

# 组合学进阶笔记

黄盛唐, PB22000196, Peanut Tang

今天是跨年夜, 要做一些有意义的事情, 比如  
学习组合数学。 ————马杰

# 目录

<b>1</b>	<b>组合零点定理</b>	<b>3</b>
1.1	定理内容与证明	3
1.2	积和式引理	4
1.3	Cauchy-Davenport 定理	5
1.4	Hamming 立方体覆盖问题	6
1.5	Chevalley-Warning 定理	6
1.6	零和子集	7
<b>2</b>	<b>谱图论</b>	<b>8</b>
2.1	基础知识	8
2.2	Hoffman 界和 Kneser 图	9
2.3	Moore 界与笼	13
2.4	Cauchy 交错定理	14
<b>3</b>	<b>Lovász 局部引理</b>	<b>16</b>
3.1	定理内容与证明	16
3.2	一致超图的二染色	18
3.3	Ramsey 数的下界	18
3.4	独立横切集	20
3.5	有向图的圈长	21
<b>4</b>	<b>Szemerédi 正则引理</b>	<b>22</b>
4.1	定理内容与证明	22
4.2	三角形删除引理	25
4.3	图删除引理	27
4.4	Roth 定理	28

# 1 组合零点定理

## 1.1 定理内容与证明

我们先回顾一下 Hilbert 零点定理，这是代数几何中的基本定理：

**Theorem 1.1** (Hilbert Nullstellensatz). 设  $\mathbb{F}$  是一个代数闭域，而  $f, g_1, g_2, \dots, g_m \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$  是域上的  $n$  元多项式。并且  $f$  满足，在  $g_1, \dots, g_m$  的公共零点亦是  $f$  的零点。

那么存在整数  $k$  域  $m$  个多项式  $h_1, h_2, \dots, h_m \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ ，有：

$$f^k = \sum_{i=1}^m h_i g_i$$

再来就是组合零点定理：

**Theorem 1.2** (Combinatorial Nullstellensatz). 设  $\mathbb{F}$  是一个域（不需要是代数闭的）， $f \in \mathbb{F}(x_1, \dots, x_n)$  同样是  $\mathbb{F}$  上的  $n$  元多项式。我们还有  $n$  个  $\mathbb{F}$  的子集  $S_1, \dots, S_n$ 。

若每个  $(x_1, \dots, x_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$  都是  $f$  的零点，则存在多项式  $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ ，使得：

$$f = \sum_{i=1}^n h_i \prod_{s \in S_i} (x_i - s)$$

其中  $h_i$  的系数至多是  $\deg(f) - |S_i|$ 。

**Remark.** 与 Hilbert 零点定理对比，少了代数闭限制。 $g_i$  实际上是取特殊的多项式  $\prod_{s \in S_i} (x_i - s)$ 。同时最后可以被线性表示出来的不需要是  $f$  的某一次幂，而是  $f$  本身。

为证明组合零点定理，我们先给出如下引理：

**Lemma 1.3.** 设  $p \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$  为一  $n$  元多项式，并且其关于  $x_i$  的度数是  $t_i$ 。

那如果存在  $n$  个子集  $S_1, S_2, \dots, S_n$ ，有  $|S_i| \geq t_i + 1, \forall i \in [n]$ ，并且  $S_1 \times \dots \times S_n$  中的每个点都是  $p$  的零点，那么  $p \equiv 0$  只能是 0 多项式。

**Proof.** 我们对变元个数  $n$  做归纳。

**Base Case:** 对于  $n = 1$  情况，近世代数中已经证明。

**Inductive Step:** 假设当  $n < n_0$  的时候都对，则当  $n = n_0$  时。我们将  $x_n$  单独拆分出来：

$$p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{t_n} q_i(x_1, \dots, x_{n-1}) x_n^i$$

对于每个  $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in S_1 \times \dots \times S_{n-1}$ ，我们令  $x_i = a_i, \forall i \in [n-1]$ ，就可以得到一个关于  $x_n$  的一元多项式：

$$\varphi(x_n) \triangleq p(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n) = \sum_{i=1}^{t_n} q_i(a_1, \dots, a_{n-1}) x_n^i$$

由条件, 有  $\forall a_n \in S_n, \varphi(a_n) = p(a_1, \dots, a_n) = 0$ . 由  $n = 1$  的 case, 我们得到  $\varphi(x_n) \equiv 0$ , 于是  $q_i(a_1, \dots, a_{n-1}) = 0$ .

又因为  $(a_1, \dots, a_{n-1})$  在  $S_1 \times \dots \times S_{n-1}$  中任取, 所以再有  $n = n_0 - 1$  的 case, 有  $q_i(x_1, \dots, x_{n-1}) \equiv 0, \forall i \in [t_n]$ , 这就得出了  $p \equiv 0$ .  $\square$

**Proof of Theorem 1.2. Idea:** 为了引用 Lemma 1.3, 我们想将  $f$  剪掉一些  $h_i g_i$ , 使得其变成另一个多项式  $\tilde{f}$ , 在  $S_1 \times \dots \times S_n$  上也取 0, 并且其关于  $x_i$  的度数不超过  $|S_i| - 1$ .

令  $t_i = |S_i| - 1$ , 令  $g_i(x_i) = \prod_{s \in S_i} (x_i - s) = x_i^{t_i+1} + \sum_{j=0}^{t_i} g_{ij} x_i^j$ . 注意到  $g_i(x_i) = 0, \forall x_i \in S_i$ ,

故  $x_i^{t_i+1} = -\sum_{j=0}^{t_i} g_{ij} x_i^j, \forall x_i \in S_i$ .

那么我们一直将  $f$  中的  $x_i^t$  ( $t \geq t_i + 1$ ) 替换为  $x_i^{t-t_i-1} \cdot \sum_{j=0}^{t_i} g_{ij} x_i^j$ . 最后会得到一个  $\tilde{f}$  满足我们上面的 idea. 并且这个  $\tilde{f}$  就是把  $f$  减去若干  $h_i g_i$  得到的, 因为:

$$x_i^t - x_i^{t-t_i-1} \cdot \sum_{j=0}^{t_i} g_{ij} x_i^j = x_i^{t-t_i-1} g_i(x_i)$$

$\square$

在组合中, 用的通常是组合零点定理的一个推论:

**Corollary 1.4.** 设  $f \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$  为一  $n$  元多项式, 其度数为  $\sum_{i=1}^n t_i$ . 如果  $f$  的  $\prod_{i=1}^n x_i^{t_i}$  项的系数非零, 则对于任何  $S_1, \dots, S_n$  满足  $|S_i| \geq t_i + 1, \forall i \in [n]$ , 都存在  $(a_1, \dots, a_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$  使得  $f(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ .

**Proof.** 我们反证, 假设存在这样的  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , 使得  $S_1 \times \dots \times S_n$  中的所有点都是  $f$  的零点. 那么由组合零点定理, 存在  $n$  个多项式  $h_1, \dots, h_n$ , 其中第  $i$  的次数不超过  $\deg(f) - \deg(g_i)$ , 有:

$$f = \sum_{i=1}^n h_i g_i$$

但问题是, 在每个  $h_i g_i$  中, 必须含有  $x_i^{t_i+1}$  (因为  $g_i$  含有  $x_i^{t_i+1}$ ). 而  $\prod_{i=1}^n x_i^{t_i}$  系数非 0, 且有最大的总次数, 这显然是不可能的.  $\square$

**Remark.** Lemma 1.3 和 Corollary 1.4 都可以看作是“代数基本定理”的推广. 还有与它们类似的一个定理——Schwartz-Zippel Lemma。

## 1.2 积和式引理

我们来看看组合零点定理的一些运用。

**Definition 1.5** (Permanent). 对于一个方阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , 定义其积和式为:

$$\text{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

大概可以被看作去掉符号的行列式。

**Theorem 1.6.** 设  $b \in \mathbb{F}^n$  为一向量,  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  为一方阵, 而  $S_1, S_2, \dots, S_m \subset \mathbb{F}$  并且  $|S_i| \geq 2$ 。

如果  $\text{per}(A) \neq 0$ , 则存在一个向量  $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$  满足  $x_i \in S_i, \forall i \in [n]$ , 并且有  $Ax$  和  $b$  在每个坐标上都不相等。

**Proof.** 考虑多项式:

$$f = \prod_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i \right)$$

可以发现  $\deg(f) = n$ , 并且  $[x_1x_2 \cdots x_n]f = \text{per}(A) \neq 0$ , 于是该多项式在  $S_1 \times \cdots \times S_n$  中有非零点, 这个非零点便满足要求。  $\square$

**Corollary 1.7.** 取  $S_i = \{0, 1\}, \forall i \in [n]$ , 那么可以导出:  $\forall b \in \mathbb{F}^n$  与  $\forall A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , 如果  $\text{per}(A) \neq 0$ , 则存在  $A$  的一些列, 加起来和  $b$  在每个坐标上都不同。

### 1.3 Cauchy-Davenport 定理

我们下面再来看组合零点定理再加性组合中的应用, 下面这个定理是加性组合中的基本定理:

**Theorem 1.8** (Cauchy-Davenport Theorem). 设  $p$  为一素数, 而  $A, B \subseteq \mathbb{Z}_p$  是模  $p$  加法群的子集, 且它们都非空。那么:

$$|A + B| \geq \min\{p, |A| + |B| - 1\}, \quad A + B \triangleq \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

**Proof.** 若  $p \leq |A| + |B| - 1$ , 我们可以发现  $A + B = \mathbb{Z}_p$ , 这里略去细节。

若  $p > |A| + |B| - 1$ , 我们使用反证法, 假设  $|A + B| \leq |A| + |B| - 2 < p$ 。那么存在一个  $A + B \subseteq C \subseteq \mathbb{Z}_p$ , 其大小为  $|C| = |A| + |B| - 2$ 。

考虑多项式:

$$g(x, y) = \prod_{c \in C} (x + y - c) \in \mathbb{F}_p$$

那么根据  $A + B \subseteq C$  就有:  $\forall (x, y) \in A \times B, g(x, y) = 0$ 。

但是, 设  $t_1 = |A| - 1, t_2 = |B| - 1$ , 发现  $g(x, y)$  的  $x^{t_1}y^{t_2}$  项系数为:

$$[x^{t_1}y^{t_2}]g = \binom{|A| + |B| - 2}{t_1} \neq 0 \pmod{p}$$

最后的不等号是因为  $|A| + |B| - 2 < p$ 。那么  $g(x, y)$  的有一个最高次项系数不是 0。于是由组合零点定理可知  $g(x, y)$  在  $A \times B$  中有一个非零点, 这就矛盾了。  $\square$

## 1.4 Hamming 立方体覆盖问题

下面考虑一个 Hamming 立方体上的问题。一个  $n$  维的 Hamming 立方体就是  $\{0, 1\}^n$ 。我们想用一些超平面  $H = \{x \mid a^\top x = b\}$  ( $a \neq \mathbf{0}$ ) 覆盖该立方体的所有顶点，最少需要用多少个？

这个问题是容易的，我们取两个超平面  $\{x \mid x_i = 0/1\}$  即可。但如果我们想要立方体中恰好有一个点没有被覆盖呢？不妨设这个点就是  $\mathbf{0}$ ，有一个解是按照这些点的支撑集大小分类： $\{x \mid x_1 + \dots + x_n = k\}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )。

可以做到更好吗？下面这个定理说这就是最好的结果：

**Theorem 1.9.** 设有  $m$  个超平面  $H_i = \{x \mid a_i^\top x = b_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  恰好覆盖了  $n$  维 Hamming 立方体除原点外的点，则一定有  $m \geq n$ 。

*Proof.* 反证，假设  $m < n$ 。考虑多项式：

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^m (b_i - a_i^\top x) - \prod_{i=1}^m b_i \cdot \prod_{i=1}^n (1 - x_i)$$

那么若  $\mathbf{0} \neq x \in \{0, 1\}^n$ ，因为  $x$  中至少一个坐标是 1，故后面一项是 0，而前面的项是被覆盖的，故  $f(x) = 0$ ；而当  $x = \mathbf{0}$  算一下也发现  $f(x) = 0$ 。也即  $\{0, 1\}^n$  都是  $f(x_1, \dots, x_n)$  的零点。

又可得  $f$  的一个最高次项  $x_1 \cdots x_n$  的系数为  $\pm 1$ （因为  $m < n$ ，故是后面项决定最高次）。那么取  $S_i = \{0, 1\}$ ,  $\forall i \in [n]$ ，由组合零点定理就导出了矛盾。  $\square$

**Remark.** 对于该定理证明时多项式的选择，我们的考量诸多。一个是在  $\{0, 1\}^n$  上都是 0。前面项容易构造出对于除  $\mathbf{0}$  之外为 0。而为了使得  $\mathbf{0}$  也是 0，我们增加了后面项。同时后面项又决定了最高次，且其系数也是好算的。

## 1.5 Chevalley-Warning 定理

**Theorem 1.10** (Chevalley-Warning Theorem). 设  $p$  为一素数，而  $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{F}_p[x_1, \dots, x_n]$  是  $\mathbb{F}_p$  上的  $n$  元多项式。若  $\sum_{i=1}^m \deg(f_i) < n$ ，并且它们有一个公共零点，则它们还会有另一公共零点。

*Proof.* 记公共零点为  $(c_1, \dots, c_n)$ ，并反证，假设公共零点只有这一个。考虑多项式：

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^m (1 - f_i^{p-1}(x_1, \dots, x_n)) - \left( \prod_{i=1}^n \prod_{c \neq c_i} (c_i - c) \right)^{-1} \prod_{i=1}^n \prod_{c \neq c_i} (x_i - c)$$

这一构造还是  $f = F_1 - \delta F_2$  的范式。由费马小定理，只要  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ ，就有  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ，于是在非公共零点处，前后两项都是 0。而在  $(c_1, \dots, c_n)$  处，第一项为 1，而第二项又将其减掉。这样我们就发现该多项式实际上恒等于 0。

再来，又由条件  $\sum_{i=1}^m \deg(f_i) < n$ ，可以发现前一项的次数为  $(p-1) \sum_{i=1}^m \deg(f_i)$ ，严格小于后一项的次数为  $n(p-1)$ 。所以我们发现  $\deg(f) = n(p-1)$ ，并且  $[x_1^{p-1} \cdots x_n^{p-1}]f \neq 0$ 。故由组合零点定理知  $f$  在  $\mathbb{F}_p^n$  上有非零点，矛盾了。  $\square$

## 1.6 零和子集

作为本章的终结，我们使用之前证明的加性组合中的定理来证明一个加性组合中的一个结论：

**Theorem 1.11.** 设  $p$  是素数，则任意长为  $2p - 1$  的整数序列  $(a_1, \dots, a_{2p-1})$  中可以找出一长为  $p$  的子列，子列中元素之和是  $p$  的倍数。

我们给出这一定理的两种证明，分别使用了之前证明的 Cauchy-Davenport 定理和 Chevalley-Warning 定理。

**Proof 1.** 首先，我们可以将每个  $a_i$  减去若干倍的  $p$ ，使得有  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{2p-1}$ 。不妨假设没有连续  $p$  个相同的元素，否则这  $p$  个元素即符合条件。

令  $A_i = \{a_i, a_{i+p-1}\}$ ,  $\forall i \in [p-1]$ ，由之前的假设，有  $a_i \neq a_{i+p-1}$ ，所以每个  $A_i$  都是二元集。我们反复运用 Cauchy-Davenport 定理可得：

$$|A_1 + \dots + A_{p-1}| \geq \min\{p, |A_1| + \dots + |A_{p-1}| - (p-2)\} = p$$

这说明  $A_1 + \dots + A_{p-1} = \mathbb{Z}_p$ ，于是有  $a_{2p-1} \in A_1 + \dots + A_{p-1}$ ，即存在  $k_i \in \{i, i+p-1\}$ ,  $\forall i \in [p-1]$ ，使得  $\sum_{i=1}^{p-1} a_{k_i} = a_{2p-1}$ ，那么取子列  $\{k_1, \dots, k_{p-1}, 2p-1\}$  即得。  $\square$

**Proof 2.** 我们使用零一变量  $y_i$  表示是否选择  $a_i$ ，由命题叙述可知其要满足两个条件  $\sum_{i=1}^{2p-1} y_i = p$ ,  $\sum_{i=1}^{2p-1} y_i a_i \equiv 0 \pmod{p}$ 。为此我们考虑如下两个多项式（实际上下面的  $x_i^{p-1}$  相当于这里的  $y_i$ ，由费马小定理）：

$$f_1(x_1, \dots, x_{2p-1}) = \sum_{i=1}^{2p-1} x_i^{p-1}, \quad f_2(x_1, \dots, x_{2p-1}) = \sum_{i=1}^{2p-1} a_i x_i^{p-1} - 1 \in \mathbb{F}_p[x_1, \dots, x_{2p-1}]$$

则  $\deg(f_1) + \deg(f_2) = 2p - 2 < 2p - 1$ ，并且  $f_1(\mathbf{0}) = f_2(\mathbf{0}) = 0$ 。故由 Chevalley-Warning 定理， $f_1, f_2$  还有另一公共零点  $(x_1, \dots, x_{2p-1}) \neq \mathbf{0}$ 。可以发现这一公共零点的支撑集即满足要求（配合费马小定理）。  $\square$

## 2 谱图论

### 2.1 基础知识

**Definition 2.1** (邻接矩阵). 设  $G = (V, E)$  是一个图, 将其顶点编号为  $1 \sim n$ , 则图的邻接矩阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  定义为:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \{i, j\} \in E \\ 0 & \{i, j\} \notin E \end{cases}$$

对于无向图, 该矩阵是对称的, 有  $n$  个实特征值  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ , 这些特征值被称为图的谱。

我们有如下基本事实:

**Proposition 2.2.** 有:

- (1) 完全图  $K_n$  的邻接矩阵为  $J_n - I_n$ , 其中  $J_n$  为  $n \times n$  的全一矩阵, 而图谱为  $\{(n-1)^{(1)}, (-1)^{(n-1)}\}$ 。
- (2) 完全二部图  $K_{m,n}$  的邻接矩阵为  $\begin{pmatrix} O & J_{m \times n} \\ J_{n \times m} & O \end{pmatrix}$ , 而图谱为  $\{\sqrt{mn}^{(1)}, 0^{(m+n-2)}, -\sqrt{mn}^{(1)}\}$
- (3)  $d$ -regular 图有特征值  $d$ , 并且  $d$  对应的一个特征向量为全一向量  $\mathbf{1}$ 。
- (4)  $\bar{d} \leq \lambda_1(G) \leq \Delta(G)$ , 特别的,  $d$ -regular 图的最大特征值为  $d$ 。
- (5)  $\lambda_1(G) \geq 0$ , 并且存在一个对应的特征向量, 其各分量均非负。
- (6) 若  $G$  是联通的, 则  $\lambda_1(G)$  的重数为 1, 并且存在一个对应特征向量, 其各分量均严格正。
- (7) 设  $H$  是  $G$  的一个子图, 则  $\lambda_1(H) \leq \lambda_1(G)$ 。
- (8)  $\lambda_1(G) \geq \sqrt{\Delta(G)}$ 。

**Proof.** (1)~(3) 都是计算上的工作, 这里略去。我们先后证明 (4)~(8)。

(4): 对于上界, 设  $\lambda_1(G)$  对应的特征向量为  $v = (v_1, \dots, v_n)^\top$ , 令  $k = \max_{1 \leq i \leq n} v_i$ , 那么  $\forall i \in [n]$ :

$$\lambda_1(G)v_i = (Av)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}v_j \leq k \sum_{j=1}^n a_{ij} = k \cdot d(i) \Rightarrow \lambda_1(G) \leq \Delta(G)$$

对于下界, 由 Rayleigh 定理, 可得:

$$\lambda_1(G) = \max_{v \neq \mathbf{0}} \frac{v^\top Av}{v^\top v} \geq \frac{\mathbf{1}^\top A \mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top \mathbf{1}} = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} = \frac{2|E|}{|V|} = \bar{d}$$

(5), (6): 这两个定理实际上是矩阵论中 Perron-Frobenius 定理的推论, 可以参见[这个链接](#)。

(7): 取  $v$  是  $\lambda_1(H)$  对应的非负单位特征向量, 则由 Reyleigh 定理:

$$\lambda_1(G) = \max_{\|x\|=1} x^\top Ax \geq v^\top Av = 2 \sum_{(i,j) \in E(H)} = \lambda_1(H)$$

(8): 取  $G$  的一个子图  $H$  为  $K_{1,\Delta(G)}$ , 则由 (2) 和 (7) 可得:  $\sqrt{\Delta(G)} = \lambda_1(H) \leq \lambda_1(G)$ .  $\square$

**Theorem 2.3.** 设  $\text{diam}(G)$  为图  $G$  的直径, 则  $\text{diam}(G)$  严格小于  $G$  的不同特征值个数  $k$ .

**Proof.** 我们只需要证明, 对于任何  $p \leq \text{diam}(G)$ ,  $I, A, \dots, A^p$  都是线性无关的。为此我们取  $u, v$  使得  $d(u, v) = p$ , 则  $(A^p)_{uv} = 1$  而  $(A^j)_{uv} = 0, \forall j = 0, \dots, p-1$ , 所以这些矩阵线性无关。  $\square$

## 2.2 Hoffman 界和 Kneser 图

**Theorem 2.4** (Hoffman's Bound). 设  $G$  是一个  $n$  个顶点的  $d$ -正则图, 并且其有特征值  $d = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ , 那么:

$$\alpha(G) \leq \frac{-n\lambda_n}{\lambda_1 - \lambda_n}$$

**Proof.** 设这些特征值对应的特征向量为  $v_1, \dots, v_n$ , 它们是  $\mathbb{R}^n$  的一组规范正交基, 其中  $v_1 = \mathbf{1}/\sqrt{n}$ .

设  $I$  为  $G$  的一个独立集, 其示性向量可被线性表示为  $\mathbb{1}_I = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ . 那么:

$$|I| = \|\mathbb{1}_I\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n a_i v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$$

设  $A$  是  $G$  的邻接矩阵, 由  $I$  是独立集 (内部不能有边) 可得:

$$\mathbb{1}_I^\top A \mathbb{1}_I = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \mathbb{1}_{I,i} \mathbb{1}_{I,j} = 0$$

故有:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{1}_I^\top A \mathbb{1}_I = \left( \sum_{i=1}^n a_i v_i \right)^\top A \left( \sum_{i=1}^n a_i v_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^2 \\ &\geq \lambda_1 a_1^2 + \lambda_n \sum_{i=2}^n a_i^2 = \lambda_1 \frac{|I|^2}{n} + \lambda_n \left( |I| - \frac{|I|^2}{n} \right) \end{aligned}$$

上面的推导用到了  $|I| = \sum_{i=1}^n a_i$  和  $\mathbb{1}_I^\top v_1 = |I|/\sqrt{n}$ .

得到:  $|I| \leq \frac{-n\lambda_n}{\lambda_1 - \lambda_n}$ , 即得证。  $\square$

**Remark.** 一些注释:

(1) 图是正则的保证邻接矩阵有一个全一特征向量。同时该方法可以推广: 式子  $\mathbb{1}_I^T A \mathbb{1}_I = 0$  实际上矩阵不一定是  $A$ , 只要是满足这个等式就可以了。

(2) 我们有:  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(A) = 0$ , 并且  $\lambda_1 = d > 0$ , 故  $\lambda_n < 0$ , 上面的上界是正数, 是合理的。

接下来我们使用谱图论来给出此前学习过的 Erdős-Ko-Rado 定理的另一个证明。先回顾一下这个定理的内容:

**Theorem 2.5** (Erdős-Ko-Rado Theorem). 给定  $[n]$  的一个  $k$  元子集组成的集族  $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ , 其中  $n \geq 2k$ 。如果  $\mathcal{F}$  是一个相交系, 则  $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$ 。

为此我们定义如下在一类非常有名且重要的图:

**Definition 2.6** (Kneser Graph). 设  $n, k$  是两个正整数, 且  $n \geq 2k$ 。我们定义 Kneser 图  $K(n, k)$ , 其点集是所有的  $k$  元子集  $\binom{[n]}{k}$ 。并且对于图中两点  $A, B \in \binom{[n]}{k}$ , 其之间有边相连当且仅当  $A \cap B = \emptyset$ 。

Kneser 图一个最简单的例子是当  $n = 2k$  时, 这时候对于每个集合  $A$  只有其补集  $\bar{A}$  与其之间有边。故  $K(2k, k)$  是一个匹配, 匹配大小为  $\frac{1}{2} \binom{2k}{k}$ 。

**Proof of Theorem 2.5.** 可以看出:  $K(n, k)$  中的一个独立集就对应  $[n]$  的一个  $k$ -uniform 相交系。

那么 Erdős-Ko-Rado 定理给出的结果也就是  $\alpha(K(n, k)) \leq \binom{n-1}{k-1}$ 。

考虑用 Hoffman's Bound 给出独立集的上界, 我们这里略去计算, 直接给出 Kneser 图的谱 (可参见 Theorem 9.4.3 in GTM207):

- Kneser 图  $K(n, k)$  有  $k+1$  个不同的特征值:  $(-1)^j \binom{n-k-j}{k-j}$ ,  $\forall 0 \leq j \leq k$ ;
- 并且第  $j$  个特征值的重数为  $\binom{n}{j} - \binom{n}{j-1}$ , 特别的  $j=0$  处的重数为 1。

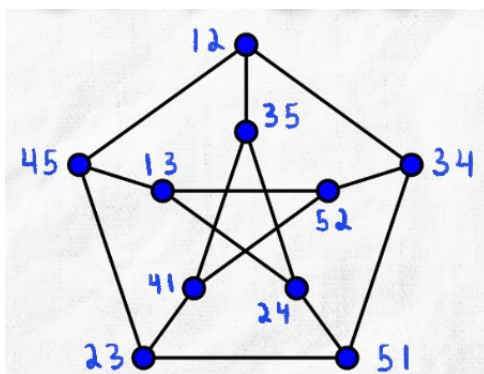
于是最大特征值就是  $\binom{n-k}{k}$  (代入  $j=0$ ), 而最小特征值为  $-\binom{n-k-1}{k-1}$  (代入  $j=1$ )。而 Hoffman's Bound 给出:

$$\alpha(K(n, k)) \leq \binom{n}{k} \frac{\binom{n-k-1}{k-1}}{\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}} = \binom{n-1}{k-1}$$

故得证。 □

我们再来看一个特殊的 Kneser 图:

**Example 2.7** (Petersen Graph).  $K(5, 2)$  又被称为 Petersen 图，其有如下图形表示：



利用之前的结果，我们可以看到 Petersen 图有图谱  $\{3^{(1)}, 1^{(5)}, (-2)^{(4)}\}$ 。

但实际上我们不需要套用之前的未证明的结论，接下来我们展示如何计算出这一个图谱。

**Solution.** 首先我们注意到 Petersen 图是  $\{K_3, C_4\}$ -free 的，这是因为：

- 三个两两不交的二元子集会占用六个不同元素，但是我们只有 5 个元素可选。所以一定是  $K_3$ -free 的。
- 两个有交集的二元子集  $A, B$  会占用三个不同元素，而与  $A, B$  都不交的二元子集只能是由剩下两个元素构成的。也就是说两个不邻接点只有一个公共邻居，所以一定是  $C_4$ -free 的。

考虑邻接矩阵平方的矩阵元的意义，是两个点的公共邻居个数，由此可以得到：

$$A^2(i, j) = \begin{cases} 3 & i = j \\ 0 & i \neq j \text{ and } i \sim j \\ 1 & i \neq j \text{ and } i \not\sim j \end{cases}$$

可得  $A^2 = 2I + J - A$ 。

我们知道  $A$  有一个特征值 3，且对应特征向量为  $\mathbf{1}$ 。而且对于不等于 3 的特征值  $\lambda$ ，设其一个特征向量为  $v$ ，由谱分解可得  $v \perp \mathbf{1} \implies Jv = \mathbf{0}$ ，那么（不妨设  $\|v\| = 1$ ）：

$$\lambda^2 = v^\top A^2 v = v^\top (2I + J - A)v = 2 - \lambda$$

由此得到非 3 的特征值只能为 1, -2。

同时我们还可以发现上面的证明还告诉我们：特征值 3 的重数为 1。再配合  $\text{tr}(A) = 0$ ，可以算出 1 的重数为 5，-2 的重数为 4，即得。  $\triangle$

**Remark.** 在代数图论中，我们有强正则图 (strongly regular graph)，其有四个参数  $(v, d, \alpha, \beta)$ ，表示：

- 图有  $v$  个点，且是  $d$ -regular 的；

- 对于任何两个相邻的点，其公共邻居数量为  $\alpha$ ;
- 对于任何两个不相邻的点，其公共邻居数量为  $\beta$ 。

这样的一族图被记作  $\text{srg}(v, d, \alpha, \beta)$ ，由前面的讨论可知 Petersen 图属于  $\text{srg}(10, 3, 0, 1)$ 。

可以发现上面的计算完全可以搬到强正则图上，由此可以得到四个参数的一些关系，被称为强正则图的**整性条件**。

**Proposition 2.8.** 不可能将  $K_{10}$  分解为三个边不交的 Petersen 图。

**Proof.** 我们反证，假设这样的分解存在，那么有  $J - I = A = P_1 + P_2 + P_3$ ，其中  $A$  是  $K_{10}$  的邻接矩阵，而  $P_1, P_2, P_3$  是分解出来的三个 Petersen 图的邻接矩阵。

设  $V_1$  是  $P_1$  特征值 1 对应的特征子空间，而  $V_2$  是  $P_2$  特征值 1 对应的特征子空间，这两个空间都是 5 维的。

则这两个空间一定有非平凡交，这是因为  $V_1, V_2$  里的向量都和  $\mathbf{1}$  正交，如果  $V_1, V_2$  交只有  $\{0\}$ ，则  $V_1 \oplus V_2 \oplus \{k\mathbf{1}\}$  会得到一个 11 维空间，超过了点数。

设  $0 \neq v \in V_1 \cap V_2$ ，便有：

$$Av = -v = (P_1 + P_2 + P_3)v \Rightarrow P_3v = -3v$$

但是  $P_3$  没有  $-3$  特征值，故矛盾。 □

作为本节的终结，我们证明非常著名的友谊定理：

**Theorem 2.9** (Friendship Theorem). 在一群人数不少于三的人群中，若任意两人都刚好只有一个共同认识的人，这群人中总有一人是所有人都认识的。

**Proof.** 构造一图  $G$ ，认识的人之间连边，设  $n = |V(G)|$ 。我们分两种情况讨论：

(1)  $G$  是一个  $d$ -regular 图，则由条件知  $G \in \text{srg}(n, d, 1, 1)$ 。与之前类似，可得：

$$A^2 = (d-1)J + I$$

所以  $A$  的特征值只可能为  $d, \pm\sqrt{d-1}$ 。设后两个重数分别为  $a, b$ ，则由  $\text{tr}(A) = 0$  可得：

$$d + a\sqrt{d-1} - b\sqrt{d-1} = 0 \Rightarrow (b-a)^2(d-1) = d^2$$

就有  $(d-1) \mid d^2$ ，可得  $d = 2, n = 3$ ，即  $G = K_3$ 。

(2)  $G$  不是正则图。取  $u \not\sim v$ ，设  $d(u) = k, N(u) = \{w_i, i \in [k]\}$ 。则诸  $w_i$  和  $v$  有唯一公共邻点，记作  $z_i$ 。

若存在不相等的  $i, j$  使得  $z_i = z_j$ ，那它将成为  $w_i$  和  $w_j$  的第二个公共顶点，矛盾。所以  $d(v) \geq k = d(u)$ 。对称地， $d(v) \leq d(u)$ ，于是任意两个不相邻点有相同度数。

由  $G$  不是正则图知： $\exists v \neq w, d(v) = d(w) \Rightarrow v \sim w$ 。

设  $u$  是  $v, w$  的公共邻居，则  $d(u) = d(v)$  和  $d(u) = d(w)$  至少有一个成立。不失一般性地设  $d(u) = d(v)$ 。

下证  $v$  和所有顶点相连, 反设不是, 即存在  $x \not\sim v$ , 则:

$$\begin{cases} d(v) = d(x) \neq d(u) \\ d(v) = d(x) \neq d(w) \end{cases}$$

于是得到  $C_4$  子图, 矛盾。  $\square$

### 2.3 Moore 界与笼

**Definition 2.10** (Girth). 设  $G$  是一个图,  $G$  的围长 (girth) 被定义为最小圈的长度, 记为  $g(G)$ 。特别的, 如果图没有圈, 规定  $g(G) = +\infty$ 。

**Proposition 2.11** (Moore's Bound). 设  $G$  是一个  $d$ -regular 图, 并且  $g(G) \geq 5$ 。那么  $|V(G)| \geq 1 + d + d(d-1)$ 。

*Proof.* 考虑从任意一点出发的 BFS 树的前两层即可。  $\square$

**Corollary 2.12.** 设  $G$  是一个  $d$ -regular 图, 并且  $g(G) \geq 2k-1$ 。那么  $|V(G)| \geq 1 + d + \sum_{j=1}^{k-2} d(d-1)^j$ 。

**Theorem 2.13.** 设  $G$  是一个  $d$ -regular 图 ( $d \geq 3$ ), 其取到 Moore's Bound 的下界 (这样的图被称为笼, Cage), 即  $g(G) \geq 5$  并且  $|V(G)| = 1 + d + d(d-1)$ 。那么  $d$  只有三种可能: 3, 7, 57。

*Proof.* 还是考虑  $A^2$  矩阵元的意义, 根据 Moore's Bound 的证明可得:  $A^2 = dI + J - I - A$ 。那么一样的, 我们可以得到不等于  $d$  的特征值只有两种可能:

$$\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{4d-3}}{2}$$

设这两个特征值重数分别为  $a, b$ , 那么有:

$$\begin{cases} a + b = n - 1 = d^2 \\ 0 = \text{tr}(A) = d + a\lambda_2 + b\lambda_3 \end{cases}$$

可以得到:

$$0 = d - \frac{a+b}{2} + \frac{1}{2}(a-b)\sqrt{4d-3} \Rightarrow (a-b)\sqrt{4d-3} = d^2 - 2d$$

- (1) 若  $4d-3$  不是完全平方数, 那么  $a=b$ , 由此  $d^2 - d = 0 \Rightarrow d = 2$  or  $0$ , 是平凡的情况。
- (2) 若  $4d-3$  是完全平方数, 设  $s^2 = 4d-3$ , 则再回到上面的式子可得:

$$s^5 + s^4 + 6s^3 - 2s^2 - 32as = 15$$

所以由 Eisenstein 判别法可得  $s \mid 15 \Rightarrow s = 1, 3, 5, 15 \Rightarrow d = 1, 3, 7, 57$ , 舍去平凡解即得结果。

□

**Remark.**  $d = 3$  是这样的图存在, Petersen 图就是一个例子。  $d = 7$  时也是存在的。而  $d = 57$  的图是否存在是一个 open problem。

## 2.4 Cauchy 交错定理

**Theorem 2.14** (Cauchy Interlacing Theorem). 设  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  有特征值  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ 。设  $m \leq n$ ,  $N \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $NN^\top = I_m$ 。而  $B = NAN^\top$  的特征值为  $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_m$ , 则  $\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{n-m+i}$ ,  $\forall i \in [m]$ 。

特别的, 若  $N$  的每一行只有一个位置是 1, 其他位置都是 0, 则  $B$  对应  $A$  的一个主子式。

证明可参见[这个链接](#)。

**Corollary 2.15.** 设  $\alpha(G)$  为  $G$  的独立数, 则  $\lambda_{\alpha(G)} \geq 0 \geq \lambda_{n-\alpha(G)+1}$ 。

**Proof.** 设  $I$  是  $G$  的最大独立集, 而  $B$  是对应行列生成的主子式。则由独立集定义可得  $B = O$ , 特征值都是 0。运用 Cauchy 交错定理即得。 □

**Theorem 2.16.** 设  $G$  是联通的, 且有特征值  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ , 则  $\chi(G) \geq 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_n}$

**Proof.** 设  $\chi(G) = m$ , 则  $G$  可以被写成一  $m$  部图:

$$A = \begin{pmatrix} O & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & O & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & O \end{pmatrix}$$

设  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$  是  $\lambda_1$  对应的特征向量, 且按照上面一样分块。令:

$$N = \begin{pmatrix} \frac{x_1^\top}{\|x_1\|} & O & \cdots & O \\ O & \frac{x_2^\top}{\|x_2\|} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & \frac{x_m^\top}{\|x_m\|} \end{pmatrix}$$

有  $NN^\top = I_m$ , 令  $B = NAN^\top$  有特征值  $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_m$ , 则由 Cauchy 交错定理可得  $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \dots \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \mu_m \geq \lambda_n$ 。

再来:

$$B \begin{pmatrix} \|x_1\| \\ \vdots \\ \|x_m\| \end{pmatrix} = N A N^\top \begin{pmatrix} \|x_1\| \\ \vdots \\ \|x_m\| \end{pmatrix} = N A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \lambda_1 N x = \lambda_1 \begin{pmatrix} \|x_1\| \\ \vdots \\ \|x_m\| \end{pmatrix}$$

也即  $\lambda_1$  也是  $B$  的特征值, 所以  $\mu_1 = \lambda_1$ 。又注意到  $B$  的对角线也全是 0, 所以:

$$0 = \text{tr}(B) = \mu_1 + \cdots + \mu_m \geq \lambda_1 + (m-1)\lambda_n \quad \Rightarrow \quad \chi(G) = m \geq 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_n}$$

注意  $\lambda_n < 0$ , 所以除过去变号。 □

**Remark.** 若  $G$  是正则图, 则我们可以直接使用 Hoffman 界配合不等式  $\chi(G)\alpha(G) \geq n$  得到结果。

### 3 Lovász 局部引理

#### 3.1 定理内容与证明

先回忆一下在本篇概率方法中常用的 Union Bound:

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \Pr(A_i)$$

如果上面的加和严格小于 1, 则其补事件  $\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$  有严格正概率。

这一放缩比较暴力, 在  $A_1, \dots, A_n$  中的大部分事件对是独立的时候, 我们可以做得更好:

**Theorem 3.1** (Lovász Local Lemma (Symmetric Version)). 设  $A_1, \dots, A_k$  为一列事件, 满足  $\Pr(A_i) \leq p, \forall i \in [k]$ , 并且每个事件最多与其他  $d$  个事件不独立, 也就是说至少与其他  $k - d - 1$  个事件独立。则若  $ep(d + 1) \leq 1$ , 其中  $e$  为自然对数的底数, 那么:

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^k \overline{A_i}\right) > 0$$

为了给出一般的 Lovász 局部引理, 我们定义如下辅助图:

**Definition 3.2** (Dependency Graph). 设  $A_1, \dots, A_k$  为一列事件, 定义这些事件的相关性图  $D$  如下:

- 其点集为  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$ 。
- 而两点  $A_i, A_j$  之间有边, 当且仅当它们相关。

可以看到在对称版本的 Lovász 局部引理中, 相关性图  $D$  的最大度  $\Delta(D) \leq d$ 。

现在我们可以给出一般的 Lovász 局部引理:

**Theorem 3.3** (Lovász Local Lemma (Asymmetric Version)). 设  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$  为一列事件, 它们的相关性图为  $D$ 。设  $N(A_i)$  是每个事件  $A_i$  在相关性图中的邻集。

如果存在一个函数  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1)$ , 使得如下事情成立:

$$\Pr(A_i) \leq \varphi(A_i) \prod_{B \in N(A_i)} (1 - \varphi(B)), \forall A_i \in \mathcal{A}$$

那么就有:

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^k \overline{A_i}\right) > 0$$

**Remark.** 可以看到 Lovász 局部引理比 Union Bound 强很多。在  $d$  比较小时, 这也是很多时候都会有的, 相比于直接乘  $n$ , 我们乘了一个小得多的数。

Lovász 局部引理利用了事件族的局部性质, 而 Union Bound 并没有, 这也是这一定理的得名原因。

我们先说明一般版本蕴含对称版本：

**Proof of (Asymmetric  $\Rightarrow$  Symmetric).** 我们令  $\varphi(A) = \frac{1}{d+1}, \forall A \in \mathcal{A}$ , 那么有  $\forall A \in \mathcal{A}$ :

$$\begin{aligned} \varphi(A) \prod_{B \in N(A)} (1 - \varphi(B)) &= \frac{1}{d+1} \left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^{d_D(A)} \\ &\geq \frac{1}{d+1} \left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^d \geq \frac{1}{(d+1)e} \geq p \geq \Pr(A) \end{aligned}$$

得证。 □

再来证明一般的定理：

**Proof of Theorem 3.3.** 我们对  $|\mathcal{B}|$  做归纳，其中  $\mathcal{B}$  的定义和归纳所要证的命题如下所示：

- $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  是一个事件列的子集，而  $A \in \mathcal{A}$  是另一个事件，并且满足  $A \notin \mathcal{B}$ 。
- 要证的命题为：

$$\Pr\left(A \mid \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{B}\right) \leq \varphi(A)$$

这蕴含了我们想要的结论。事实上，由链式法则，我们可得（注意是补集的条件概率，所以是上面命题反过来）：

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^k \overline{A_i}\right) = \Pr\left(\overline{A_1} \mid \bigcap_{i=2}^k \overline{A_i}\right) \cdots \Pr(\overline{A_k}) \geq \prod_{i=1}^k (1 - \varphi(A_i)) > 0$$

**Base Case:** 当  $|\mathcal{B}| = 0$  时，要证的是  $\Pr(A) \leq \varphi(A)$ ，这是显然的，因为条件右边是  $\varphi(A)$  再乘上一堆不超过 1 的数。

**Inductive Step:** 假设对于任何满足  $|\mathcal{B}| < t$  的  $(A, \mathcal{B})$ ，上述命题皆成立，现在来看  $|\mathcal{B}| = t$  的情况。

令  $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B} \cap N(A)$ ，而  $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_1$ 。则有：

$$\Pr\left(A \mid \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{B}\right) = \frac{\Pr\left(A \cap \bigcap_{B_1 \in \mathcal{B}_1} \overline{B_1} \mid \bigcap_{B_2 \in \mathcal{B}_2} \overline{B_2}\right)}{\Pr\left(\bigcap_{B_1 \in \mathcal{B}_1} \overline{B_1}\right)}$$

对于分子，我们注意到，由相关性图的定义，有  $A$  和  $\bigcap_{B_2 \in \mathcal{B}_2} \overline{B_2}$  独立，所以：

$$\Pr\left(A \cap \bigcap_{B_1 \in \mathcal{B}_1} \overline{B_1} \mid \bigcap_{B_2 \in \mathcal{B}_2} \overline{B_2}\right) \leq \Pr\left(A \mid \bigcap_{B_2 \in \mathcal{B}_2} \overline{B_2}\right) = \Pr(A) \leq \varphi(A) \prod_{B \in N(A)} (1 - \varphi(B))$$

对于分母，设  $\mathcal{B}_1 = \{C_1, \dots, C_\ell\}$  ( $\ell \leq t$ )。我们运用链式法则，并对拆开来的每一项运用归纳假设可得（同样注意是补集的条件概率，所以是上面命题反过来）：

$$\Pr\left(\bigcap_{B_1 \in \mathcal{B}_1} \overline{B_2}\right) = \Pr\left(\overline{C_1} \mid \bigcap_{i=2}^{\ell} \overline{C_i}\right) \cdots \Pr(\overline{C_\ell}) \geq \prod_{B_1 \in \mathcal{B}_1} (1 - \varphi(B))$$

结合起来就有（注意有  $\mathcal{B}_1 \subseteq N(A)$ ）：

$$\Pr\left(A \mid \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{B}\right) \leq \frac{\varphi(A) \prod_{B \in N(A)} (1 - \varphi(B))}{\prod_{B \in \mathcal{B}_1} (1 - \varphi(B))} \leq \varphi(A)$$

□

### 3.2 一致超图的二染色

我们在本篇中，证明了如果一个一致  $k$ -超图的边数不超过  $2^{k-1}$ ，则其有二边染色。在这里我们使用 Lovász 局部引理改进这一结果：

**Theorem 3.4.** 设  $\mathcal{F}$  是一个一致  $k$ -超图，并且其中的每条边至多和  $e2^{1-k}$  条边有交。那么  $\mathcal{F}$  可边二染色。

*Proof.* 考虑  $\mathcal{F}$  的一个均匀随机的边二染色。对于  $\mathcal{F}$  中的任意一条边  $T \in \mathcal{F}$ ，令  $A_T$  为事件「 $T$  是同色边」，那么  $\Pr(A_T) = 2^{1-k}$ 。

而两个事件  $A_S, A_T$  相关当且仅当  $S \cap T \neq \emptyset$ ，那么由对称版本的 Lovász 局部引理即得结论。 □

### 3.3 Ramsey 数的下界

我们在本篇中得到了对角 Ramsey 数的一个上界和一个下界：

$$(1 - o(1)) \frac{t}{\sqrt{2e}} \sqrt{2}^t \leq R(t, t) \leq \binom{2t-2}{t-1} \leq 4^t$$

其中下界是 Erdős 给出的。用 Lovász 局部引理，我们可以做得更好：

**Theorem 3.5** (Spencer, 1977). 有：

$$R(t, t) \geq (1 - o(1)) \frac{\sqrt{2t}}{e} \sqrt{2}^t$$

*Proof.* 令  $n = (1 - o(1)) \frac{\sqrt{2t}}{e} \sqrt{2}^t$ ，考虑  $K_n$  的一个均匀随机的边二染色。对于任何  $[n]$  的  $t$  元子集  $T \in \binom{[n]}{t}$ ，令  $A_T$  为事件「 $T$  生成的子图是同色团」，那么  $\Pr(A_T) = 2^{1-\binom{t}{2}}$ 。

$A_S, A_T$  相关当且仅当  $|S \cap T| \geq 2$ ，所以相关性图的最大度为：

$$\Delta(D) = \#\left\{T' \in \binom{[n]}{t} : |T' \cap T| \geq 2\right\} \leq \binom{t}{2} \binom{n}{t-2}$$

可以算出：

$$e2^{1-\binom{t}{2}} \left( \binom{t}{2} \binom{n}{t-2} + 1 \right) \leq 1$$

所以由对称版本的 Lovász 局部引理即得结论。  $\square$

我们再来看远离对角线的 Ramsey 数，由 Lovász 局部引理也可以给出一个非常不错的下界估计。

**Theorem 3.6.** 存在一个正数  $c$  使得对于充分大的  $t$  都有：

$$R(3, t) \geq \frac{ct^2}{\ln^2 t}$$

最一般的，对于任何  $s \geq 3$ ，有一个只与  $s$  有关的正数  $c_s$ ，使得对于充分大的  $t$  有：

$$R(s, t) \geq c_s \left( \frac{t}{\ln t} \right)^{\frac{s+1}{2}}$$

**Proof.** 我们只关注  $s = 3$  情况，一般的情况证明类似。还是考虑  $K_n$  的一个随机的边染色，每条边独立地以概率  $p$  被染为红色，以概率  $1 - p$  被染为蓝色。 $n, p$  均为待定参数。

对于所有的  $|S| = 3$ ，记  $A_S$  为事件「 $S$  构成红色  $K_3$ 」；对于所有的  $|T| = t$ ，记  $B_T$  为事件「 $T$  构成蓝色  $K_t$ 」。则  $\Pr(A_S) = p^3$ ， $\Pr(B_T) = (1 - p)^{\binom{t}{2}}$ ，并且相关性图的连边关系如下：

$$\begin{cases} A_S \sim A_{S'} & \Leftrightarrow |S \cap S'| \geq 2 \\ B_T \sim B_{T'} & \Leftrightarrow |T \cap T'| \geq 2 \\ A_S \sim B_T & \Leftrightarrow |S \cap T| \geq 2 \end{cases}$$

再分析一下各个事件在相关性图中度数。设  $N_{XY}$  为一固定类型为  $X$  的事件，其类型为  $Y$  的邻居数量，这里  $X, Y = A$  or  $B$ 。则有：

$$\begin{cases} N_{AA} \leq \binom{3}{2}(n-3) \leq 3n \\ N_{AB} \leq \binom{3}{2} \binom{n-3}{t-2} \leq \binom{n}{t} \\ N_{BA} \leq \binom{3}{2} \binom{n-3}{t-2} \leq \binom{n}{t} \\ N_{BB} \leq \binom{t}{2}(n-t) \leq \binom{t}{2}n \end{cases}$$

由非对称版本的 Lovász 局部引理，我们要做的是找到合适的  $x, y \in [0, 1)$ ，使得对于充分大的  $t$  有：

$$\begin{cases} p^3 \leq x(1-x)^{3n}(1-y)^{\binom{n}{t}} \\ (1-p)^{\binom{t}{2}} \leq y(1-x)^n \binom{t}{2} (1-y)^{\binom{n}{t}} \end{cases}$$

猜测  $y = \binom{n}{t}^{-1}$ , 这样可以使得  $(1-y)\binom{n}{t} \sim e^{-1}$ 。再用  $e^{-x} > 1-x$  和  $(1-1/m)^m \sim e^{-1}$ :

$$\begin{cases} p^3 \leq x \\ e^{-p\binom{t}{2}} \approx (1-p)\binom{t}{2} \leq (1-x)^n \binom{t}{2} \approx e^{-xn} \binom{t}{2} \end{cases} \Rightarrow p \geq xn \geq p^3 n$$

得到  $p \leq \sqrt{n}$ ,  $x \sim n^{-3/2}$ 。再由第二条可得:

$$e^{-p\binom{t}{2}} \leq y \sim \binom{n}{t}^{-1} \approx e^{-t \ln n} \Rightarrow pt^2 \geq p\binom{t}{2} \geq t \ln n$$

故  $t \geq p^{-1} \ln n \geq \sqrt{n} \ln n$ 。上面是对问题的猜测与分析。具体的我们取:

$$n = \frac{t^2}{(40 \ln t)^2}, y = \binom{n}{t}^{-1}, x = \frac{1}{9n^{3/2}}, p = \frac{1}{3\sqrt{n}}$$

经过一系列复杂计算可以得到这样的参数选择是符合条件的, 即得, 这里略去计算。□

### 3.4 独立横切集

**Theorem 3.7.** 设  $G = (V, E)$  是一张图, 有最大度为  $\Delta$ , 而  $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_r$  是  $V$  的一个划分。从每个  $V_i$  中取一个点  $v_i$  形成的  $r$  元子集被称为  $G$  的横切集 (transversal)。

若  $|V_i| \geq 2e\Delta, \forall i \in [r]$ , 则存在  $G$  的横切集, 使得这一横切集是  $G$  的一个独立集。

**Proof.** 不妨设  $|V_i| = \lceil 2e\Delta \rceil \triangleq k, \forall i \in [r]$ 。考虑独立均匀的从每个  $V_i$  中随机挑选出  $v_i$ 。设  $A_{ij}$  表示事件「 $v_i, v_j$  之间有边」, 则  $\Pr(A_{ij}) \leq \frac{\Delta}{k}$ 。而相关性图的最大度数不超过  $2k\Delta - 1$  ( $V_i, V_j$  加起来不超过  $2k$  个点, 这些点往外延申出最多  $2k\Delta$  条边, 这些边两端所处部集对应事件可能相关, 其中有至少一条边两端就是  $i, j$  不用算)。

算一下, 发现只能得到:  $e \frac{\Delta}{k} (2k\Delta + 1) \not\leq 1$ 。这是一个错误的思路。

对于任何  $e \in E$ , 设  $B_e$  表示事件「 $e$  的两端点都被选入截断中」, 则  $\Pr(B_e) \leq k^{-2}$ , 而相关性图的最大度数与之前一致, 故:

$$ek^{-2}(2k\Delta - 1 + 1) \leq \frac{e(2\Delta \cdot 2e\Delta - 1 + 1)}{(2e\Delta)^2} = 1$$

由对称版本的 Lovász 局部引理, 可得一定存在一个选取使得所有边都不会两个顶点都被选取, 即存在独立的横切集。□

**Remark.** 一开始选取的  $A_{ij}$  相关性太强的同时单个事件概率又不够小。有两种方法: 减少相关性、减小单个事件概率。这里采用了后面这一策略。

### 3.5 有向图的圈长

作为本章的终结，我们探讨一个图论问题：

**Theorem 3.8.** 设  $G = (V, E)$  是一有向图，其最小出度为  $\delta$ ，最大入度为  $\Delta$ ，则若：

$$k \leq \frac{\delta}{1 + \ln(1 + \delta\Delta)}$$

那么  $G$  存在长度可被  $k$  整除的有向圈。

**Proof.** 考虑给  $G$  中的每个点  $v \in V$  随机赋予点权  $x_v$ ，每个点的点权独立均匀选取与环  $\mathbb{Z}_k$  中。设  $A_v$  为事件「不存在  $v \rightarrow w$  使得  $x_w = x_v + 1$ 」，这里加法是  $\mathbb{Z}_k$  上的加法，则  $\Pr(A_v) \leq (1 - 1/k)^\delta \leq e^{-\delta/k}$ 。

我们再看相关性图的最大度是多少。事件  $A_v$  依赖于集合  $B_v = \{x_w \mid w = w \text{ or } v \rightarrow w\}$  里面随机变量的取值，也即  $A_u$  与  $A_v$  相关当且仅当  $B_u \cap B_v \neq \emptyset$ 。所以  $d(A_v) \leq \delta + \delta(\Delta - 1) = \delta\Delta \triangleq d$ （第一项是  $v \rightarrow u$  的情况，第二个是  $v \rightarrow w, u \rightarrow w$  的情况，而回退的  $\Delta$  个选择中有一个就是  $v$  本身，去掉不算）。

考虑使得对称版本的 Lovász 局部引理条件成立的  $k$ ，要满足：

$$pe(d+1) \leq e^{-\delta/k+1}(\delta\Delta + 1) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad k \leq \frac{\delta}{1 + \ln(1 + \delta\Delta)}$$

即是命题的条件。故存在一种点权赋值，使得对于任何的  $v \in V$ ，存在  $v \rightarrow w$  使得  $x_w = x_v + 1$ ，不如记这样的  $w$  为  $f(v)$ 。

那么我们随意从一个点  $x$  开始，一直作用  $f$ ，得到一串点列  $v_0 = x, v_1, v_2, \dots$ 。若在某个位置  $v_i$ ，与  $v_{0 \sim i-1}$  中的某个  $v_j$  是一样的，则  $(v_j, \dots, v_i)$  就是一个有向圈，而且根据  $f$  的含义，必须有这一圈长度被  $k$  整除。而这一重复必定会发生，因为点数有限。  $\square$

**Corollary 3.9.** 对于任意整数  $k$ ，存在  $d$  使得任意的  $d$ -regular 有向图都存在长可被  $k$  整除的有向圈。由欧拉一笔画定理又进一步可得，存在  $d$  使得任意的  $2d$ -regular 无向图都存在一个  $d$ -regular 定向，而这一定向中存在长可被  $k$  整除的有向圈。

## 4 Szemerédi 正则引理

### 4.1 定理内容与证明

**Definition 4.1** (Edge Density). 设  $G = (V, E)$  是一张图。对于任何的子集  $X, Y \subseteq V$ , 定义它们之间边的边密度为:

$$d(X, Y) = \frac{e_G(X, Y)}{|X||Y|} \in [0, 1]$$

其中  $e_G(X, Y)$  是一个端点在  $X$  另一端点在  $Y$  的边数。

**Definition 4.2** ( $\varepsilon$ -regular). 对于一个二部图  $G = (A \cup B, E)$  被称为  $\varepsilon$ -regular 的, 若对于任何的  $X \subset A, Y \subset B$  满足  $|X| \geq \varepsilon|A|, |Y| \geq \varepsilon|B|$ , 都有  $|d(X, Y) - d(A, B)| \leq \varepsilon$ 。

**Remark.**  $\varepsilon$ -regular 揭示这一图的边的分布比较均匀。

我们将  $\varepsilon$ -regular 的概念扩展到一个顶点集的划分上:

**Definition 4.3** ( $\varepsilon$ -regular for Equipartition). 对于一张图  $G = (V, E)$ , 其顶点集的一个划分  $V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k = V$  是等部的, 若两两划分大小差距不超过 1。更进一步, 称一个这样一个等部划分是  $\varepsilon$ -regular 的, 若至多只有  $\varepsilon k^2$  对  $(V_i, V_j)$  不是  $\varepsilon$ -regular 的。

再来就是正则引理本身:

**Theorem 4.4** (Szemerédi Regularity Lemma). 对于任何  $\varepsilon > 0$ , 存在一个常数  $T(\varepsilon) > 0$ , 使得任何的图存在一个  $\varepsilon$ -regular 等部划分, 其大小  $k$  满足  $\frac{1}{\varepsilon^6} \leq k \leq T(\varepsilon)$ 。

我们提一下证明这一定理的思路, 先定义一个与划分有关的势函数:

**Definition 4.5** (Potential Function). 对于  $V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k = V$  是  $V$  的一个划分  $\mathcal{P}$ , 我们可定义其势函数为:

$$q(\mathcal{P}) \triangleq \sum_{1 \leq i < j \leq k} q(V_i, V_j) \triangleq \sum_{1 \leq i < j \leq k} \frac{|V_i||V_j|}{|V|^2} d^2(V_i, V_j)$$

可以注意到  $0 \leq q(\mathcal{P}) \leq 1$ 。

证明思路就是, 我们想设计一个, 从初始的一个等部划分  $\mathcal{P}$  开始, 如果其并非  $\varepsilon$ -regular 的, 则可以找到其的一个等部加细  $\mathcal{P}^*$ , 大小增加不多, 并且使得其势函数有严格正的关于  $\varepsilon$  是常数的提升。因为势函数有上界 1, 所以这一过程不可能做无穷次, 算法结束后我们就得到了一个想要的  $\varepsilon$ -regular 的划分。具体而言可被如下引理概括:

**Lemma 4.6.** 设  $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$  是顶点集的一个等部划分, 它不是  $\varepsilon$ -regular 的, 并且  $k \geq \frac{1}{\varepsilon^6}$ 。那么存在  $\mathcal{P}$  的一个等部加细  $\mathcal{P}^*$ , 其大小为  $k^*$ , 并且有:

$$q(\mathcal{P}^*) \geq q(\mathcal{P}) + \frac{\varepsilon^5}{2}, \quad k^* \leq 2^{2^k}$$

先承认这一引理，我们来证明正则引理：

**Proof of Theorem 4.4.** 不妨假设图的顶点数至少为  $\frac{1}{\varepsilon^6}$ ，则我们随意从一个大小至少为  $\frac{1}{\varepsilon^6}$  的等部划分  $\mathcal{P}$  开始，如果其并非  $\varepsilon$ -regular 的，则用 Lemma 4.6 将其加细成  $\mathcal{P}^*$ ，直到得到一个  $\varepsilon$ -regular 的划分为止。

注意到这一过程迭代次数不会超过  $\frac{2}{\varepsilon^5}$ ，否则由 Lemma 4.6，势函数会严格超过 1，不可能。

根据 Lemma 4.6，可定义  $T(\varepsilon) \triangleq \text{Tower}(\lceil 4/\varepsilon^5 \rceil)$ ，其中  $\text{Tower}(k) = 2^{\text{Tower}(k-1)}$  且  $\text{Tower}(1) = 2$ 。  $\square$

之后的主要工作集中在证明 Lemma 4.6 上。先来证明加细不会使得势函数减小：

**Lemma 4.7.** 设  $A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_m = A$  是  $A$  的一个划分， $B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_n = B$  是  $B$  的一个划分。设  $|A_i| = x_i|A|, |B_j| = y_j|B|$ ，且  $|A| = a|V|, |B| = b|V|$ 。

设  $d(A_i, B_j) = d(A, B) + \varepsilon_{ij}$ ，则有：

$$\sum_{i,j} q(A_i, B_j) = q(A, B) + ab \sum_{i,j} x_i y_j \varepsilon_{ij}^2$$

于是有，对于任何划分  $\mathcal{P}$  的加细  $\mathcal{P}^*$ ，有  $q(\mathcal{P}^*) \geq q(\mathcal{P})$ 。

**Proof.** 有：

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \frac{e_G(A, B)}{ab|V|^2} = \sum_{i,j} \frac{e_G(A_i, B_j)}{ab|V|^2} = \sum_{i,j} x_i y_j d(A_i, B_j) \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j (d(A, B) + \varepsilon_{ij}) = d(A, B) + \sum_{i,j} x_i y_j \varepsilon_{ij} \end{aligned}$$

所以：  $\sum_{i,j} x_i y_j \varepsilon_{ij} = 0$ 。

那么：

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} q(A_i, B_j) &= \sum_{i,j} ax_i \cdot by_j \cdot d^2(A_i, B_j) = \sum_{i,j} ax_i \cdot by_j \cdot (d(A, B) + \varepsilon_{ij})^2 \\ &= \sum_{i,j} ax_i \cdot by_j \cdot (d^2(A, B) + 2d(A, B)\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}^2) = \sum_{i,j} ax_i \cdot by_j \cdot (d(A, B)^2 + \varepsilon_{ij}^2) = q(A, B) + ab \sum_{i,j} x_i y_j \varepsilon_{ij}^2 \end{aligned}$$

其中倒数第二个等号用了我们上面证明的一个和式为 0。  $\square$

更进一步，我们可以找到一个细分使得势函数提升十分显著。具体来说，找到那些“造成”非  $\varepsilon$ -regular 的子集对。

**Corollary 4.8.** 设  $(A, B)$  不是  $\varepsilon$ -regular 的，并且不妨设  $|A| = |B| = \frac{n}{k} = \frac{1}{k}|V|$ ，则存在  $A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B$  满足  $|A_1| \geq \varepsilon|A|, |B_1| \geq \varepsilon|B|$ ，并且：

$$q(\{A_1, A \setminus A_1, B_1, B \setminus B_1\}) \geq q(A, B) + \frac{\varepsilon^4}{k^2}$$

**Proof.** 因为  $(A, B)$  不是  $\varepsilon$ -regular 的, 所以存在  $A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B$  满足  $|A_1| \geq \varepsilon|A|, |B_1| \geq \varepsilon|B|$  且  $|d(A_1, B_1) - d(A, B)| > \varepsilon$ , 那么由上面的 Lemma:

$$q(\{A_1, A \setminus A_1, B_1, B \setminus B_1\}) \geq q(A, B) + \frac{1}{k^2} \varepsilon^4$$

在这里我们只关注了  $(A_1, B_1)$  对的  $x_i y_j \varepsilon_{ij}^2$  的贡献。 □

我们开始证明 Lemma 4.6。

**Proof of Lemma 4.6.** 我们分两步证明该引理:

**Step 1:** 将  $\mathcal{P}$  细分得到大小为  $k_1$  的划分  $\mathcal{P}_1$ , 使得  $q(\mathcal{P}_1) \geq q(\mathcal{P}) + \varepsilon^5$  且  $k_1 \leq k2^{k-1}$ 。注意这个  $\mathcal{P}_1$  并不一定是等部划分。

不妨设  $\mathcal{P}$  中每个部集大小均为  $n/k$ 。因为  $\mathcal{P}$  不是  $\varepsilon$ -regular 的, 所以:

$$I \triangleq \{(i, j) : (V_i, V_j) \text{ is not } \varepsilon\text{-regular}\}, |I| \geq \varepsilon k^2$$

对于  $I$  中的每一对  $(V_i, V_j)$ , 由 Corollary 4.8 可知存在  $V_i^{(i,j)}, V_j^{(i,j)}$  使得:

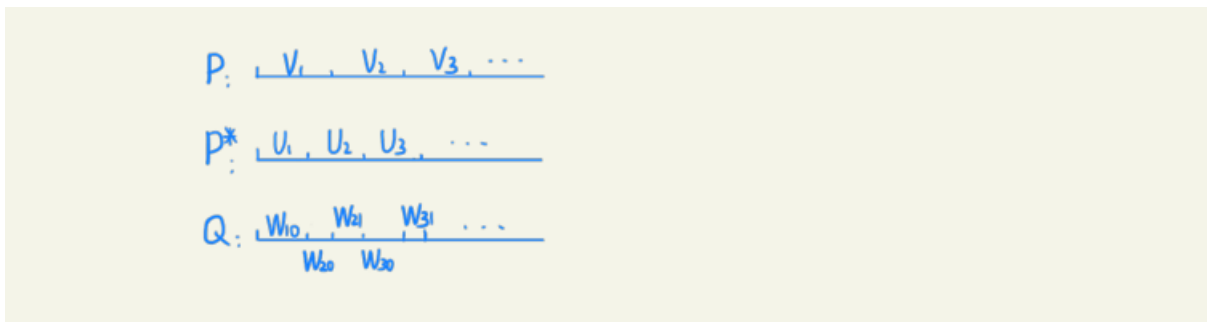
$$q(\{V_i^{(i,j)}, V_i \setminus V_i^{(i,j)}, V_j^{(i,j)}, V_j \setminus V_j^{(i,j)}\}) \geq q(V_i, V_j) + \frac{1}{k^2} \varepsilon^4$$

让  $\mathcal{P}_1$  就是这些个  $V_i^{(i,j)}$  组成的共同加细, 而  $\mathcal{A}_i$  是  $\mathcal{P}_1$  中  $V_i$  部分对应的细分。则有  $|\mathcal{A}_i| \leq 2^{k-1}, \forall i \in [k]$ , 故  $k_1 \leq k2^{k-1}$ 。并且:

$$\begin{aligned} q(\mathcal{P}_1) &= \sum_{A, B \in \mathcal{P}_1} q(A, B) \geq \sum_{1 \leq i < j \leq k} \sum_{A \in \mathcal{A}_i} \sum_{B \in \mathcal{A}_j} q(A, B) \\ &= \sum_{(i,j) \in I} \sum_{A \in \mathcal{A}_i} \sum_{B \in \mathcal{A}_j} q(A, B) + \sum_{(i,j) \notin I} \sum_{A \in \mathcal{A}_i} \sum_{B \in \mathcal{A}_j} q(A, B) \\ &\geq \sum_{(i,j) \in I} q(V_i, V_j) + \sum_{(i,j) \notin I} q(V_i, V_j) + \frac{|I|}{k^2} \varepsilon^4 \\ &= q(\mathcal{P}) + \varepsilon^5 \end{aligned}$$

**Step 2:** 把  $\mathcal{P}_1$  进一步改造成大小为  $k^*$  的等部划分  $\mathcal{P}^*$ , 满足  $q(\mathcal{P}^*) \geq q(\mathcal{P}_1) - 100/k_1$  且  $k^* \leq k_1^2$ 。

这里直接将 23 秋助教的解答贴上来:



记顶点集  $[n]$ . 假设  $P = \{V_1, V_2, \dots, V_{k_1}\}$ ,  
 取  $P^*$  (equipartition)  $= \{U_1, U_2, \dots, U_{k_1^2}\}$ ,  
 满足:  $\exists \sigma \in S_n$ , s.t.  $V_i = \{\sigma(j) : j \in [\sum_{k=1}^i |V_k| + 1, \sum_{k=1}^{i+1} |V_k|]\}$  ( $\forall i \in [k_1]$ )  
 $U_i = \{\sigma(j) : j \in [\sum_{k=1}^i |U_k| + 1, \sum_{k=1}^{i+1} |U_k|]\}$  ( $\forall i \in [k_1^2]$ )  
 构造 partition  $Q$ :  $\forall 1 \leq i \leq k_1^2, \exists 1 \leq a_i \leq k_1, t_i \in \mathbb{N}$ ,  
 s.t.  $U_i \cap V_{a_i}, \dots, U_i \cap V_{a_i+t_i} \neq \emptyset$ , 且对其它的  $V_j$ , 均有  $U_i \cap V_j = \emptyset$ .  
 则取  $W_{ij} = U_i \cap V_{a_i+j}$  ( $1 \leq i \leq k_1^2, 0 \leq j \leq t_i$ ).  
 $Q = \{W_{ij} : 1 \leq i \leq k_1^2, 0 \leq j \leq t_i\}$   
 注意到  $Q$  为  $P$  的细分, 故  $q(P^*) - q(P) \geq q(P^*) - q(Q)$ ;  
 $Q$  同时为  $P^*$  的细分, 记  $A = \{i \in [k_1^2] : t_i \geq 1\}$ , 显然有  $|A| < k_1$ .  
 于是  $q(P^*) - q(Q) \geq -\sum_{i \in A} \sum_{j=0}^{t_i} \sum_{W \in Q - W_{ij}} q(W_{ij}, W)$   
 $\geq -\sum_{i \in A} \sum_{j=0}^{t_i} \sum_{W \in Q - W_{ij}} \frac{|W_{ij}| \cdot |W|}{n^2}$   
 $\geq -\sum_{i \in A} \frac{1}{n} |U_i| \quad (\sum_{W \in Q - W_{ij}} |W| = n - |W_{ij}| \leq n, \sum_{j=0}^{t_i} |W_{ij}| = |U_i|)$   
 由  $|A| < k_1$  以及  $|U_i| \leq \lceil \frac{n}{k_1^2} \rceil$  即知  $P^*$  符合要求.

**Conclusion:** 综合这两步就可以完成证明。 □

## 4.2 三角形删除引理

我们来看 Szemerédi 正则引理的一个最基础的应用。

**Lemma 4.9.** 设  $(A, B)$  是  $\varepsilon$ -regular 的,  $d = d(A, B)$ , 而  $Y$  是  $B$  的一个子集满足  $|Y| \geq \varepsilon|B|$ . 那么除了  $\varepsilon|A|$  个点外,  $A$  中所有点在  $Y$  中都至少有  $(d - \varepsilon)|Y|$  个邻居。

**Proof.** 令  $X = \{x \in A \mid |N(x) \cap Y| < (d - \varepsilon)|Y|\}$ , 则:

$$d(X, Y) = \frac{e(X, Y)}{|X||Y|} < \frac{(d - \varepsilon)|X||Y|}{|X||Y|} = d - \varepsilon$$

由  $(A, B)$  是  $\varepsilon$ -regular 的, 只能有  $|X| < \varepsilon|A|$ , 即得。 □

**Remark.** 类似的, 可以证明除了  $2\varepsilon|A|$  个点外,  $A$  中所有点在  $Y$  中有  $(d \pm \varepsilon)|Y|$  个邻居。这一引理更加细致刻画了  $\varepsilon$ -regular 带来的伪随机性。

**Lemma 4.10** (Triangle Counting Lemma). 设  $G = (A \cup B \cup C, E)$  是一三部图, 而且  $A, B, C$  两两之间都是  $\varepsilon$ -regular 的。设  $d(A, B) = c, d(A, C) = b, d(B, C) = a$ , 并且满足  $a, b, c \geq 2\varepsilon$ , 那么  $G$  中至少如下那么多个三角形:

$$(1 - 2\varepsilon)(a - \varepsilon)(b - \varepsilon)(c - \varepsilon)|A||B||C|$$

**Proof.** 由 Lemma 4.9 可得:

- 在  $A$  中除了  $\varepsilon|A|$  个点外, 在  $B$  中都有至少  $(c - \varepsilon)|B|$  个邻居。
- 在  $A$  中除了  $\varepsilon|A|$  个点外, 在  $C$  中都有至少  $(b - \varepsilon)|C|$  个邻居。

综合即可得: 在  $A$  中除了  $2\varepsilon|A|$  个点外, 在  $B$  中都有至少  $(c - \varepsilon)|B|$  个邻居, 且在  $C$  中都有至少  $(b - \varepsilon)|C|$  个邻居。

考虑这些  $(1 - 2\varepsilon)|A|$  个“好点”中的一元  $x$ , 则  $|N_G(x) \cap B| \geq (c - \varepsilon)|B| \geq \varepsilon|B|$ ,  $|N_G(x) \cap C| \geq (b - \varepsilon)|C| \geq \varepsilon|C|$ 。

而又有  $(B, C)$  是  $\varepsilon$ -regular 的, 所以  $N_G(x) \cap B, N_G(x) \cap C$  之间至少有  $(a - \varepsilon)|N_G(x) \cap B||N_G(x) \cap C| \geq (a - \varepsilon)(b - \varepsilon)(c - \varepsilon)|B||C|$ ,  $x$  和这里面的每一条边都可以构成一个三角形。而且至少有  $(1 - 2\varepsilon)|A|$  这么多个这样的  $x$ s, 所以  $G$  中至少有  $(1 - 2\varepsilon)(a - \varepsilon)(b - \varepsilon)(c - \varepsilon)|A||B||C|$  个三角形。  $\square$

**Remark.** 同之前一样, 也可以证明  $G$  至多如下那么多个三角形有:

$$(1 + 2\varepsilon)(a + \varepsilon)(b + \varepsilon)(c + \varepsilon)|A||B||C|$$

**Theorem 4.11** (Triangle Removal Lemma). 对于任何的  $\varepsilon > 0$ , 存在一只依赖于  $\varepsilon$  的常数  $\delta$  使得: 若一  $n$  点图  $G$  需要删掉  $\varepsilon n^2$  条边才能让其不含  $K_3$ , 则  $G$  中至少有  $\delta n^3$  个三角形。

**Proof.** 我们应用 Szemerédi 正则引理, 得到一个  $(\varepsilon/3)$ -regular 的等部划分 (不妨假设  $n/k$  是整数):

$$V(G) = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k, \quad \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{-6} \leq k \leq \text{Tower}(\varepsilon/3)$$

接下来我们删除一些边:

- (1) 删掉所有的  $V_i$  的内部边。
- (2) 删掉非  $(\varepsilon/3)$ -regular 的  $(V_i, V_j)$  之间的所有边。
- (3) 删掉  $(V_i, V_j)$  之间边密度不足  $2\varepsilon/3$  的所有边。

此时我们删掉的边数至多为:

$$k \binom{n/k}{2} + \frac{\varepsilon}{3} k^2 \left(\frac{n}{k}\right)^2 + \binom{k}{2} \frac{2\varepsilon}{3} \left(\frac{n}{k}\right)^2 \leq \frac{n^2}{2k} + \frac{\varepsilon n^2}{3} + \frac{\varepsilon n^2}{3} < \varepsilon n^2$$

于是由条件, 删掉这些边后,  $G$  还存在至少一个三角形。设其三端点分别在  $V_x, V_y, V_z$  中, 可知  $x, y, z$  是两两不同的。我们说明在  $V_x, V_y, V_z$  中, 实际上有很多很多三角形, 远远不止一个, 由三角形计数引理。

首先是  $V_x, V_y, V_z$  之间的边肯定都没有被删去, 因为一对  $(V_i, V_j)$  之间的边要么全部被删掉, 要么全部保留。所以根据删除规则,  $V_x, V_y, V_z$  两两之间都是  $(\varepsilon/3)$ -regular 的, 并且两两之间的边密度都至少是  $2\varepsilon/3$ , 故由三角形计数引理可得  $V_x, V_y, V_z$  之间至少有:

$$\left(1 - \frac{2\varepsilon}{3}\right) \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^3 \left(\frac{n}{k}\right)^3 \triangleq \delta(\varepsilon)n^3$$

即得。实际上  $\delta = \delta(\varepsilon)$  会是一个极小的量, 因为  $k$  关于  $\varepsilon$  有一个指数塔的形式。  $\square$

### 4.3 图删除引理

我们进一步泛化三角形删除引理，得到图删除引理。

**Lemma 4.12** (Graph Counting Lemma). 设  $H$  是一张图，有  $V(H) = [h]$ ，而图  $G$  的点集被划分为  $V(G) = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_h$ ，满足当  $(i, j) \in E(H)$  时有  $(V_i, V_j)$  是  $\varepsilon$ -regular 的。则考虑：

$$T \triangleq \#\{(v_1, \dots, v_h) \in V_1 \times \cdots \times V_h \mid (i, j) \in E(H) \Rightarrow (v_i, v_j) \in E(G)\}$$

会有：

$$\left| T \cdot \prod_{i=1}^h |V_i|^{-1} - \prod_{(i,j) \in E(H)} d(V_i, V_j) \right| \leq \varepsilon e(H)$$

我们给出两种证明方法，第一种只会略微提及思路，第二种会详细阐述。

**Proof 1.** 第一种思路是对点数  $v(H)$  归纳，推进归纳的时候和证明三角形计数引理的过程非常像。固定  $V_1$  中的一个点  $x$ ，考虑  $U_i = \begin{cases} V_i & 1 \not\sim i \\ V_i \cap N_G(x) & 1 \sim i \end{cases}$ ,  $\forall i \geq 2$ 。可以对  $U_2, \dots, U_h$  用归纳假设，当然还有若干细节需要处理。  $\square$

**Proof 2.** 我们按边数  $e(H)$  归纳，当  $e(H) = 0$  时显然成立。对于推进步骤，不妨设  $12 \in E(H)$ ，考虑删掉一条边的子图  $H' \triangleq H \setminus 12$ 。考虑在每个  $V_i$  中独立均匀随机选择  $v_i$ ，设：

$$p = \Pr((i, j) \in E(H) \Rightarrow (v_i, v_j) \in E(G))$$

则要证明的命题相当于：

$$\left| p - \prod_{(i,j) \in E(H)} d(V_i, V_j) \right| \leq \varepsilon e(H)$$

再设：

$$p' = \Pr((i, j) \in E(H') \Rightarrow (v_i, v_j) \in E(G))$$

我们 **Claim**  $|p - d(V_1, V_2)p'| \leq \varepsilon$ ，若此 **Claim** 成立，则配合归纳假设就有：

$$\begin{aligned} \left| p - \prod_{(i,j) \in E(H)} d(V_i, V_j) \right| &\leq |p - d(V_1, V_2)p'| \\ + d(V_1, V_2) \left| p' - \prod_{(i,j) \in E(H')} d(V_i, V_j) \right| &\leq (e(H') + d(V_1, V_2))\varepsilon \leq \varepsilon e(H) \end{aligned}$$

下证明此 **Claim**：我们只考虑  $v_3, \dots, v_h$  都固定是的条件概率版本，条件概率版本成立后由全概率公式容易得到原本也成立。方便起见，条件概率也被我们记作  $p$  和  $p'$ 。

设  $A_1 = \{v_1 : (v_1, v_j) \in E(G), \forall j \in N_H(1) \setminus \{2\}\}$ ,  $A_2 = \{v_2 : (v_2, v_j) \in E(G), \forall j \in N_H(2) \setminus \{1\}\}$ , 我们只需要对  $v_1 \in A_1, v_2 \in A_2$  的这些考虑即可。

这时候  $p'$  对应  $|A_1||A_2|$ , 而  $p$  对应  $e(A_1, A_2)$ , 所以我们要证的就变为:

$$\left| \frac{e(A_1, A_2)}{|V_1||V_2|} - d(V_1, V_2) \frac{|A_1||A_2|}{|V_1||V_2|} \right| \leq \varepsilon$$

分情况讨论:

- (1) 若  $|A_1| \leq \varepsilon|V_1|$  或  $|A_2| \leq \varepsilon|V_2|$ , 则绝对值中的两项都在区间  $[0, \varepsilon]$  之内, 显然成立。
- (2) 若  $|A_1| \geq \varepsilon|V_1|$  且  $|A_2| \geq \varepsilon|V_2|$ , 则用  $\varepsilon$ -regular 性就可得:

$$\left| \frac{e(A_1, A_2)}{|V_1||V_2|} - d(V_1, V_2) \frac{|A_1||A_2|}{|V_1||V_2|} \right| = \frac{|A_1||A_2|}{|V_1||V_2|} |d(A_1, A_2) - d(V_1, V_2)| \leq \varepsilon$$

得证。 □

**Theorem 4.13** (Graph Removal Lemma). 对于任意图  $H$  和任意常数  $\varepsilon > 0$ , 存在一个常数  $\delta = \delta(H, \varepsilon) > 0$ , 使得每个  $H$  副本数小于  $\delta n^{v(H)}$  的  $n$  顶点图  $G$  可以通过删除不超过  $\varepsilon n^2$  条边, 变成  $H$ -free 图。

有了图计数引理, 该定理证明与三角形删除引理完全一致, 这里略去。

#### 4.4 Roth 定理

**Definition 4.14** (One Edge One Triangle). 记  $h(n)$  表示,  $n$  点图中的最大边数, 使得每条边恰好属于一个三角形中。

**Lemma 4.15.** 有  $h(n) = o(n^2)$ 。

**Proof.** 设一  $n$  点图  $G$  有  $m$  条边, 且满足每条边恰好属于一个三角形中, 那么  $G$  中三角形个数为  $m/3$ 。因为  $m \leq n^2 = o(n^3)$ , 所以  $G$  有  $o(n^3)$  个三角形。由三角形删除引理, 可以删掉  $o(n^2)$  条边使得  $G$  变成  $K_3$ -free 的。

而根据假设, 删除一条边最多删除一个三角形, 因此在此过程中删除的边数至少为  $m/3$ , 从而  $m = o(n^2)$ 。 □

**Theorem 4.16** (Roth's Theorem). 令  $r_3(n)$  是最大的  $[n]$  子集  $S$  的大小, 使得  $S$  中不存在非平凡的长为 3 的等差数列。则有:

$$r_3(n) \leq \frac{h(6n)}{3n} = o(n)$$

**Proof.** 我们构造一三部图  $G$ , 其三部分分别为  $A = [n], B = [2n], C = [3n]$ 。对于每个的  $x \in A = [n]$  与  $s \in S$ , 我们连接三角形  $(x, x+s, x+2s) \in A \times B \times C$ 。

往证在这个图里面每条边恰属于一个三角形, 假设  $x \in A, y \in B, z \in C$  组成一个三角形, 则  $y-x, z-y, \frac{z-x}{2}$  都属于  $S$ 。而这三个显然构成了一个长为 3 的等差数列, 于

是由条件必须有  $y - x = z - y = \frac{z - x}{2}$ , 可以发现这样的三角形只有构造图中写出来的那些。综上:

$$h(6n) \geq 3nr_3(n) \Rightarrow r_3(n) \leq \frac{h(6n)}{3n}$$

□

**Remark.** Roth 原先的证明使用了离散傅里叶分析的工具, 也是非常有意思的, 并且可以给出一个更好的界 (这里给出的界是  $O\left(\frac{n}{\log^* n}\right)$ , Roth 的证明给出的界是  $O\left(\frac{n}{\log \log n}\right)$ 。

2023 年的 FOCS Best Paper (理论计算机顶会) 中对  $r_3(n)$  的上界有了喜人的进展。