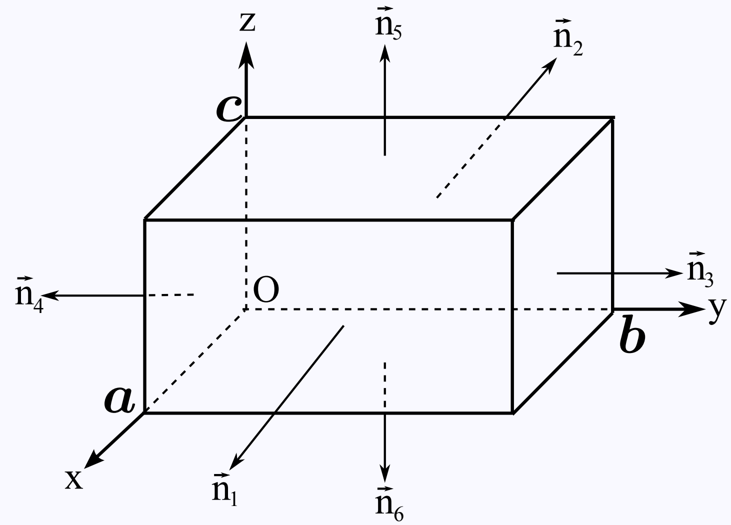
与函数 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$ 在 L 内部 D 的二重积分之间的关系, 即

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

这个公式描述了函数的局部性质与整体性质之间的联系, 说明了在一定的条件下局部形态可以决定整体形态.

那么有向封闭曲面上的第二型曲面积分与曲面所围成的三维闭区域上的三重积分有没有联系呢?

为便于观察先从简单的封闭曲面考察. 设 $V=[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的长方体, $S=\partial V$ 是一个封闭曲面, 它有六个侧面 $S_1,\cdots,S_6$, 法向分别为 $\vec{n}_1,\cdots,\vec{n}_6$. 设 $\vec{F}=(P,Q,R)$ 是 V 上的光滑向量场, 则



$$\iint_{S_1}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}_1 dS=\iint\limits_{\substack{0\leqslant y\leqslant b\\0\leqslant z\leqslant c}}P(a,y,z)dydz.$$

$$\iint_{S_2}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{n}_2 dS=-\iint\limits_{\substack{0\leqslant y\leqslant b\\0\leqslant z\leqslant c}}P(0,y,z)dydz.$$

将上面两个式子相加, 可得

返回 全屏 关闭 退出

$$\iint_{S_1+S_2} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_{\substack{0\leqslant y\leqslant b\\ 0\leqslant z\leqslant c}} \big(P(a,y,z)-P(0,y,z)\big)dydz$$

$$= \iint\limits_{\substack{0\leqslant y\leqslant b\\ 0\leqslant z\leqslant c}} \left(\int_0^a \frac{\partial P}{\partial x}dx\right) dydz = \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}dxdydz.$$

同理有

$$\iint_{S_3+S_4} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}dxdydz$$

$$\iint_{S_5+S_6} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz.$$

于是

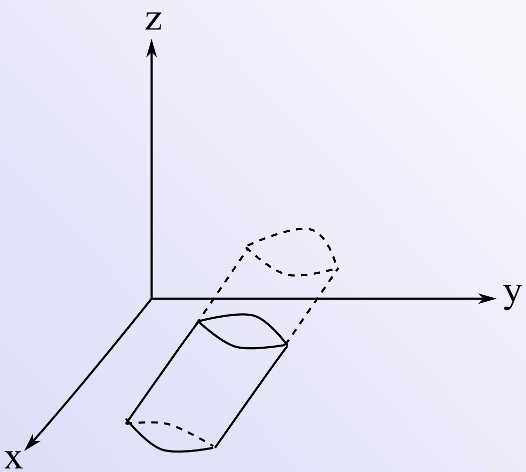
$$\iint_{\partial V} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz. \tag{11.1}$$

以下我们将上面得到的公式推广到较为一般的区域上. 为此考虑三种类型的区域:

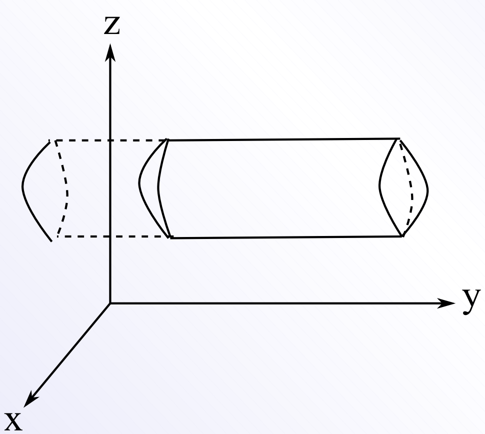
$$A \text{ 型区域：} V = \{(x,y,z) \,|\, x_1(y,z) \leqslant x \leqslant x_2(y,z),\ (y,z) \in D\}$$

$$B \text{ 型区域：} V = \{(x,y,z) \,|\, y_1(z,x) \leqslant y \leqslant y_2(z,x),\ (z,x) \in D\}$$

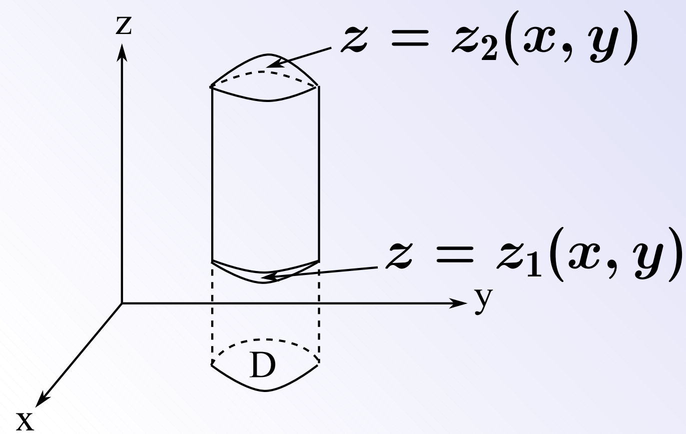
$$C \text{ 型区域：} V = \{(x,y,z) \,|\, z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y),\ (x,y) \in D\}$$



A 型区域



B 型区域



C 型区域

设 V 是一个 C 型区域, $R(x,y,z)\in C^1(V)$. 设 S_1 是下底面 $z=z_1(x,y)$, S_2 是上底面 $z=z_2(x,y)$. 因为 V 侧面的法向 $\vec{n}$ 与 z 轴垂直, 所以

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial V} R dx\wedge dy &= \iint_{\partial V} R\vec{k}\cdot\vec{n} dS = \iint_{S_2} R dx\wedge dy + \iint_{S_1} R dx\wedge dy \\
&= \iint_D R(x,y,z_2(x,y))dxdy - \iint_D R(x,y,z_1(x,y))dxdy \\
&= \iint_D \big(R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y))\big)dxdy \\
&= \iint_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}dz\right)dxdy = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz.
\end{aligned}$$

当 V 是由有限个 C 型区域拼接而成的区域时, 在相邻区域的公共面上, 两个区域边界的法向正好相反, 因此, 在衔接面上的积分抵消. 于是也有

$$\iint_{\partial V} R dx\wedge dy = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz.$$

同理, 当 V 是由有限个 A 型区域拼接而成的区域时, 有

$$\iint_{\partial V} P dy \wedge dz = \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz.$$

当 V 是由有限个 B 型区域拼接而成的区域时, 有

$$\iint_{\partial V} Q dz \wedge dx = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz.$$

这样我们就证明了当 V 分别可分成有限个 A 型, B 型, C 型区域的拼接时, (11.1) 仍成立. 更一般地, 有

定理 1 (Gauss 公式) 设空间区域 V 由分片光滑的双侧封闭曲面 S 围成, S 的方向指向外侧. 若函数 P, Q, R 在 V 上有连续的一阶偏导数, 则有

$$\iint_{\partial V} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz. \tag{11.2}$$

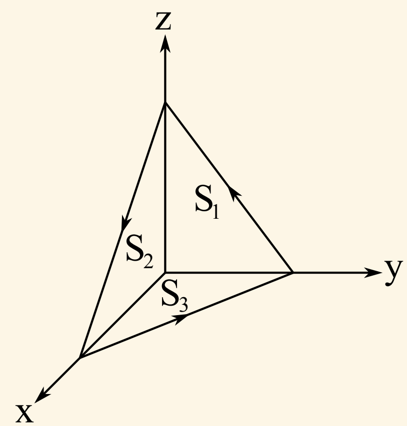
例 1 计算 $I = \iint_S y(x-z)dydz + x^2dzdx + (y^2+xz)dxdy$, 其中 S 是长方体 $V = [0,a]\times[0,b]\times[0,c]$ 的外表侧面.

解 因为 $y(x-z)$, x^2, y^2+xz 在空间中是 C^1 的, 所以由 Gauss 公式得

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_V (y+x)dxdydz \\
&= ac\int_0^b ydy + bc\int_0^a xdx \\
&= \frac{acb^2}{2} + \frac{bca^2}{2} \\
&= \frac{abc(a+b)}{2}.
\end{aligned}
$$

例 2 计算 $A=\iint_S x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy$, 其中 $S=\{(x,y,z):\ x,y,z\geqslant 0, x+y+z=1\}$, 法向与 $(1,1,1)$ 同向.

解 设 V 是由 S,S_1,S_2,S_3 所围成的四面体, ∂V 取外法向, 这里



$$S_1=\{(x,y,z):\ x=0, y\geqslant 0, z\geqslant 0, y+z\leqslant 1\}$$

$$S_2=\{(x,y,z):\ x\geqslant 0, y=0, z\geqslant 0, x+z\leqslant 1\}$$

$$S_3=\{(x,y,z):\ x\geqslant 0, y\geqslant 0, z=0, x+y\leqslant 1\}$$

由 Gauss 公式得

$$\iint_{\partial V} x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy=\iiint_V 3dxdydz=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad \iint_S x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy=\frac{1}{2}-\left(\iint_{S_1}+\iint_{S_2}+\iint_{S_3}\right).$$

$$\because\quad \iint_{S_1}=0,\ \iint_{S_2}=0,\ \iint_{S_3}=0,\quad \therefore\quad A=\frac{1}{2}.$$

例 3 计算 $A = \iint_S xy^2\,dydz + yz^2\,dzdx + zx^2\,dxdy$, 其中 S 是球体 $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant z\}$ 的表面, 方向朝外.

解 V 的参数方程是

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z = \frac{1}{2} + r\cos\theta, (r, \theta, \varphi) \in D,$$

其中 $D : 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. 由 Gauss 公式,

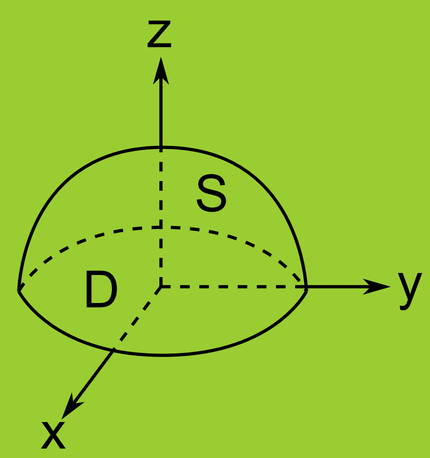
$$\begin{aligned}
A &= \iiint_V (y^2 + z^2 + x^2)dxdydz \\
&= \iiint_D (r^2\sin^2\theta + \frac{1}{4} + r\cos\theta + r^2\cos^2\theta)r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi \\
&= 2\pi \iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant\frac{1}{2}\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi}} (r^2 + \frac{1}{4} + r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\theta \\
&= 2\pi\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}\cdot 2\right) = \frac{\pi}{15}.
\end{aligned}$$

例 4 计算 $A = \iint_S (y^2+z^2)\,dydz + (z^2+x^2)\,dzdx + (x^2+y^2)\,dxdy$, 其中 S 是上半球面 $\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=a^2,\ z \geqslant 0\}$, 方向朝上.

解 令 D 是 S 在 xy 平面上的投影, 即, $x^2+y^2 \leqslant a^2$, D 的方向朝下, S 与 D 围成半球体 V. 由 Gauss 公式

$$\iint\limits_{S+D} (y^2+z^2)\,dydz + (z^2+x^2)\,dzdx + (x^2+y^2)\,dxdy = \iiint\limits_{V} 0dxdydz = 0,$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad A &= \iint_{-D} (y^2+z^2)\,dydz + (z^2+x^2)\,dzdx + (x^2+y^2)\,dxdy \\ &= \iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} (x^2+y^2)dxdy \\ &= \iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant a\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} r^2\cdot rdrd\varphi \\ &= 2\pi\cdot\frac{1}{4}a^4 = \frac{\pi a^4}{2}.\end{aligned}$$



返回 全屏 关闭 退出

例 5 计算曲面积分 $I=\iint_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS$, 其中 S 是光滑封闭曲面, 原点不在 S 上, r 是 S 上动点至原点的距离, $\vec{n}$ 曲面单位外法向.

解 设 $\vec{r}=(x,y,z)$, 则 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\cos(\vec{r},\vec{n})=\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{n}$. 令

$$\vec{F}=(P,Q,R)=(\frac{x}{r^3},\frac{y}{r^3},\frac{z}{r^3})=\frac{\vec{r}}{r^3},$$

则

$$I=\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS.$$

因为

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{y^2+z^2-2x^2}{r^5}=\frac{1}{r^3}-\frac{3x^2}{r^5},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{x^2+z^2-2y^2}{r^5}=\frac{1}{r^3}-\frac{3y^2}{r^5},$$
$$\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{x^2+y^2-2z^2}{r^5}=\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5},$$

所以

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0.$$

1) 若原点在 S 的外部区域, 则 $\vec{F}$ 是 S 内的连续可微向量场, 记 V 是 S 所围成的区域. 由 Gauss 公式

$$I=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iiint_V 0dxdydz=0.$$

2) 若原点在 S 的内部, 这时原点是 $\vec{F}$ 的奇点. 以 $\varepsilon>0$ 为半径, 原点为中心作包含于 S 内部的小球面 S_ε, 方向朝外. 则

$$\iint_{S-S_\varepsilon}\vec{F}\cdot\vec{n}dS=0.$$

因此,

$$I=\iint_S\vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iint_{S_\varepsilon}\vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iint_{S_\varepsilon}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\frac{\vec{r}}{r}dS=\iint_{S_\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon^2}dS=4\pi.$$

例 6 设 $f(x,y,z)$ 在 $\overline{B}(P_0,R)$ 上有二阶连续偏导数, 且满足 Laplace 方程 $\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$, 那么有

$$f(P_0)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_S f(x,y,z)dS,$$

其中 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$, $S:\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$, $0\leqslant r\leqslant R$.

证明 令 $g(r)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_S f(x,y,z)dS$. 因为 S 的参数方程为

$$x=x_0+r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y=y_0+r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z=z_0+r\cos\theta,$$

其中 $(\theta,\varphi)\in D=\{0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$. 所以

$$g(r)=\frac{1}{4\pi}\iint_D f(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi,z_0+r\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi.$$

$$\begin{aligned}g'(r)&=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_S f'_x dydz+f'_y dzdx+f'_z dxdy\\&=\frac{1}{4\pi r^2}\iiint_B \Delta f dxdydz=0,\end{aligned}$$

这说明 $g(r)$ 为常数. 所以 $g(r)=g(0)=f(P_0)$.

例 7 设 $u(x,y,z)$ 在光滑曲面 S 所围成的闭区域 V 上有二阶连续偏导数, 且满足 Laplace 方程 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, 那么有

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS = 0, \quad \iint_S u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS = \iiint_V (\nabla u)^2 dV,$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ 是 u 沿 S 外侧法向量 $\vec{n}$ 的方向导数.

证明 因为 $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \nabla u \cdot \vec{n}$, 由 Gauss 公式,

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS = \iiint_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dV = 0.$$

$$\begin{aligned}
\iint_S u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS &= \iint_V \left(u\frac{\partial u}{\partial x}, u\frac{\partial u}{\partial y}, u\frac{\partial u}{\partial z} \right) \cdot \vec{n} dS \\
&= \iiint_V \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + u\Delta u \right) dV \\
&= \iiint_V (\nabla u)^2 dV.
\end{aligned}$$