

§3.6 Taylor 展开

3.6.1 Taylor 公式

§3.6 Taylor 展开

3.6.1 Taylor 公式

设函数 $f(x)$ 在 x_0 可微, 则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_1(x_0; x),$$

其中

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_1(x_0; x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0$$

§3.6 Taylor 展开

3.6.1 Taylor 公式

设函数 $f(x)$ 在 x_0 可微, 则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_1(x_0; x),$$

其中

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_1(x_0; x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0$$

因此, 在 x_0 的附近, 可以用一个关于 $x - x_0$ 的一次多项式

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

代替 $f(x)$, 由此产生的误差 (或称为余项) $R_1(x_0; x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 是比 $x - x_0$ 更高阶的无穷小量.

在 x_0 附近用一次多项式 $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 来替代 $f(x)$ 所产生的误差达不到要求时, 自然地可以考虑用二次多项式来替代 $f(x)$.

在 x_0 附近用一次多项式 $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 来替代 $f(x)$ 所产生的误差达不到要求时, 自然地可以考虑用二次多项式来替代 $f(x)$.

假设在 x_0 附近 $f(x)$ 有二阶导函数, 且存在常数 a_0, a_1, a_2 使得

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2), \quad (x \rightarrow x_0),$$

在 x_0 附近用一次多项式 $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 来替代 $f(x)$ 所产生的误差达不到要求时, 自然地可以考虑用二次多项式来替代 $f(x)$.

假设在 x_0 附近 $f(x)$ 有二阶导函数, 且存在常数 a_0, a_1, a_2 使得

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2), \quad (x \rightarrow x_0),$$

则令 $x \rightarrow x_0$ 得 $a_0 = f(x_0)$, 两边减去 $f(x_0)$ 后除以 $x - x_0$, 再令 $x \rightarrow x_0$ 得 $a_1 = f'(x_0)$. 然后有

在 x_0 附近用一次多项式 $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 来替代 $f(x)$ 所产生的误差达不到要求时, 自然地可以考虑用二次多项式来替代 $f(x)$.

假设在 x_0 附近 $f(x)$ 有二阶导函数, 且存在常数 a_0, a_1, a_2 使得

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2), \quad (x \rightarrow x_0),$$

则令 $x \rightarrow x_0$ 得 $a_0 = f(x_0)$, 两边减去 $f(x_0)$ 后除以 $x - x_0$, 再令 $x \rightarrow x_0$ 得 $a_1 = f'(x_0)$. 然后有

$$a_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2}$$

在 x_0 附近用一次多项式 $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 来替代 $f(x)$ 所产生的误差达不到要求时, 自然地可以考虑用二次多项式来替代 $f(x)$.

假设在 x_0 附近 $f(x)$ 有二阶导函数, 且存在常数 a_0, a_1, a_2 使得

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2), \quad (x \rightarrow x_0),$$

则令 $x \rightarrow x_0$ 得 $a_0 = f(x_0)$, 两边减去 $f(x_0)$ 后除以 $x - x_0$, 再令 $x \rightarrow x_0$ 得 $a_1 = f'(x_0)$. 然后有

$$a_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)}$$

在 x_0 附近用一次多项式 $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 来替代 $f(x)$ 所产生的误差达不到要求时, 自然地可以考虑用二次多项式来替代 $f(x)$.

假设在 x_0 附近 $f(x)$ 有二阶导函数, 且存在常数 a_0, a_1, a_2 使得

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2), \quad (x \rightarrow x_0),$$

则令 $x \rightarrow x_0$ 得 $a_0 = f(x_0)$, 两边减去 $f(x_0)$ 后除以 $x - x_0$, 再令 $x \rightarrow x_0$ 得 $a_1 = f'(x_0)$. 然后有

$$a_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)} = \frac{f''(x_0)}{2}.$$

在 x_0 附近用一次多项式 $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 来替代 $f(x)$ 所产生的误差达不到要求时, 自然地可以考虑用二次多项式来替代 $f(x)$.

假设在 x_0 附近 $f(x)$ 有二阶导函数, 且存在常数 a_0, a_1, a_2 使得

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2), \quad (x \rightarrow x_0),$$

则令 $x \rightarrow x_0$ 得 $a_0 = f(x_0)$, 两边减去 $f(x_0)$ 后除以 $x - x_0$, 再令 $x \rightarrow x_0$ 得 $a_1 = f'(x_0)$. 然后有

$$a_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)} = \frac{f''(x_0)}{2}.$$

也就是说在 x_0 附近用二次多项式来替代 $f(x)$, 使其误差要达到 $o((x - x_0)^2)$ 时, 此二次多项式只能是

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

定理 1 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内有直至 n 阶的导数. 如果 $P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$ 为一个关于 $x - x_0$ 的 n 次多项式, 而且

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n), \quad (x \rightarrow x_0), \quad (3.1)$$

则 $P_n(x)$ 的系数必须是

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

从而 $P_n(x) = T_n(x_0; x)$, 这里

$$T_n(x_0; x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

称之为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 次 Taylor 多项式.

证明 在 (3.1) 中令 $x \rightarrow x_0$, 即得 $a_0 = f(x_0)$.

证明 在 (3.1) 中令 $x \rightarrow x_0$, 即得 $a_0 = f(x_0)$.

假设已证得

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad m < n,$$

证明 在 (3.1) 中令 $x \rightarrow x_0$, 即得 $a_0 = f(x_0)$.

假设已证得

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad m < n,$$

根据 (3.1) 有,

$$\frac{f(x) - \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}{(x - x_0)^{m+1}} = a_{m+1} + o(1), \quad (x \rightarrow x_0).$$

证明 在 (3.1) 中令 $x \rightarrow x_0$, 即得 $a_0 = f(x_0)$.

假设已证得

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad m < n,$$

根据 (3.1) 有,

$$\frac{f(x) - \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}{(x - x_0)^{m+1}} = a_{m+1} + o(1), \quad (x \rightarrow x_0).$$

因而,

$$a_{m+1} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}{(x - x_0)^{m+1}}.$$

证明 在 (3.1) 中令 $x \rightarrow x_0$, 即得 $a_0 = f(x_0)$.

假设已证得

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad m < n,$$

根据 (3.1) 有,

$$\frac{f(x) - \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}{(x - x_0)^{m+1}} = a_{m+1} + o(1), \quad (x \rightarrow x_0).$$

因而,

$$a_{m+1} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}{(x - x_0)^{m+1}}.$$

对上面的极限用 m 次 L'Hospital 法则, 得到

$$a_{m+1} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(m)}(x) - f^{(m)}(x_0)}{(m+1)!(x - x_0)} = \frac{f^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!}.$$

于是根据归纳原理, 结论得证.

定理 2 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内有直至 n 阶的导数, $T_n(x_0; x)$ 是函数 f 在 x_0 处的 n 次 Taylor 多项式, 则当 $x \rightarrow x_0$ 时, 余项

$$R_n(x_0; x) = f(x) - T_n(x_0; x)$$

是 $(x - x_0)^n$ 的高阶无穷小量, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x_0; x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x_0; x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

换句话说, 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

称之为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的带 Peano 余项的 Taylor 公式.

证明 只要注意到 $f(x) - T_n(x_0; x)$ 及其直至 n 阶的导数当 $x \rightarrow x_0$ 时, 都是无穷小量这个事实, 然后在计算极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x_0; x)}{(x - x_0)^n}$$

的过程中连续使用 L'Hospital 法则, 即可完成证明.

证明 只要注意到 $f(x) - T_n(x_0; x)$ 及其直至 n 阶的导数当 $x \rightarrow x_0$ 时, 都是无穷小量这个事实, 然后在计算极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x_0; x)}{(x - x_0)^n}$$

的过程中连续使用 L'Hospital 法则, 即可完成证明.

特别, 如果函数 f 在 $x = 0$ 附近 n 阶导数, 定理 2 中取 $x_0 = 0$, 则 Taylor 公式为

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0$$

并称之为函数 $f(x)$ 的 n 阶具有 Peano 余项的 Maclaurin 公式 (或展开式).

定理 3 设函数 $f(x)$ 在区间 I 内有 $n+1$ 阶导数, 且 n 阶导数在 I 上连续. 设 x 和 x_0 是 I 中任意两个不同的数, $T_n(x_0; x)$ 是 f 在 x_0 处的 n 阶 Taylor 多项式. 则在 x 和 x_0 之间存在一个数 ξ , 使得

$$f(x) = T_n(x_0; x) + R_n$$

公式中的余项 R_n 具有下列形式

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

其中 R_n 称为 Lagrange 余项, 而上面这个公式称为带 Lagrange 余项的 Taylor 公式. 或者说 $f(x)$ 在 x 点处可以表示成

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

证明 考虑函数 $G(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ 和

$$R(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

显然有

$$G(x_0) = G'(x_0) = \cdots = G^{(n)}(x_0) = 0,$$

$$R(x_0) = R'(x_0) = \cdots = R^{(n)}(x_0) = 0,$$

反复应用 Cauchy 中值定理, 知在 x_0 与 x 之间存在 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi$ 使得

$$\frac{R(x)}{G(x)} = \frac{R(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{R'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \cdots = \frac{R^{(n+1)}(\xi)}{G^{(n+1)}(\xi)}.$$

于是

$$\frac{R(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

即,

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

因为 ξ 是介于 x 和 x_0 的一个数, 所以可表示成为

$$\xi = x_0 + \theta(x - x_0), \quad 0 < \theta < 1$$

因此 Lagrange 余项也表示成

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

推论 1 设函数 $f(x)$ 在区间 I 内有有界的 $n+1$ 阶导函数, 即

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M,$$

则在区间 I 上, $f(x)$ 与它的 Taylor 多项式之间的误差 (也就是余项) 是

$$|f(x) - T_n(x_0; x)| = |R_n| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}.$$

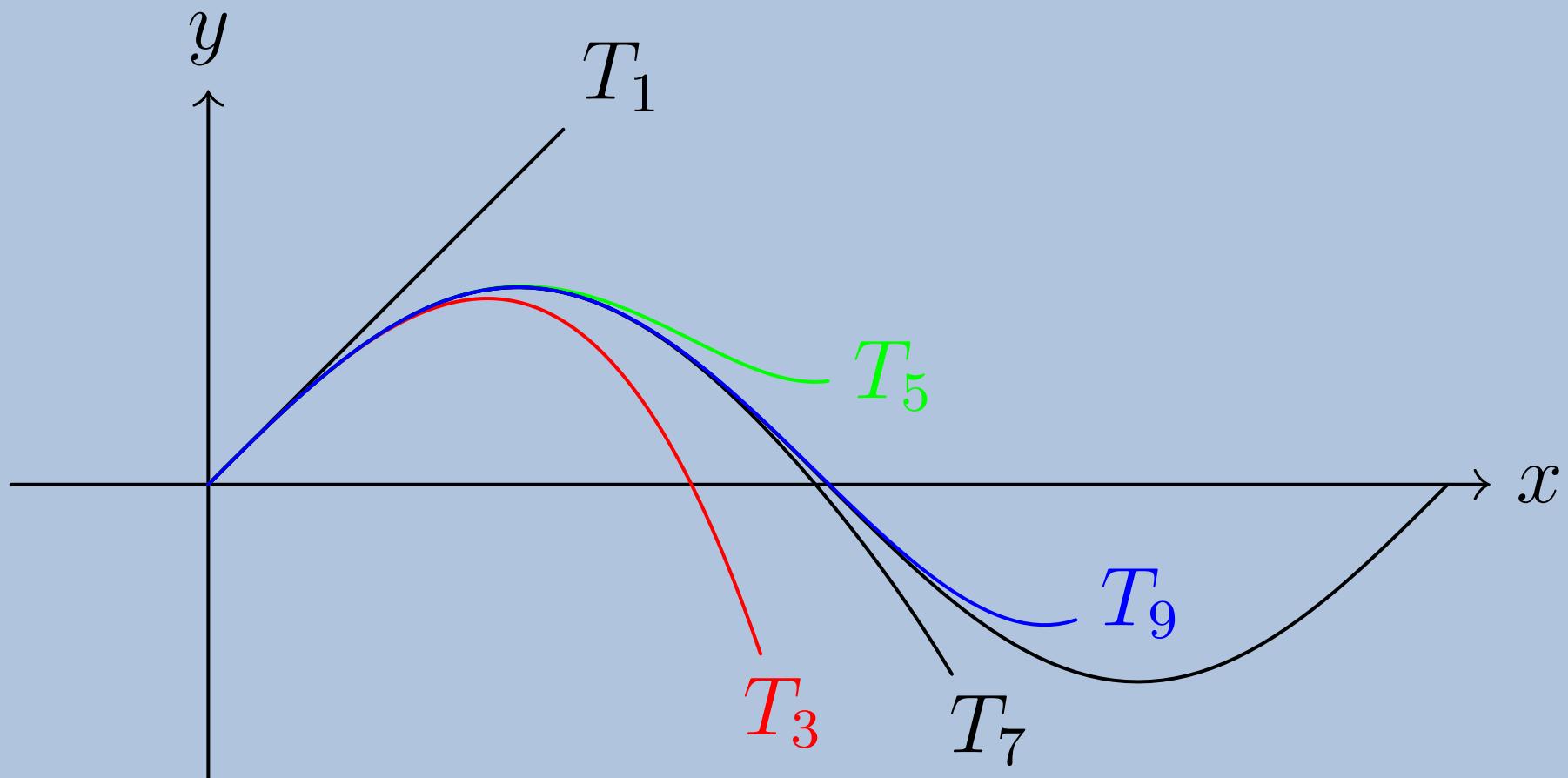
由此推论可知, 当函数 $f(x)$ 在区间 I 内有任意阶导数, 且各阶导函数构成的函数列 $\{f^{(n)}(x)\}$ 在 I 上一致有界, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x_0, x) = f(x),$$

即, $f(x)$ 的 Taylor 多项式在 I 中每点 x 都收敛于 $f(x)$.

注意, 在一般条件下上面的收敛公式并不成立.

下图展示了正弦函数 $y = \sin x$ 的泰勒展开式的前几项在 $(0, \pi)$ 对 $\sin x$ 的逼近情况：



3.6.2 初等函数的 Maclaurin 公式

3.6.2 初等函数的 Maclaurin 公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad (x \in \mathbb{R})$$

3.6.2 初等函数的 Maclaurin 公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad (x > -1)$$

3.6.2 初等函数的 Maclaurin 公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad (x > -1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} \cos \theta x, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

3.6.2 初等函数的 Maclaurin 公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad (x > -1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} \cos \theta x, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} + \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} \cos \theta x, \quad (x \in \mathbb{R})$$

3.6.2 初等函数的 Maclaurin 公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad (x > -1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} \cos \theta x, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} + \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} \cos \theta x, \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

3.6.2 初等函数的 Maclaurin 公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad (x > -1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} \cos \theta x, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} + \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} \cos \theta x, \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} x^{n+1} (1+\theta x)^{\alpha-n-1}, \quad (x > -1).$$

为了求出函数 $f(x)$ 的 Maclaurin 公式, 原则上应先求出函数在 0 点的导数值 $f^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. 但有时候函数的高阶导数值并不容易计算. 因此, 我们更多地是采取间接方式. 这是基于对 Maclaurin 公式基本含义的下述理解:

定理 1 的基本含义是, 如果函数 $f^{(n)}(0)$ 存在, 则无论用什么方法, 只要得到具体形式

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0$$

的展开式, 则他一定就是函数 f 的 Maclaurin 公式. 作为副产品, 我们也顺便计算出了 $f^{(n)}(0) = k!a_k$, 这样, 我们就能求出更多函数的 Maclaurin 公式.

例 1 求函数 e^{-x^4} 的 $4n$ 阶 Maclaurin 公式.

例 1 求函数 e^{-x^4} 的 $4n$ 阶 Maclaurin 公式.

解 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $-x^4 \rightarrow 0$, 利用 e^x 展开的结果:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

例 1 求函数 e^{-x^4} 的 $4n$ 阶 Maclaurin 公式.

解 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $-x^4 \rightarrow 0$, 利用 e^x 展开的结果:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

直接将 $-x^4$ 替代 e^x 展开式中的 x , 有

$$\begin{aligned} e^{-x^4} &= 1 + (-x^4) + \frac{(-x^4)^2}{2!} + \frac{(-x^4)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-x^4)^n}{n!} + o((-x^4)^n), \quad x \rightarrow 0 \\ &= 1 - x^4 + \frac{x^8}{2!} - \frac{x^{12}}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{4n}}{n!} + o(x^{4n}), \quad x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

例 1 求函数 e^{-x^4} 的 $4n$ 阶 Maclaurin 公式.

解 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $-x^4 \rightarrow 0$, 利用 e^x 展开的结果:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

直接将 $-x^4$ 替代 e^x 展开式中的 x , 有

$$\begin{aligned} e^{-x^4} &= 1 + (-x^4) + \frac{(-x^4)^2}{2!} + \frac{(-x^4)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-x^4)^n}{n!} + o((-x^4)^n), \quad x \rightarrow 0 \\ &= 1 - x^4 + \frac{x^8}{2!} - \frac{x^{12}}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{4n}}{n!} + o(x^{4n}), \quad x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

由此我们也得到了

$$(e^{-x^4})^{(4k)} \Big|_{x=0} = \frac{(-1)^k (4k)!}{k!}, \quad \text{在 } x=0 \text{ 的其他导数为零.}$$

这比直接计算函数 e^{-x^4} 要容易的多.

例 2 求 $\cos^2 x$ 的 $2n$ 阶的 Maclaurin 公式.

例 2 求 $\cos^2 x$ 的 $2n$ 阶的 Maclaurin 公式.

解 利用

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x,$$

以及 $\cos x$ 的 Maclaurin 公式:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + o(x^{2n-1})$$

例 2 求 $\cos^2 x$ 的 $2n$ 阶的 Maclaurin 公式.

解 利用

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x,$$

以及 $\cos x$ 的 Maclaurin 公式:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + o(x^{2n-1})$$

注意到当 $x \rightarrow 0$ 时, $2x \rightarrow 0$, 所以

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n-2}}{(2n-2)!} + o((2x)^{2n-1}) \right)$$

例 2 求 $\cos^2 x$ 的 $2n$ 阶的 Maclaurin 公式.

解 利用

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x,$$

以及 $\cos x$ 的 Maclaurin 公式：

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + o(x^{2n-1})$$

注意到当 $x \rightarrow 0$ 时, $2x \rightarrow 0$, 所以

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n-2}}{(2n-2)!} + o((2x)^{2n-1}) \right) \\ &= 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} 2^{2n-3} x^{2n-2} + o(x^{2n-1}), \quad x \rightarrow 0\end{aligned}$$

例 3 设 $f(x) = \frac{1}{x}$, 求 $f(x)$ 在 $x = 2$ 的 Taylor 公式.

例 3 设 $f(x) = \frac{1}{x}$, 求 $f(x)$ 在 $x = 2$ 的 Taylor 公式.

解 由 $\frac{1}{x} = \frac{1}{x-2+2} = \frac{1}{2} \left(\frac{x-2}{2} + 1 \right)^{-1}$. 根据 $(1+x)^{-1}$ 的 Maclaurin 公式:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}} x^{n+1},$$

用 $\frac{x-2}{2}$ 代替其中的 x , 就得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x-2}{2} + \cdots + (-1)^n \left(\frac{x-2}{2} \right)^n + 2R \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x-2}{2^2} + \cdots + (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} + R,\end{aligned}$$

这里

$$R = \frac{(-1)^{n+1}(x-2)^{n+1}}{2^{n+2}} \left[1 + \frac{\theta(x-2)}{2} \right]^{-n-2}, \quad (0 < \theta < 1).$$

3.6.3 Taylor 公式的应用

例 4 计算 e 的值, 使误差不超过 10^{-5} .

3.6.3 Taylor 公式的应用

例 4 计算 e 的值, 使误差不超过 10^{-5} .

解 在 e^x 的展开式中, 取 $x = 1$, 得

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} \quad 0 < \theta < 1.$$

由于

$$0 < \frac{e^\theta}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

所以, 只要确定 n , 使得

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}$$

即可, 易知, 要达到这样的精度, 只需取 $n = 9$, 这时

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!} = 2.718282$$

例 5 证明 e 是无理数. A set of small, light-blue rectangular buttons with black symbols, used for navigating through the presentation slides. 18/26

例 5 证明 e 是无理数.

证明 (反证法) 如果 e 是有理数, 设 $e = \frac{q}{p}$, 其中 p, q 是正整数. 取 $n > p$ 且 $n > 3$, 则

$$e = \frac{q}{p} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} \quad 0 < \theta < 1.$$

于是有

$$\frac{n!q}{p} = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + \frac{n!e^\theta}{(n+1)!}$$

由 n 的选取可知, 上式除右边最后一项外, 其余各项都是整数. 因此 $\frac{n!e^\theta}{(n+1)!}$ 也必是整数. 但实际上

$$0 < \frac{n!e^\theta}{(n+1)!} = \frac{e^\theta}{n+1} < \frac{3}{n+1} < \frac{3}{4} < 1$$

这是矛盾. 矛盾说明 e 不是有理数.

例 6 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^4} - \cos^2 x - x^2}{\sin^4 x}.$$

例 6 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^4} - \cos^2 x - x^2}{\sin^4 x}.$$

解 因为

$$e^{-x^4} = 1 - x^4 + o(x^4)$$

$$\cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4),$$

所以

$$\begin{aligned} e^{-x^4} - \cos^2 x - x^2 &= 1 - x^4 - (1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)) - x^2 \\ &= -\frac{4}{3}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^4} - \cos^2 x - x^2}{\sin^4 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{4}{3}.$$

例 7 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 区间上二阶可导, $f(0) = f(1) = 0$, 且存在常数 M 使得对任意的 x , 有 $|f''(x)| \leq M$. 求证: 在 $[0, 1]$ 区间上有 $|f(x)| \leq \frac{M}{8}$.

例 7 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 区间上二阶可导, $f(0) = f(1) = 0$, 且存在常数 M 使得对任意的 x , 有 $|f''(x)| \leq M$. 求证: 在 $[0, 1]$ 区间上有 $|f(x)| \leq \frac{M}{8}$.

证明 对任意的 $x \in (0, 1)$, 由 Taylor 公式, 得

$$f(0) = f(x) - f'(x)x + \frac{f''(\xi_1)}{2}x^2, \quad \xi_1 \in (0, x)$$

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2, \quad \xi_2 \in (x, 1)$$

将第一式乘以 $(1-x)$, 第二式乘以 x , 然后相加得

$$|f(x)| = \left| \frac{f''(\xi_1)}{2}x^2(1-x) + \frac{f''(\xi_2)}{2}x(1-x)^2 \right| \leq \frac{M}{2}x(1-x) \leq \frac{M}{8}.$$

例 8 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上无穷可微, 且

$$|f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)| \leq n!|x|, \quad x \in (-1, 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

求证: $f(x) \equiv g(x)$.

例 8 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上无穷可微, 且

$$|f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)| \leq n!|x|, \quad x \in (-1, 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

求证: $f(x) \equiv g(x)$.

证明 令 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则

$$h^{(n)}(0) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

根据带 Lagrange 余项的 Taylor 公式, 有

$$h(x) = \frac{h^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间. 因此

$$|h(x)| \leq |\xi x^{n+1}| \leq |x|^{n+2}.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得 $h(x) = 0$. 所以 $f(x) = g(x)$.

例 9 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有二阶导数, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$. 求证:
存在 $c \in (a, b)$ 使得

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

例 9 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有二阶导数, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$. 求证: 存在 $c \in (a, b)$ 使得

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

证明 将 $f(x)$ 分别在 a, b 展开, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2, \quad \xi_1 \in (a, x), \\ f(x) &= f(b) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2, \quad \xi_2 \in (x, b). \end{aligned}$$

将此二式相减并取 $x = \frac{a+b}{2}$, 得到

$$f(b) - f(a) = \frac{f''(\xi_1) - f''(\xi_2)}{2} \cdot \frac{(b-a)^2}{4}.$$

取 c 是 ξ_1 与 ξ_2 之一, 使得 $|f''(c)| \geq |f''(\xi_i)|$, $i = 1, 2$. 于是结论得证.

例 10 设函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上二次可导, 并且 $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| < +\infty$,
 $k = 0, 1, 2$. 求证: $M_1^2 \leq 2M_0M_2$.

例 10 设函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上二次可导, 并且 $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| < +\infty$,
 $k = 0, 1, 2$. 求证: $M_1^2 \leq 2M_0M_2$.

证明 对于任意 $x \in \mathbb{R}$ 及 $h > 0$, 存在 $\xi \in (x, x+h)$ 和 $\eta \in (x-h, x)$ 使得

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(\xi)h^2, \\ f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(\eta)h^2. \end{aligned}$$

两式相减得到

$$2f'(x)h = f(x+h) - f(x-h) + \frac{1}{2}f''(\eta)h^2 - \frac{1}{2}f''(\xi)h^2.$$

因而 $2|f'(x)|h \leq 2M_0 + M_2h^2$, $h \in \mathbb{R}$. 此式蕴含

$$2M_1h \leq 2M_0 + M_2h^2, h \in \mathbb{R}.$$

于是有 $M_1^2 \leq 2M_0M_2$.

例 11 设 $f(x)$ 在 $[0, \infty)$ 上有 $n+1$ 阶连续导函数, 且 $f(0) \geq 0, f'(0) \geq 0, \dots, f^{(n)}(0) \geq 0$. 又对任意 $x > 0$, 有 $f(x) \leq f^{(n+1)}(x)$. 求证: $f(x) \geq 0$.

例 11 设 $f(x)$ 在 $[0, \infty)$ 上有 $n+1$ 阶连续导函数, 且 $f(0) \geq 0, f'(0) \geq 0, \dots, f^{(n)}(0) \geq 0$. 又对任意 $x > 0$, 有 $f(x) \leq f^{(n+1)}(x)$. 求证: $f(x) \geq 0$.

证明 对于 $x \in (0, 1]$, 由 Taylor 公式存在 $x_1 \in (0, 1)$ 使

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

根据条件得

$$f(x) \geq f(x_1) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

同样将 $f(x_1)$ 展开, 可得 $x_2 \in (0, x_1)$ 使得

$$f(x_1) \geq f(x_2) \frac{x_1^{n+1}}{(n+1)!}.$$

继续这个过程, 可得 $(0, x)$ 中严格递减序列 $\{x_k\}$ 使得

$$f(x_k) \geq f(x_{k+1}) \frac{x_k^{n+1}}{(n+1)!}.$$

于是

$$f(x) \geq f(x_k) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{x_1^{n+1}}{(n+1)!} \cdots \frac{x_{k+1}^{n+1}}{(n+1)!}$$

因为 x 及 x_k 都在 $[0, 1]$ 中, 上式右端当 $k \rightarrow +\infty$ 时趋于 0, 于是对于 $x \in [0, 1]$ 有 $f(x) \geq 0$. 由此

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(0) + f''(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}x^n \\ &\geq \frac{f(\xi)}{n!}x^n \geq 0, \end{aligned}$$

其中 $\xi \in (0, x)$. 归纳可证 $f^{(k)}(x) \geq 0$, $x \in [0, 1]$, $k = 1, 2, \dots, n+1$. 对函数 $g(x) = f(x+1)$ 重复以上过程可知 $f(x) \geq 0$, $x \in [1, 2]$. 用归纳法可证对任意自然数 m , $f(x)$ 在 $[m, m+1]$ 上非负. 于是结论得证.

例 12 求证当 $a > 1$ 时不存在可微函数 $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ 满足方程

$$f'(x) = f(ax), \quad x > 0. \quad (1)$$

例 12 求证当 $a > 1$ 时不存在可微函数 $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ 满足方程

$$f'(x) = f(ax), \quad x > 0. \quad (1)$$

证明: 若 f 是满足条件的解, 则由 (1) 知 f 无穷可微且 f 及它的各阶导数都是严格递增的. 若 $a > 1$, 则对于 $x > 0$ 存在 $\xi \in (x, ax)$ 使得

$$\begin{aligned} f(ax) - f(x) &= f'(\xi)(a-1)x \\ &= f(a\xi)(a-1)x \\ &> f(ax)(a-1)x. \end{aligned}$$

但这对于 $x > \frac{1}{a-1}$ 是不能成立的. 这就说明当 $a > 1$ 时无满足条件的解.