§9.2 多变量函数的微分

9.2.1 多变量函数的偏导数

对于单变量函数来说，导数就是函数关于变量的变化率. 由于多元函数有多个变量，我们可以看看函数关于某个变量的变化率.

定义 1 设 $z = f(x, y)$ 在 $M_0(x_0, y_0)$ 的邻域中有定义，如果

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)}{h}$$

存在，则称它为 $z = f(x, y)$ 在 M_0 关于 x 的**偏微商（或偏导数）**. 记为 $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$ 或者 $f'_x(M_0)$ 或者 $f'_1(M_0)$. 类似地，如果极限

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)}{k}$$

存在，则称极限值为 $f(x, y)$ 在 M_0 关于 y 的偏微商，记为 $\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)$ 或者 $f'_y(M_0)$ 或者 $f'_2(M_0)$. 这里为了方便，我们用 $h = \Delta x$, $k = \Delta y$ 表示自变量的增量.

例 1 设 $z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad(x^2+y^2\neq 0)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

例 2 考察函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $M_0=(0,0)$ 的偏导数.

解 设 $h\neq 0, k\neq 0$, 则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0,\quad \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=0,$$

所以 $z'_x(0,0)=z'_y(0,0)=0.$

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

9.2.2 多变量函数的可微性

在单变量的情形, 函数在一点可导便可以推出在该点连续, 但是从上面第二个例子可知各个偏导数在一点存在不能保证函数在这点连续. 我们需要更强的条件.

仿照单变量函数可微的定义, 给出如下二元函数可微的定义:

定义 2 设 $z = f(x, y)$ 是定义在区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的二元函数. 对于 D 中一点 $M_0(x_0, y_0)$, 如果存在实数 A 和 B, 使得函数值的增量

$$\Delta z = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

能够表示成

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + o(|(h, k)|), \tag{9.1}$$

其中 $|(h, k)| = \sqrt{h^2 + k^2}$, 则称函数 f 在 M_0 处可微.

如果函数 f 在 D 中每一点都可微, 则称函数在 D 中可微,

当 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微时, 在上面的定义中令 $k=0$, $f(x,y_0)$ 作为 x 的函数在 x_0 可微, 因而在 x_0 可导, 即, $f(x,y)$ 关于 x 的偏导数存在, 且

$$f'_x(x_0,y_0)=A.$$

同理, $f(x_0,y)$ 作为 y 的函数在 y_0 可导, 即, $f(x,y)$ 关于 y 的偏导数存在, 且

$$f'_y(x_0,y_0)=B.$$

类似于单变量函数的微分, 称

$$df(x_0,y_0):=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy \tag{9.2}$$

为 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的微分.

从 (9.1), 立刻可以得到

定理 1 如果函数 $f(x,y)$ 一点 (x_0,y_0) 可微, 则它在这一点一定连续.

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微, 则 (9.1) 成立, 也可以写成

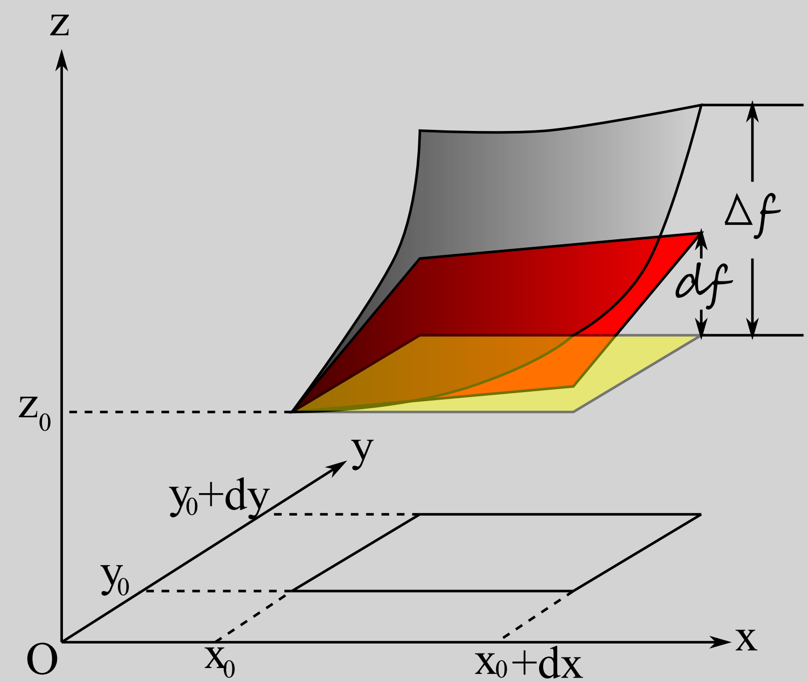
$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=A(x-x_0)+B(y-y_0)+o(\rho), \tag{9.3}$$

其中 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

(9.3) 表明函数在一点的增量与在这点的微分相差一个比 ρ 更高阶的无穷小量. 称平面

$$z-z_0=A(x-x_0)+B(y-y_0)$$

为 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的**切平面**, 其中 $z_0=f(x_0,y_0)$, $A=f'_x(x_0,y_0)$, $B=f'_y(x_0,y_0)$.



9.2.3 方向导数与梯度

平面上的单位向量 $\vec{e}=(u,v)$ $(u^2+v^2=1)$ 称为一个方向.

若极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tu,y_0+tv)-f(x_0,y_0)}{t}$$

存在, 则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 沿方向 $\vec{e}=(u,v)$ 的方向导数存在, 这个极限就称为在这点的方向导数, 记为

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x_0,y_0).$$

显然, $\frac{\partial f}{\partial x}$ 是沿方向 $(1,0)$ 的方向导数, $\frac{\partial f}{\partial y}$ 是沿方向 $(0,1)$ 是的方向导数.

前面已证明了, 若 f 在一点可微, 则它在这点的偏导数存在, 也就是在坐标轴方向的方向导数存在. 事实上, 有更强的结果.

定理 2 如果函数 $f(x,y)$ 在一点 (x_0,y_0) 可微, 则它在这一点沿任意方向 $\vec{e}=(u,v)$ 的方向导数存在, 且

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x_0,y_0)=u\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+v\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0). \tag{9.4}$$

证明 因为 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微, 所以 (9.3) 成立, 即

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=A(x-x_0)+B(y-y_0)+o(\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. 在此式中令 $x=x_0+tu$, $y=y_0+tv$ 可得

$$f(x_0+tu,y_0+tv)-f(x_0,y_0)=t\left(u\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+v\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)+o(t).$$

两边除以 t 在令 $t\to 0$ 即得所证.

注意 (9.4) 可以表示为

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\cdot\vec{e}.$$

定理 3 设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 中存在两个偏导数.

1° 如果偏导数 $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ 在 D 中有界, 则 f 在 D 内连续.

2° 如果偏导数 $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ 在 D 中连续, 则 f 在 D 中可微.

证明 设存在常数 M 使得 $|f'_x(x,y)| < M$, $|f'_y(x,y)| < M$, $(x,y) \in D$. 任取一点 $(x,y) \in D$, 因为是内点, 只要取增量 $h = \Delta x$, $k = \Delta y$ 足够小, 就一定能够使得 $(x+h, y+k)$ (当然还有 $(x+h,y)$) 落在 D 中以 (x,y) 为中心的圆盘内. 于是

$$f(x+h,y+k)-f(x,y) = \Big(f(x+h,y+k)-f(x+h,y)\Big)+\Big(f(x+h,y)-f(x,y)\Big)$$

右端第一个括号内只是第二个变量不同, 而第二个括号内只是第一个变量不同. 因此分别对第二个变量和第一个变量使用通常的微分中值定理.

$$f(x+h,y)-f(x,y) = hf'_x(x+\theta_1 h, y)$$
$$f(x+h,y+k)-f(x+h,y) = kf'_y(x+h, y+\theta_2 k)$$

其中 $0 < \theta_1,\ \theta_2 < 1$. 由此得

$$|f(x+h,y+k)-f(x,y)| = |kf'_y(x+h,y+\theta_2 k)+hf'_x(x+\theta_1 h,y)| \\ \leqslant M(|h|+|k|)$$

显然, 当 $(h,k)\to(0,0)$ 时 $f(x+h,y+k)-f(x,y)\to 0$, 即函数 f 在 (x,y) 处连续. 这就证明了 1°.

当 $f'_x(x,y),\ f'_y(x,y)$ 在 D 中连续时, 有

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)-hf'_x(x,y)-kf'_y(x,y) \\ = k[f'_y(x+h,y+\theta_2 k)-f'_y(x,y)]+h[f'_x(x+\theta_1 h,y)-f'_x(x,y)]$$

而当 $(h,k)\to(0,0)$ 时, 有

$$\frac{|k[f'_y(x+h,y+\theta_2 k)-f'_y(x,y)]+h[f'_x(x+\theta_1 h,y)-f'_x(x,y)]|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\leqslant |f'_y(x+h,y+\theta_2 k)-f'_y(x,y)|+|f'_x(x+\theta_1 h,y)-f'_x(x,y)|\to 0.$$

因此, 函数 f 可微. 证毕.

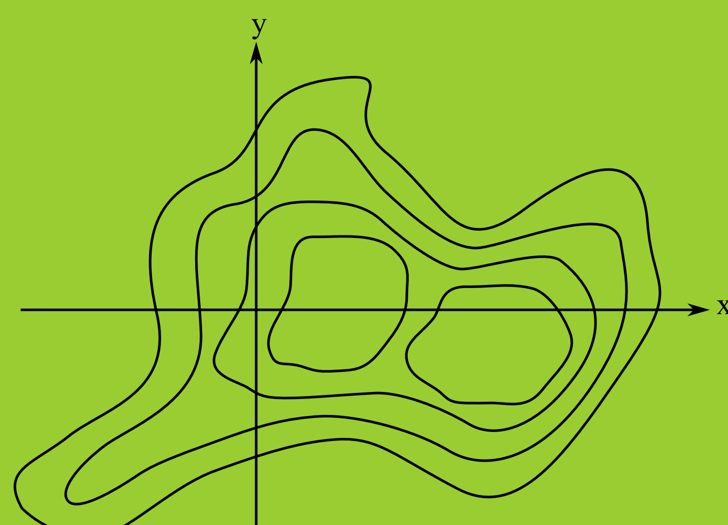
梯度 对于二元函数 $z=f(x,y)$, 记

$$\operatorname{grad} f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}.$$

这是一个由函数的偏导数所决定的向量, 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的梯度. 因此由定理2 可知函数沿任何方向的方向导数为该方向与函数的梯度的内积

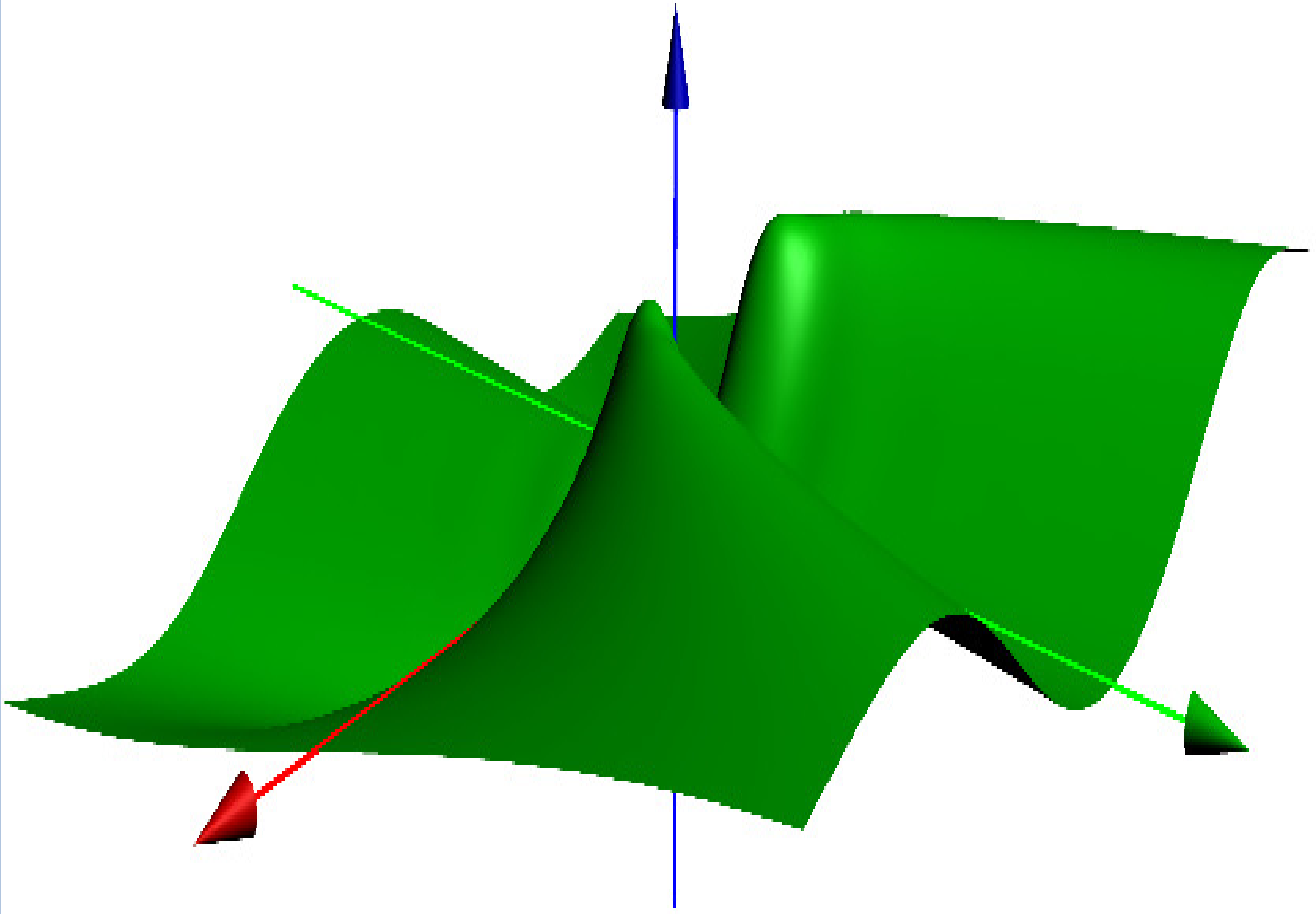
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}=\operatorname{grad} f\cdot\vec{e}=|\operatorname{grad} f|\cos\theta$$

其中 θ 是 $\operatorname{grad} f$ 和 $\vec{e}$ 的夹角. 也就是说, $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处沿方向 $\vec{e}$ 的方向导数等于梯度在方向 $\vec{e}$ 上的投影. 由此可见, 方向导数的大小取决于方向与梯度的夹角. 我们在日常生活中所见到的地图上的"等高线"或"等温线"显示, 线条越密集的地方, 高度(温度)的变化率越大, 山体(气温)也就越陡.



注意, 在一点处各方向上的方向导数存在, 不能说在这点连续. 例如:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y=(0,0).\end{cases}$$



高阶偏导数

设函数 $z = f(x, y)$ 在所定义的区域中每一点都有偏导数

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y},$$

其结果是二元函数. 如果它们仍然有偏导数, 则可以继续对它们求偏导, 就得到了**高阶偏微商**或**高阶偏导数**. 例如, 二元函数有四种可能的二阶偏微商

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

对不同自变量分别求导的高阶导数称为**混合偏导数**. 类似可以定义更高阶的偏微商. 高阶偏微商还有其它的记法, 例如 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 也可以记成 f''_{xy}, f''_{12} 等. 其它的可以类推.

例 3 函数 $z = x^3y^2 - 3xy^3 - xy + 1$ 的两个偏微商是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 - 3y^3 - y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y - 9xy^2 - x.$$

而四个二阶偏微商是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2y - 9y^2 - 1,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2y - 9y^2 - 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 - 18xy.$$

由这个例子可以看出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, 即二阶偏导数与求导的次序无关. 但这个结论在一般情况下不一定成立. 例如, 对函数

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

有 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1.$

定理 4 设 $z = f(x, y)$ 在区域 D 中有定义. 如果 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 都连续, 则两者相等, 即求导的次序可交换.

证明 微商是差商的极限, 所以我们采用的证明方法是用二阶偏差分的相等来导出二阶偏微商的相等. 任取 $M_0 = (x_0, y_0) \in D$ 及 $B(M_0, r) \subset D$. 取 $h = \Delta x \neq 0$, $k = \Delta y \neq 0$ 使 $(x_0 + h, y_0 + k) \in B(M_0, r)$. 命

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0),$$
$$\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y).$$

是两个分别对于 y 和 x 的一阶偏差分, 容易验证它们分别对 x 和 y 的偏差分等于 $f(x, y)$ 的二阶偏差分 (下式的右端)

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \psi(y_0 + k) - \psi(y_0)$$
$$= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0).$$

由一元函数的微分中值公式可知有

$$
\begin{aligned}
\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0) &= h\varphi'(x_0+\theta_1 h) \\
&= h(f'_x(x_0+\theta_1 h, y_0+k)-f'_x(x_0+\theta_1 h, y_0)) \\
&= hkf''_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\eta_1 k),
\end{aligned}
$$

其中 $0<\theta_1,\eta_1<1$. 类似有 $0<\theta_2,\eta_2<1$, 使

$$\psi(y_0+k)-\psi(y_0) = hkf''_{yx}(x_0+\theta_2 h, y_0+\eta_2 k),$$

故有

$$f''_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\eta_1 k) = f''_{yx}(x_0+\theta_2 h, y_0+\eta_2 k).$$

命 $h\to 0$, $k\to 0$, 由 $f''_{xy}(x,y)$ 和 $f''_{yx}(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的连续性即可证明定理中的结论. 证毕.

推而广之, 只要 $z=f(x,y)$ 的 n 阶偏导数都是连续的, 则它的 n 阶偏导数与求导的次序无关. 这个结论对于一般多元函数也是成立的.