一、

1.

理想流体：当流体的黏性较小，运动的相对速度也不大时，产生的黏性应力相对于其受到的其他力可以忽略不计，此时可以近似将其看做无黏性的。这样的流体称为理想流体。

2.

正压：当流体的密度ρ仅为压强P的函数（即$\rho = \rho(P)$）而与温度T无关时，将这种情形称作正压。

3.

开尔文定理：对于理想正压流体，如外力有势，则沿任一封闭物质线的速度环量和通过任一物质面的涡通量在运动过程中恒不变。

4.

群速度：

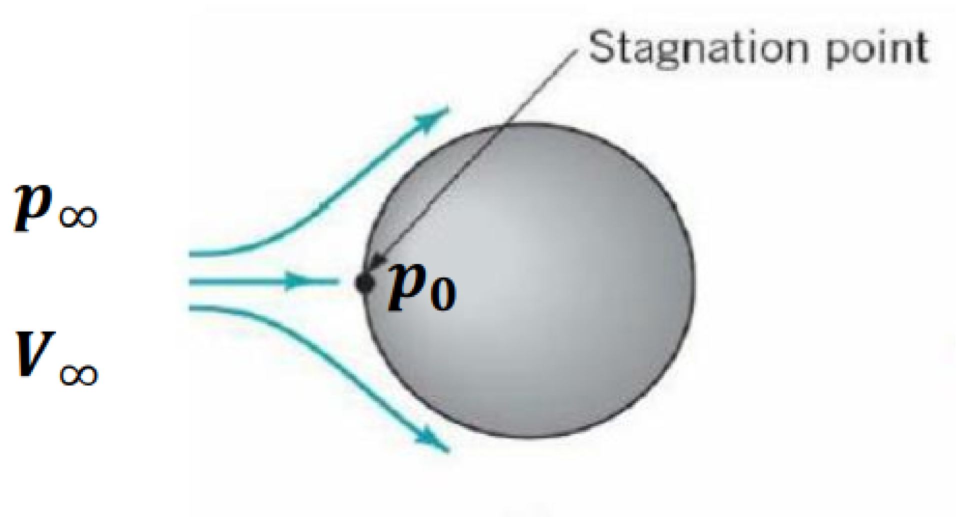
振幅以一个振幅周期形成的波包的推进速度。也可以认为是波的能量传播的速度。

5.

驻点压强：

2. 驻点压强

假如一均匀气流以等速V_∞定常地绕过某物体流动。气流受阻后在前缘中心0处滞止为零，0点叫做驻点，该点压强p_0称为驻点压强。



(a)

6.

驻波：

对平面波，其节点（驻点）位置不随时间变化，初始时刻的节点永远是节点，整个波不向左右传播，称为驻波。

7.

速度分解定理：即亥姆霍兹速度分解定理，流体质点的运动速度可以分解为平动速度、 转动速度和变形速度三部分 。

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \frac{1}{2} rot\, \vec{v} \times \delta\vec{r} + \overleftrightarrow{S} \cdot \delta\vec{r}$$

二、

1.

$$\begin{cases} u = \frac{dx}{dt} = 2y - 1 \\ v = \frac{dy}{dt} = 2t \end{cases}$$

$$y = t^2 + C_2$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t^2 - 1 + 2C_2$$

$$x = \frac{2}{3}t^3 + (2C_2 - 1)t + C_1$$

t=1,x=1,y=1得到迹线方程：

$$y = t^2$$

$$x = \frac{2}{3}t^3 - t + \frac{4}{3}$$

流线方程:

$$\frac{dx}{2y-1} = \frac{dy}{2t}$$

$$2tx = y^2 - y + C_3$$

t=1时，(1,1)点有

$$C_3 = 2$$

$$y^2 - y + 2 - 2tx = 0$$

(2)

$$a_x = \frac{du}{dt} = 4t$$

$$a_y = \frac{dv}{dt} = 2$$

t=1时则（1,1）点加速度为$\vec{a} =$ （$4, 2$）

三、

气压高度公式

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$
$$p = \rho R T_0$$
$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{p}{RT_0} g$$

方程从地面到高度z积分，得到

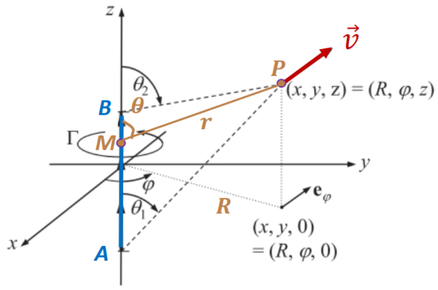
$$\ln p - \ln p_0 = -\frac{gz}{RT_0}$$
$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{gz}{RT_0}}$$

4.

直线涡丝

给定一段直线涡丝AB，涡丝的强度是Γ，方向垂直向上；涡丝外的流体皆无旋。求此涡丝所诱导的速度场。

设M是涡丝上任一点，其在涡丝外一点P的诱导速度为：



$$d\vec{v} = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$|d\vec{l}| = |d(R\cot\theta)| = R\csc^2\theta d\theta\,;|\vec{r}| = R/\sin\theta\,;d\vec{v}$的方向为$\overrightarrow{e_\varphi}$

$$d\vec{v} = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{R\csc^2\theta d\theta \times R/\sin\theta \times \sin\theta}{(R/\sin\theta)^3}\overrightarrow{e_\varphi} = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\sin\theta}{R}d\theta\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\sin\theta}{R}d\theta\overrightarrow{e_\varphi} = \frac{\Gamma}{4\pi R}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\overrightarrow{e_\varphi}$$

特例：

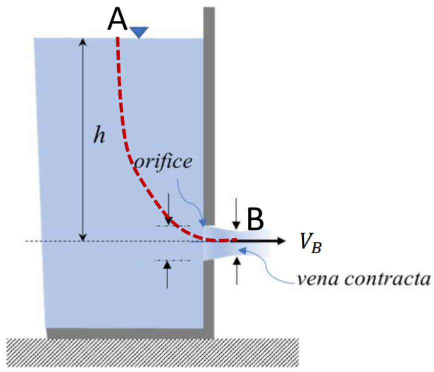
将θ_1取为0，θ_2取为π，即得到$v = \frac{\Gamma}{2\pi h}$

5.

根据小孔出流的结论

1. 孔口出流

有一很大的容器盛满水，在距水面h处的器壁上开一小孔，水从小孔流入大气，求小孔射流的流速V_B。



不可压缩流体的连续性方程 $S_A V_A = S_B V_B$

$\Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{S_B}{S_A} \ll 1$　　可近似认为$V_A \approx 0$，即运动是定常的。

对流线AB应用伯努利积分

$$\frac{{V_B}^2}{2} + g z_B + \frac{p_0}{\rho} = g z_A + \frac{p_0}{\rho}$$
$$\Rightarrow \frac{{V_B}^2}{2} = g(z_A - z_B) = gh$$
$$\Rightarrow V_B = \sqrt{2gh}$$

托里拆利公式

可见，孔口处流速与质点自液面A自由下落到孔口时的速度相同。

实际流体中由于黏性阻力，射流的速度要小一些。如果管嘴是圆形的，射流速度为理想流体射流速度的0.98倍左右。

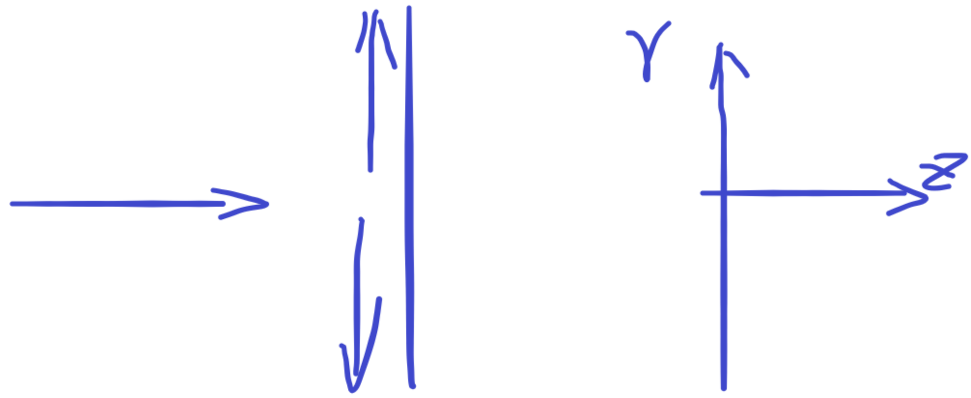
在两个出水口有

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}, v_2 = \sqrt{2gh_2}$$
$$v_1 t_1 = v_2 t_2 = x$$
$$\frac{1}{2}g t_1^2 = y_1, \frac{1}{2}g t_2^2 = y_2$$

联立消去t_1, t_2, x即证。

6.

由于射流方向垂直与平板且四周均匀



仅考虑垂直方向,对z方向列出动量定理有

$$0-(\rho V_0)V_0 S=-F_z$$

得到

$$F_z=10^3\times 20^2\times\frac{\pi 0.1^2}{4}=1000\pi=3141.59N$$

也可用

3. 射流冲击平板问题

定常无旋运动在质量力可以忽略时的伯努利-拉格朗日积分

$$\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}=C$$

由此可知，远处流动的速度及压强处处取同一常数值V及p_0。

通过S面的动量为：$-\rho aV\vec{V}+\rho a_1 V\vec{V_1}+\rho a_2 V\vec{V_2}$

作用在S面上的力为：

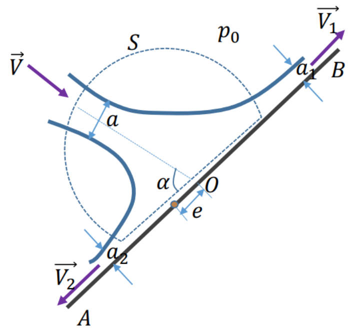
$$-\int_S p\vec{n}dS=-\int_S (p-p_0)\vec{n}dS=-\int_{AOB}(p-p_0)\vec{n}dS=-\vec{P}$$

其中$\vec{P}$为流体作用在平板上的力

根据动量定理，$-\vec{P}=-\rho aV\vec{V}+\rho a_1 V\vec{V_1}+\rho a_2 V\vec{V_2}$

分别在垂直平板的方向及平行平板的方向投影得

$$\boldsymbol{P=\rho aV^2 sin\alpha}\qquad \text{射流对平板的压力公式}$$



取$\alpha=\frac{\pi}{2}$得到

七、

（1）

黏性不可压流体运动方程：

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \nabla p + \mu \Delta \vec{v}$$

当运动恒定时($\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$),由于上表面平板运动和压强梯度沿x方向是均一的，故可以认为u,v的分布仅和y方向有关$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$。

不可压条件,$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

运动方程化为

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$$

积分得到

$$u = \frac{dp}{2\mu dx} y^2 + C_1 y + C_2$$

根据边界条件，$u|_{y=0} = 0, u|_{y=h} = U$,

$$u = \frac{dp}{2\mu dx} y^2 + (\frac{U}{h} - \frac{hdp}{2\mu dx}) y$$

(2)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dp}{\mu dx} y + (\frac{U}{h} - \frac{hdp}{2\mu dx}) = ay + b$$

耗散函数:

$$\Phi = \mu(\frac{\partial u}{\partial y})^2 = \mu(ay+b)^2$$

$$\int_0^h \Phi dy = \mu(\frac{h^3}{3} a^2 + abh^2 + b^2 h)$$

$$= \frac{h^3}{3\mu}(\frac{dp}{dx})^2 + Uh\frac{dp}{dx} - \frac{h^3}{2\mu}(\frac{dp}{dx})^2 + \frac{\mu U^2}{h} + \frac{h^3}{4\mu}(\frac{dp}{dx})^2 - Uh\frac{dp}{dx}$$

$$= \frac{h^3}{12\mu}(\frac{dp}{dx})^2 + \frac{\mu U^2}{h}$$

上平板做功为

$$W = F \cdot U = U \cdot \mu \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=h} = \mu U(\frac{hdp}{\mu dx} + \frac{U}{h} - \frac{hdp}{2\mu dx}) = \mu U(\frac{hdp}{2\mu dx} + \frac{U}{h})$$

压强梯度力做功功率为

$$-\int_0^h \frac{dp}{dx} u dy = -\frac{dp}{dx}(\frac{h^3 dp}{6\mu dx} + \frac{h^2}{2}(\frac{U}{h} - \frac{hdp}{2\mu dx}))$$

下表面做功为0

三者相加为

$$\frac{\mu U^2}{h}+\frac{h^3}{12\mu}(\frac{dp}{dx})^2$$

即耗散功率与外力做功相同。