

## 第 3 章 一元函数的微分学

### §3.1 导数

#### 3.1.1 导数的定义

##### 1° 曲线的切线

首先要明确什么是“曲线上一点的切线”。在初等几何中，通常将只与圆周有一个交点的直线，定义为圆的切线。然而，对于一般曲线来说，这种定义方式就不适合了。例如对于抛物线（图 3.1），显然交于抛物线一点  $A$  的直线有多条，其中有的明显就不是切线。而对于图 3.2，直线交图示曲线于两点，显然在交点  $A$  处，直线应该是“切线”。对于图 3.3 中的曲线在  $A$  点有一个尖点。在尖点处，与曲线相交一点的切线却有多条。

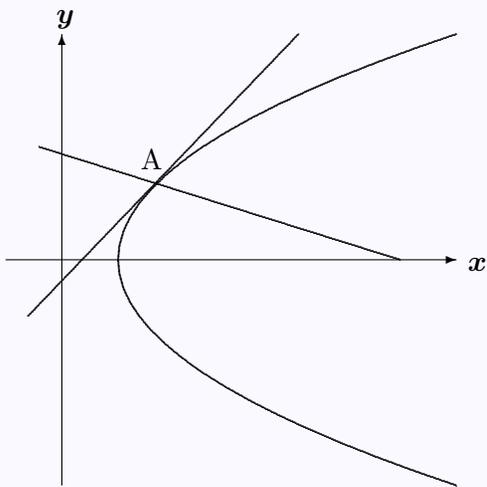


图 3.1

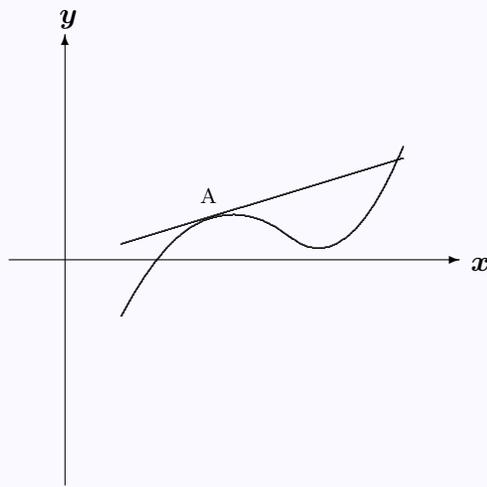


图 3.2

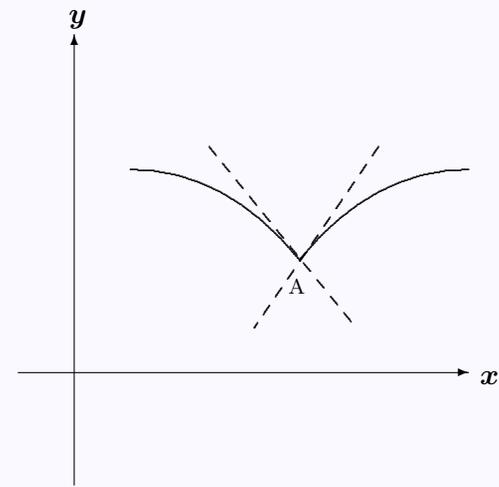


图 3.3

那么, 如何定义一般曲线的切线呢? 一个可行的途径是从割线开始, 连接曲线  $C$  上两点  $M_0$  和  $M$ , 作一条割线  $L$  (图 3.4), 当点  $M$  沿着曲线  $C$  滑动到  $M_0$  时, 如果  $L$  有一个“极限位置”, 我们便将这个“极限位置”的直线, 定义为曲线在一点的  $M_0$  的切线.

平面上过一点的直线可由直线与  $x$  轴的正向的夹角  $\alpha$  来表征. 这个夹角  $\alpha$  是指正  $x$  轴绕原点沿逆时针方向转动, 并在首次变得与该直线平行时所扫过的角度, 因此满足  $0 \leq \alpha \leq \pi$ . 角度的正切  $\tan \alpha$  称为直线的斜率.

设  $\alpha(M)$  是割线  $M_0M$  与  $x$  轴的夹角, 如果

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \alpha(M) = \alpha$$

则极限值  $\alpha$  应该是  $M_0$  点处切线与  $x$  轴的夹角. 现在假设曲线  $C$  由函数  $y = f(x)$  表示 (或者说曲线是函数  $f(x)$  的图象), 点  $M_0$  的坐标是

$M_0(x_0, f(x_0))$ , 动点  $M$  的坐标是  $M(x, f(x))$ , 所以割线的斜率是

$$\tan \alpha(M) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

故上述求极限的过程就是

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \tan \alpha(M) = \tan \alpha$$

如果左边的极限存在的话, 该极限就是切线的斜率.

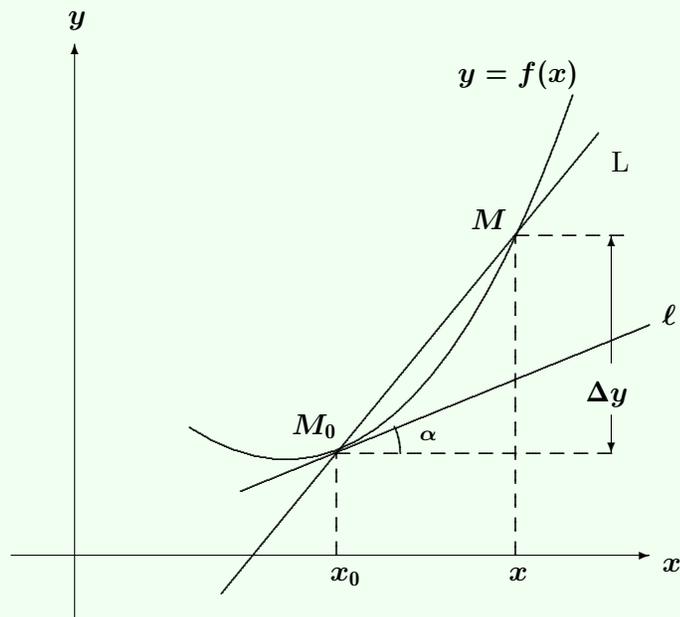


图 3.4

## 2° 直线运动质点的瞬时速度

考察沿直线作变速运动的一个质点. 设质点所运动的距离与时间之间的关系为  $S = S(t)$ . 因此在从  $t_0$  到  $t$  这段时间间隔内, 质点运动的平均速度是

$$\bar{v} = \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$$

显然, 这个平均速度并不能完全反映质点在  $t_0$  到  $t$  这段时间内更具体的运动规律. 如果要了解质点在某一时刻运动的变化规律 (即速度), 只要上述平均的时间间隔越来越短. 特别, 如果极限

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{v} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$$

存在, 则称为在时刻  $t_0$  时, 质点运动的瞬时速度.

无论是几何上的从割线到切线, 还是物理中的从平均速度到瞬时速度, 极限的形式都是一样的. 抽象地说, 都是刻划函数在一点的变化速率. 或者说是在一点函数的变化量与自变量的变化量之间的比率. 我们将其抽象出来, 就有了关于导数的定义.

**定义 1** 设  $y = f(x)$  在  $x_0$  的邻域中有定义, 如果极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在, 就称它为  $y = f(x)$  在  $x_0$  的导数 (或微商), 记成  $f'(x_0)$ ,  $\frac{df}{dx} \Big|_{x_0}$  或  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x_0}$ , 并称  $f(x)$  在  $x_0$  可导.

从上面的第一个例子可知, 函数的导数的几何意义, 就是曲线在一点的切线的斜率, 而从第二个例子可知, 导数的物理意义就是在一个时刻的瞬时速度.

如果函数在一点的导数不存在, 还包含了一种可能, 就是极限等于无穷大. 对于这种情况的几何解释是, 函数的图象在一点的切线的斜率是无穷大, 也就是切线平行于  $y$  轴. 所以我们一般不考虑平行于  $y$  轴的切线.

**定义 2** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的右边近旁有定义, 如果  $\Delta x > 0$ , 且

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称它为  $f(x)$  在  $x_0$  的右导数, 记成  $f'_+(x_0)$ , 并称  $f(x)$  在  $x_0$  右可导. 类似可定义  $y = f(x)$  在  $x_0$  的左可导和它的左导数  $f'_-(x_0)$ .

显然,  $f(x)$  在  $x_0$  可导的充分必要条件是  $f(x)$  在  $x_0$  左、右可导, 并有

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

**定义 3** 如果  $y = f(x)$  在区间  $I$  的每一点都可导, 则称  $f(x)$  在  $I$  上可导,  $f'(x)$  是  $I$  上一个函数称为  $f(x)$  的导函数. 如果区间  $I$  包含有端点, 则在该端点处,  $f(x)$  只需有相应的单侧可导性.

$y = f(x)$  的导函数, 也可记成  $y'$ ,  $\frac{dy}{dx}$  等.

**例 1** 设  $y = c$  (常数), 求  $y'$ .

$$\text{解 } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

**例 2** 设  $y = x^n$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 其中  $n$  是自然数. 求  $y'$ .

**解** 对于任意实数  $x$ , 由二项式定理得

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n$$

故

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1} \right] = nx^{n-1}.$$

即  $y = x^n$  的导函数是  $y' = nx^{n-1}$ , 导函数的定义域也是  $(-\infty, +\infty)$ . 特别, 当  $n = 1$  时, 函数  $y = x$  的导函数为常值函数  $y' = 1$ , 即  $y = x$  在每一点的切线的斜率都是 1.

例 3 求函数  $f(x) = e^x$  的导函数.

解 因为

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} &= e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \\ &= e^x\end{aligned}$$

所以  $(e^x)' = e^x$ .

**例 4** 求对数函数  $y = \log_a x$ ,  $x \in (0, +\infty)$  的导函数, 这里  $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ .

**解** 根据换底公式, 对于任意的  $x > 0$ , 有  $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ , 且

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{\ln a} \frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

利用极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

得

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

特别当  $a = e$  时, 上面的结果为

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

由此可见, 对于以  $e$  为底的自然对数的导数特别简单.

**例 5** 求正弦函数和余弦函数的导函数.

**解** 记  $y = \sin x$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ . 则对任意一点  $x$ ,

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}$$

由  $\cos x$  的连续性以及基本极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

得

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x$$

即  $(\sin x)' = \cos x$ .

类似可得  $(\cos x)' = -\sin x$ .

### 例 6 求下列分段函数的导函数

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$$

解 函数  $f(x)$  由函数  $y = x^3$  ( $x \geq 0$ ) 以及  $y = x^2$  ( $x < 0$ ) 在  $x = 0$  处拼接而成. 当  $x > 0$  时,  $f'(x) = 3x^2$ , 当  $x < 0$  时,  $f'(x) = 2x$ , 当  $x = 0$  时,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{(\Delta x)^3}{\Delta x} = 0 \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = 0 \end{aligned}$$

所以

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ 2x, & x < 0 \end{cases}$$

**定理 1** 设  $f(x)$  在  $x_0$  可导, 则  $f(x)$  在  $x_0$  连续. 换句话说, 如果函数在一点  $x_0$  不连续, 则显然在  $x_0$  处不可导.

**证明** 由已知条件, 极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

存在. 所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

由此得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

即,  $f(x)$  在  $x_0$  连续.

**例 7** 函数  $f(x) = |x|$  在  $x = 0$  处连续, 但是在  $x = 0$  不可导.

**证明** 当  $x = 0$  时

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1,$$
$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x - 0}{\Delta x} = -1.$$

所以  $f(x) = |x|$  在  $x = 0$  处不可导. 注意, 从图3.5 可以看出, 函数在  $x = 0$  有一个尖点, 即在  $x = 0$  不光滑, 所以没有切线.

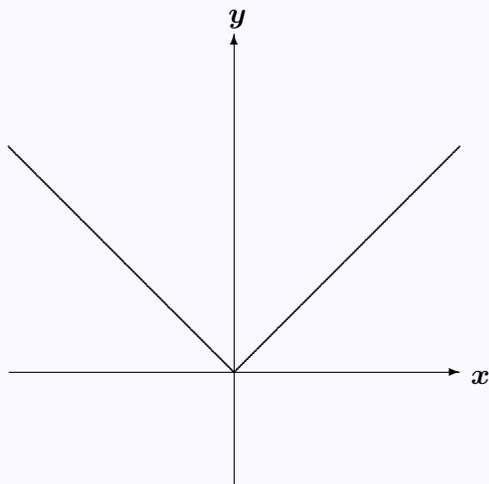


图 3.5

## 3.1.2 函数的四则运算

**定理 2 (函数的和差积商的导数)** 设  $f(x)$  和  $g(x)$  可导, 则  $f(x) \pm g(x)$ ,  $f(x)g(x)$  及  $\frac{f(x)}{g(x)}$  (当  $g(x) \neq 0$  时) 皆可导, 并有

$$1^\circ (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$2^\circ (f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$3^\circ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

**证明** 关于  $1^\circ$ , 直接由导数的定义和极限的运算即可证得. 关于  $2^\circ$ , 利用下列恒等式

$$\begin{aligned} & f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned}
 (f(x)g(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
 &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
 \end{aligned}$$

关于 3°, 首先注意到, 函数  $g(x)$  在点  $x$  处可导, 所以在这一点连续. 因此在  $x$  处, 条件  $g(x) \neq 0$  意味着在  $x$  的附近  $g(x)$  也不为零. 所以当自变量的增量  $\Delta x$  非常小时,  $g(x + \Delta x) \neq 0$ , 这时有

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{1}{g(x + \Delta x)} - \frac{1}{g(x)} \right) \\
&= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{g(x)g(x + \Delta x)} \\
&= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x)g(x + \Delta x)} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= - \frac{g'(x)}{g^2(x)}.
\end{aligned}$$

再由 2° 即得到

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x) \frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \frac{1}{g(x)} - f(x) \left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.
\end{aligned}$$

**例 8** 设  $f(x)$  可导, 则  $(cf(x))' = cf'(x)$ , 其中  $c$  是常数. 这个结论是显然的.

**例 9** 求  $f(x) = x^2(\sin x + \cos x)$  的导数.

解

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)'(\sin x + \cos x) + x^2(\sin x + \cos x)' \\ &= 2x(\sin x + \cos x) + x^2(\cos x - \sin x) \end{aligned}$$

**例 10** 求函数  $\tan x$  和  $\cot x$  的导数.

解

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \end{aligned}$$

类似可得

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.$$

### 3.1.3 复合函数的求导法则

**定理 3 (复合函数的导数)** 设函数  $y = g(x)$  定义在区间  $I$  上, 函数  $z = f(y)$  定义在区间  $J$  上, 且  $g(I) \subset J$ . 如果  $g(x)$  在点  $x \in I$  处可导, 而  $f(y)$  在点  $y = g(x)$  可导, 则复合函数  $f \circ g$  在点  $x$  处可导, 且有:

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

**证明** 我们只考虑任意一点  $x_0$  和  $g(x_0)$  都不是所在区间的端点的情况 (对于出现端点的情况, 只需在下面的证明中做一些简单修改). 考察

$$\begin{aligned} \frac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

在上式中, 只有当  $g(x) - g(x_0) \neq 0$  时才有意义. 但是当  $g(x) - g(x_0) = 0$  时, 上式右边的第一个分式的分子也是零  $f(g(x)) - f(g(x_0)) = 0$ , 所以我们约定这个分式为  $f'(g(x_0))$  不但是合理的, 而且上式的两端都等于零. 因此仍然成立. 根据这样的分析, 上式对任何情况都是成立的. 令  $x \rightarrow x_0$ , 由于  $g(x)$  连续, 所以  $g(x) \rightarrow g(x_0)$ . 因此在上式中取极限, 就有

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{x - x_0} \\
 = & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \\
 = & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
 = & f'(g(x_0))g'(x_0)
 \end{aligned}$$

复合函数的求导法则通常称为“链式法则”。在实际使用中,定理 3 也可以表示成:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

也就是说,如果  $z$  是变量  $x$  的复合函数,中间变量为  $y$ ,则为了求  $z$  对  $x$  的微商  $\frac{dz}{dx}$ ,可先求  $z$  对中间变量  $y$  的微商  $\frac{dz}{dy}$ ,再求中间变量  $y$  对  $x$  的微商  $\frac{dy}{dx}$ ,将所得结果相乘就得到  $\frac{dz}{dx}$ .

多个函数复合也有相应的“链式法则”。

**例 11** 求  $z = \sin(\cos x^2)$  的导数.

**解** 该函数是  $z = \sin u$ ,  $u = \cos v$ ,  $v = x^2$  等三个函数复合而成的. 所以

$$(\sin(\cos x^2))' = (\sin u)'(\cos v)'(x^2)' = -2x \cos u \sin v = -2x \cos(\cos x^2) \sin x^2.$$

**例 12** 求  $z = (1 - x)^9$  的导数.

**解** 将  $(1 - x)^9$  用二项式定理展开, 应用  $(x^n)' = nx^{n-1}$  以及导数的四则运算, 可以求出该函数的导数. 但是如果将该函数看成是  $z = y^9$  和  $y = 1 - x$  的复合, 则运算更为简单

$$((1 - x)^9)' = (y^9)'(1 - x)' = -9y^8 = -9(1 - x)^8.$$

**例 13** 求  $z = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3$  的导数.

**解** 该函数可以看成是  $z = y^3$  和  $y = \frac{1+x}{1-x}$  的复合函数. 所以

$$\begin{aligned}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3\right]' &= (y^3)' \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' \\ &= 3y^2 \cdot \frac{1 \cdot (1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} \\ &= 3 \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \cdot \frac{2}{(1-x)^2} \\ &= \frac{6(1+x)^2}{(1-x)^4}.\end{aligned}$$

**例 14** 设  $f(x)$  在点  $x$  处可导, 且  $f(x) \neq 0$ , 则函数  $\ln |f|$  在点  $x$  可导, 且

$$(\ln |f|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

特别有

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

**例 14** 设  $f(x)$  在点  $x$  处可导, 且  $f(x) \neq 0$ , 则函数  $\ln |f|$  在点  $x$  可导, 且

$$(\ln |f|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

特别有

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

**证明** 由于  $f(x)$  在点  $x$  可导, 所以连续, 因此存在一个含  $x$  的区间  $(x - \delta, x + \delta)$ , 使得函数  $f$  在其上的取值保持同号.

当在  $(x - \delta, x + \delta)$  上取正号时,  $|f| = f$ , 即  $\ln |f| = \ln f$ , 它是函数  $z = \ln y$ ,  $y = f(x)$  的复合函数.

因此

$$(\ln |f|)' = (\ln y)' \cdot f'(x) = \frac{1}{y} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

当函数在  $(x - \delta, x + \delta)$  上取负号时,  $|f| = -f$ , 所以  $\ln |f| = \ln(-f)$ ,

它是函数  $z = \ln y$ ,  $y = -f(x)$  的复合函数, 此时

$$(\ln |f|)' = (\ln y)' \cdot (-f'(x)) = \frac{1}{y} \cdot (-f'(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

它是函数  $z = \ln y$ ,  $y = -f(x)$  的复合函数, 此时

$$(\ln |f|)' = (\ln y)' \cdot (-f'(x)) = \frac{1}{y} \cdot (-f'(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

**例 15** 设  $y = x^\alpha$ , ( $x > 0$ ), 这里  $\alpha$  是任意实数. 证明  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ .

它是函数  $z = \ln y$ ,  $y = -f(x)$  的复合函数, 此时

$$(\ln |f|)' = (\ln y)' \cdot (-f'(x)) = \frac{1}{y} \cdot (-f'(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

**例 15** 设  $y = x^\alpha$ , ( $x > 0$ ), 这里  $\alpha$  是任意实数. 证明  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ .

**证明** 当  $\alpha$  是自然数 (包括  $\alpha = 0$ ) 时, 我们已经根据函数导数的定义给予了证明. 当  $\alpha \neq 0$  时 (当然也包括正的自然数),  $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ , 它是函数  $y = e^u$  和函数  $u = \alpha \ln x$  的复合函数. 所以

$$\begin{aligned} \frac{dx^\alpha}{dx} &= \frac{de^u}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} \\ &= x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} \\ &= \alpha x^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

**例 16** 设  $u(x), v(x)$  可导, 且  $v(x) > 0$ , 则函数  $y = v(x)^{u(x)}$  可导, 其导数是

$$(v(x)^{u(x)})' = v(x)^{u(x)} \left( u'(x) \ln v(x) + \frac{u(x)v'(x)}{v(x)} \right).$$

**例 16** 设  $u(x), v(x)$  可导, 且  $v(x) > 0$ , 则函数  $y = v(x)^{u(x)}$  可导, 其导数是

$$(v(x)^{u(x)})' = v(x)^{u(x)} \left( u'(x) \ln v(x) + \frac{u(x)v'(x)}{v(x)} \right).$$

**证明** 因为  $y = v(x)^{u(x)} = e^{u(x) \ln v(x)}$  它是函数  $y = e^w$ ,  $w = u(x) \ln v(x)$  的复合, 所以  $y$  在  $x$  处的导数是

$$\begin{aligned} y'(x) &= e^{u(x) \ln v(x)} (u \ln v)'(x) \\ &= v(x)^{u(x)} \left( u'(x) \ln v(x) + \frac{u(x)v'(x)}{v(x)} \right). \end{aligned}$$

### 3.1.4 反函数的求导法则

**定理 4 (反函数的导数)** 设  $y = f(x)$  在区间  $I$  上连续, 且有反函数  $f^{-1}$ , 如果  $f$  在点  $x$  处可导, 且  $f'(x) \neq 0$ . 则定义在区间  $J = f(I)$  的反函数  $f^{-1}$  在点  $y = f(x)$  也可导, 且

$$(f^{-1})'(y)f'(x) = 1$$

或写成

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

**证明** 我们只对  $x$  以及  $y$  不是区间端点的情况进行证明. 对于端点, 只需将下列证明作一点修改即可.

从定义出发, 要证明反函数  $f^{-1}(y)$  的可导性, 就看

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h}$$

的极限是否存在.

从定义出发, 要证明反函数  $f^{-1}(y)$  的可导性, 就看

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h}$$

的极限是否存在.

因为  $y$  不是区间  $J$  的端点, 所以当  $h$  很小时,  $y+h \in J = f(I)$ . 又因为  $f$  是严格单调的, 所以必存在唯一的  $u = u(h) \in I$ , 使得  $y+h = f(x+u)$ , 而且, 一方面严格单调性保证了当  $h \neq 0$  时,  $u \neq 0$ . 另一方面  $f^{-1}(y)$  的连续性保证了当  $h \rightarrow 0$  时,

$$\lim_{h \rightarrow 0} (x+u) = \lim_{h \rightarrow 0} f^{-1}(y+h) = f^{-1}(y) = x,$$

即当  $h \rightarrow 0$  时,  $u \rightarrow 0$ .

于是在

$$\begin{aligned} \frac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h} &= \frac{f^{-1}(f(x+u)) - f^{-1}(y)}{h} \\ &= \frac{u}{f(x+u) - f(x)} \\ &= \frac{1}{\frac{f(x+u) - f(x)}{u}} \end{aligned}$$

中, 当  $h \rightarrow 0$  时, 上式最右端的比式的极限是  $\frac{1}{f'(x)}$ , 说明左端在  $h \rightarrow 0$  时的极限存在. 即

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

## 例 17 求反三角函数的导函数.

### 例 17 求反三角函数的导函数.

**解**  $y = \arcsin x$  是  $x = \sin y$ ,  $|y| < \frac{\pi}{2}$  的反函数, 而  $x = \sin y$  在区间  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  内可导, 且  $(\sin y)' = \cos y \neq 0$ , 所以在对应的区间  $(-1, 1)$  内,  $y = \arcsin x$  可导, 且

$$\begin{aligned}(\arcsin x)' &= \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.\end{aligned}$$

### 例 17 求反三角函数的导函数.

**解**  $y = \arcsin x$  是  $x = \sin y$ ,  $|y| < \frac{\pi}{2}$  的反函数, 而  $x = \sin y$  在区间  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  内可导, 且  $(\sin y)' = \cos y \neq 0$ , 所以在对应的区间  $(-1, 1)$  内,  $y = \arcsin x$  可导, 且

$$\begin{aligned}(\arcsin x)' &= \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.\end{aligned}$$

类似地, 可得

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

现在考虑函数  $y = \arctan x$ , 它是  $x = \tan y$  的反函数, 因为在区间  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  内,  $(\tan y)' = \sec^2 y \neq 0$ , 所以

$$\begin{aligned}(\arctan x)' &= \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} \\ &= \frac{1}{1 + x^2}, \quad |x| < +\infty.\end{aligned}$$

现在考虑函数  $y = \arctan x$ , 它是  $x = \tan y$  的反函数, 因为在区间  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  内,  $(\tan y)' = \sec^2 y \neq 0$ , 所以

$$\begin{aligned}(\arctan x)' &= \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} \\ &= \frac{1}{1 + x^2}, \quad |x| < +\infty.\end{aligned}$$

类似有

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}, \quad |x| < +\infty.$$

### 3.1.5 基本初等函数的导数

$$(c)' = 0 \quad (c \text{ 为常数});$$

$$(\sin x)' = \cos x;$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x;$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(e^x)' = e^x;$$

$$(a^x)' = a^x \ln a;$$

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1};$$

$$(\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\cot x)' = -\operatorname{csc}^2 x;$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

### 3.1.6 高阶导数

设  $y = f(x)$  在区间  $I$  可导, 它的导函数  $y' = f'(x)$  也称为函数  $f$  的一阶导数 (微商).  $y' = f'(x)$  作为  $x$  的函数, 仍然可以研究它在一点的导数.

如果  $f'(x)$  在一点  $x_0$  可导, 则称函数  $f(x)$  在  $x_0$  二阶可导. 其导数值  $(f'(x))'|_{x=x_0}$  通常记为

$$f''(x_0), \quad y''(x_0), \quad \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0}, \quad \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=x_0}$$

称为函数  $f(x)$  在  $x_0$  处的二阶导数.

有时候在不引起混淆时也记

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}, \quad \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=x_0} = \frac{d^2 y(x_0)}{dx^2}$$

类似可以讨论函数  $y = f(x)$  在一点  $x_0$  的三阶、四阶  $\dots$  导数  $f'''(x_0), f^{(4)}(x_0), \dots$  以及三阶、四阶  $\dots$  导函数  $f'''(x), f^{(4)}(x), \dots$ .

一般地, 对  $n \geq 1$ , 如果函数  $y = f(x)$  的  $n - 1$  阶导函数  $f^{(n-1)}(x)$  在点  $x_0$  可导, 则称  $f$  在  $x_0$  处  $n$  阶可导, 记为

$$y^{(n)}(x_0), f^{(n)}(x_0), \left. \frac{d^n y}{dx^n} \right|_{x=x_0}, \quad \text{或} \quad \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=x_0}$$

称为函数  $f$  在一点  $x_0$  处的  $n$  阶导数.

如果  $f^{(n-1)}(x)$  的导函数  $(f^{(n-1)}(x))'$  存在, 则称其为函数  $f$  的  $n$  阶导(函)数, 记作

$$y^{(n)}(x), f^{(n)}(x), \frac{d^n y}{dx^n}(x), \quad \text{或} \quad \frac{d^n f}{dx^n}(x).$$

显然有

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} \right).$$

一个函数的导函数不一定可导, 甚至不必连续. 例如, 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在任意点可导, 且

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

显然  $f'(x)$  在  $x = 0$  不连续.

因此对函数求导的阶要求越高, 对函数的限制越多. 以  $f(x) = |x|$  这个例子看, 该函数在  $x = 0$  不可导, 函数的图象在此有一个尖点, 不光滑. 因此一个函数可导, 通常形象地称函数光滑. 函数具有越高的阶数, 则函数就越“光滑”. 因此, 一般而言, 函数的性态也就越好.

**定理 5 (Leibniz 公式)** 设  $u(x)$  和  $v(x)$  都有  $n$  阶导数, 则

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}. \quad (1)$$

**证明** 对  $n$  用归纳法.  $n = 1$  时是显然的, 设 (1) 对  $n$  成立, 则

$$(uv)^{(n+1)} = \left( \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \right)' = \sum_{k=0}^n \left( C_n^k u^{(n-k+1)} v^{(k)} + C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)} \right)$$

**定理 5 (Leibniz 公式)** 设  $u(x)$  和  $v(x)$  都有  $n$  阶导数, 则

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}. \quad (1)$$

**证明** 对  $n$  用归纳法.  $n = 1$  时是显然的, 设 (1) 对  $n$  成立, 则

$$\begin{aligned} (uv)^{(n+1)} &= \left( \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \right)' = \sum_{k=0}^n (C_n^k u^{(n-k+1)} v^{(k)} + C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)}) \\ &= u^{(n+1)} v + \sum_{k=1}^n C_n^k u^{(n+1-k)} v^{(k)} + \sum_{k=1}^n C_n^{k-1} u^{(n+1-k)} v^{(k)} + uv^{(n+1)} \end{aligned}$$

**定理 5 (Leibniz 公式)** 设  $u(x)$  和  $v(x)$  都有  $n$  阶导数, 则

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}. \quad (1)$$

**证明** 对  $n$  用归纳法.  $n = 1$  时是显然的, 设 (1) 对  $n$  成立, 则

$$\begin{aligned} (uv)^{(n+1)} &= \left( \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \right)' = \sum_{k=0}^n (C_n^k u^{(n-k+1)} v^{(k)} + C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)}) \\ &= u^{(n+1)} v + \sum_{k=1}^n C_n^k u^{(n+1-k)} v^{(k)} + \sum_{k=1}^n C_n^{k-1} u^{(n+1-k)} v^{(k)} + uv^{(n+1)} \\ &= u^{(n+1)} v + \sum_{k=1}^n (C_n^k + C_n^{k-1}) u^{(n+1-k)} v^{(k)} + uv^{(n+1)} \end{aligned}$$

**定理 5 (Leibniz 公式)** 设  $u(x)$  和  $v(x)$  都有  $n$  阶导数, 则

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}. \quad (1)$$

**证明** 对  $n$  用归纳法.  $n = 1$  时是显然的, 设 (1) 对  $n$  成立, 则

$$\begin{aligned} (uv)^{(n+1)} &= \left( \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \right)' = \sum_{k=0}^n (C_n^k u^{(n-k+1)} v^{(k)} + C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)}) \\ &= u^{(n+1)} v + \sum_{k=1}^n C_n^k u^{(n+1-k)} v^{(k)} + \sum_{k=1}^n C_n^{k-1} u^{(n+1-k)} v^{(k)} + uv^{(n+1)} \\ &= u^{(n+1)} v + \sum_{k=1}^n (C_n^k + C_n^{k-1}) u^{(n+1-k)} v^{(k)} + uv^{(n+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(n+1-k)} v^{(k)}, \end{aligned}$$

即, (1) 对  $n + 1$  成立. 由归纳法可知, 定理成立.

**例 18** 求  $f(x) = e^{ax}$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 其中  $a$  是常数.

**例 18** 求  $f(x) = e^{ax}$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 其中  $a$  是常数.

**解**  $(e^{ax})' = ae^{ax}$ ,  $(e^{ax})'' = (ae^{ax})' = a^2e^{ax}$ ,  $\dots$ , 一般有

$$(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$$

**特别**

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

**例 18** 求  $f(x) = e^{ax}$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 其中  $a$  是常数.

**解**  $(e^{ax})' = ae^{ax}$ ,  $(e^{ax})'' = (ae^{ax})' = a^2e^{ax}$ ,  $\dots$ , 一般有

$$(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$$

**特别**

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

**例 19** 求  $\sin x$  和  $\cos x$  的  $n$  阶导函数,  $x \in (-\infty, +\infty)$ .

**例 18** 求  $f(x) = e^{ax}$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 其中  $a$  是常数.

**解**  $(e^{ax})' = ae^{ax}$ ,  $(e^{ax})'' = (ae^{ax})' = a^2e^{ax}$ ,  $\dots$ , 一般有

$$(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$$

**特别**

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

**例 19** 求  $\sin x$  和  $\cos x$  的  $n$  阶导函数,  $x \in (-\infty, +\infty)$ .

**解** 用数学归纳法易证

$$(\sin x)^{(n)} = \sin \left( x + \frac{n\pi}{2} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos \left( x + \frac{n\pi}{2} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

**例 20** 求  $(1+x)^\alpha$ ,  $x \in (-1, +\infty)$  的  $n$  阶导函数.

**例 20** 求  $(1+x)^\alpha$ ,  $x \in (-1, +\infty)$  的  $n$  阶导函数.

**解** 由幂函数求导法则易知

$$((1+x)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

**特别**

$$((1+x)^\alpha)^{(n)} \Big|_{x=0} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1), \quad n = 1, 2, \cdots$$

**例 20** 求  $(1+x)^\alpha$ ,  $x \in (-1, +\infty)$  的  $n$  阶导函数.

**解** 由幂函数求导法则易知

$$((1+x)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

**特别**

$$((1+x)^\alpha)^{(n)} \Big|_{x=0} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1), \quad n = 1, 2, \cdots$$

**例 21** 求  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $x \in (-1, +\infty)$  的  $n$  阶导函数.

**例 20** 求  $(1+x)^\alpha$ ,  $x \in (-1, +\infty)$  的  $n$  阶导函数.

**解** 由幂函数求导法则易知

$$((1+x)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

特别

$$((1+x)^\alpha)^{(n)} \Big|_{x=0} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1), \quad n = 1, 2, \cdots$$

**例 21** 求  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $x \in (-1, +\infty)$  的  $n$  阶导函数.

**解** 用归纳法可证

$$\frac{d^n \ln(1+x)}{dx^n} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

因此

$$\frac{d^n \ln(1+x)}{dx^n} \Big|_{x=0} = (-1)^{n-1} (n-1)!.$$

例 22 设  $y = x^2 e^{ax}$ , 求  $y^{(n)}(x)$ ,  $a$  是常数.

**例 22** 设  $y = x^2 e^{ax}$ , 求  $y^{(n)}(x)$ ,  $a$  是常数.

**解** 由 Leibniz 公式得到

$$y^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k (x^2)^{(k)} (e^{ax})^{(n-k)}$$

**例 22** 设  $y = x^2 e^{ax}$ , 求  $y^{(n)}(x)$ ,  $a$  是常数.

**解** 由 Leibniz 公式得到

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n C_n^k (x^2)^{(k)} (e^{ax})^{(n-k)} \\ &= x^2 (e^{ax})^{(n)} + 2nx (e^{ax})^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 (e^{ax})^{(n-2)} \end{aligned}$$

**例 22** 设  $y = x^2 e^{ax}$ , 求  $y^{(n)}(x)$ ,  $a$  是常数.

**解** 由 Leibniz 公式得到

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n C_n^k (x^2)^{(k)} (e^{ax})^{(n-k)} \\ &= x^2 (e^{ax})^{(n)} + 2nx (e^{ax})^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 (e^{ax})^{(n-2)} \\ &= a^n x^2 e^{ax} + 2na^{n-1} x e^{ax} + n(n-1)a^{n-2} e^{ax} \end{aligned}$$

**例 22** 设  $y = x^2 e^{ax}$ , 求  $y^{(n)}(x)$ ,  $a$  是常数.

**解** 由 Leibniz 公式得到

$$\begin{aligned}
 y^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n C_n^k (x^2)^{(k)} (e^{ax})^{(n-k)} \\
 &= x^2 (e^{ax})^{(n)} + 2nx (e^{ax})^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 (e^{ax})^{(n-2)} \\
 &= a^n x^2 e^{ax} + 2na^{n-1} x e^{ax} + n(n-1) a^{n-2} e^{ax} \\
 &= a^{n-2} (a^2 + 2nax + n(n-1)) e^{ax}.
 \end{aligned}$$

**例 23** 设  $y = \arctan x$ , 求  $y^{(n)}(0)$ .

**例 23** 设  $y = \arctan x$ , 求  $y^{(n)}(0)$ .

**解** 由  $y' = \frac{1}{1+x^2}$  可知, 函数  $\arctan x$  有任意阶导数, 且

$$(1+x^2)y' = 1.$$

在上式两边求  $n-1$  阶导数, 并由 Leibniz 公式得到

$$(1+x^2)y^{(n)} + 2(n-1)xy^{(n-1)} + (n-1)(n-2)y^{(n-2)} = 0.$$

将  $x = 0$  代入就得到递推公式

$$y^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0).$$

由于  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ . 就得到

$$y^{(2k+1)}(0) = (-1)^k (2k)!, \quad y^{(2k)}(0) = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

### 3.1.7 向量值函数的导数

所谓向量值函数, 就是一个从实数集合  $\mathbb{R}$  到  $\mathbb{R}^k$  的一个映射

$$\vec{f}: [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^k, \quad \vec{f}: t \longmapsto \vec{f}(t)$$

其中简单地讲,  $\mathbb{R}^k$  是所有  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$  形式的向量所构成的空间, 称为  $k$  维欧氏空间. 因此如果写成分量形式, 则

$$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t))$$

即每个分量  $f_i = f_i(t)$  都是  $t$  的函数.

$\mathbb{R}^k$  是一个度量空间, 其度量是

$$|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_k - y_k)^2}$$

根据这个度量, 可以定义向量值函数的连续性, 只要将连续函数的定义中的不等式  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  换成  $|\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)| < \varepsilon$  即可, 这里的“绝对值”是上面关于向量的度量. 显然, 向量值函数  $\vec{f}(t)$  连续的充分必要条件是它的每

一个分量  $f_i(t)$ ,  $1 \leq i \leq k$  连续.

我们也可用同样的方法定义  $\vec{f}(t)$  的导数, 即

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t + \Delta t) - \vec{f}(t)}{\Delta t} = \vec{f}'(t)$$

如果上式左边的极限存在. 不难看出, 向量值函数  $\vec{f}(t)$  可导的充要条件是它的每一个分量  $f_1(t), \dots, f_k(t)$  均可导, 而且

$$\vec{f}'(t) = (f_1'(t), \dots, f_k'(t)).$$

$\mathbb{R}^k$  中向量具有加法、数乘、内积, 特别对于  $k = 3$ , 还有我们熟悉的外积. 因此我们有下列性质

$$1^\circ (\vec{f}(t) \pm \vec{g}(t))' = \vec{f}'(t) \pm \vec{g}'(t).$$

$$2^\circ (\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t))' = \vec{f}'(t) \cdot \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \cdot \vec{g}'(t).$$

$$3^\circ \text{ 对于 } k = 3, \text{ 有 } (\vec{f}(t) \times \vec{g}(t))' = \vec{f}'(t) \times \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \times \vec{g}'(t).$$