

第十六次作业

探究进一步增强阿妮亚超能力的方法

21 计科一学生

在番剧《间谍过家家》中，阿妮亚（图 1）有读心术的超能力。而我猜测她头上神秘的牛角包，极有可能是用来发挥超能力的结构。假设牛角包接收信息的过程和物体互相吸引类似，那么读心术的强弱，与牛角包对尖端一质点 m_0 的“引力”强弱有关。我将研究牛角包的引力，以衡量阿妮亚目前超能力的强度，并且探索增强她超能力的方法。



(图 1)

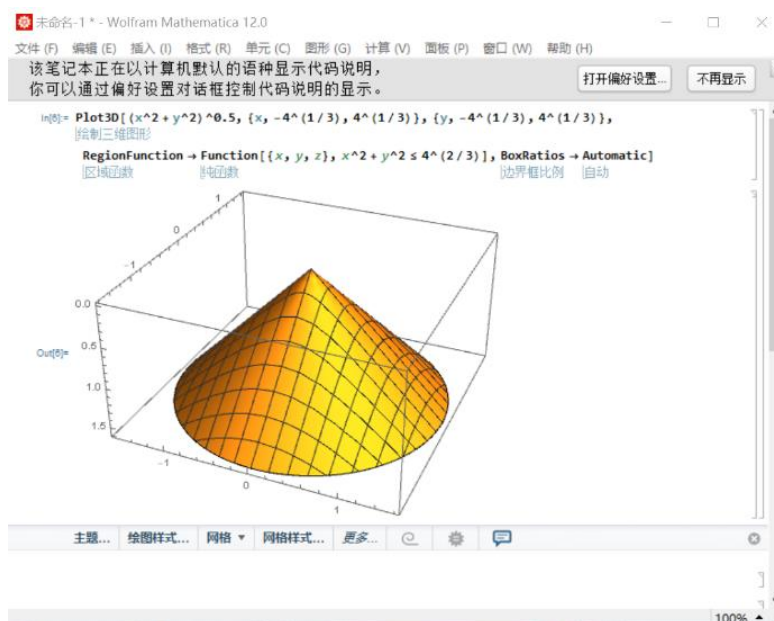
1) 如果牛角包的形状可以近似为纵切面为等腰直角三角形的圆锥，设圆锥的高为 h ，由

$$\frac{1}{3}h \times \pi h^2 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

解得

$$h = \sqrt[3]{4}R$$

用软件绘制出牛角包的形状：



(图 2)

则:

$$F_z = \int_{-h}^h dx \int_{-\sqrt{h^2-x^2}}^{\sqrt{h^2-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^h \frac{Gm_0\rho z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dz$$

化简得

$$F_z = (2 - \sqrt{2})^3 \sqrt{4} \pi R G m_0 \rho$$

而

$$F_0 = \frac{4}{3} \pi R G m_0 \rho$$

故

$$\alpha = \frac{F_z}{F_0} = \frac{3(2 - \sqrt{2})}{2^3 \sqrt{2}} \approx 0.697 < 1$$

所以在这种情况下,阿妮亚的潜力并没有被充分发挥,甚至不如直接戴两个球在脑袋上。

2) 下面改变牛角包的形状,探索增大引力的方法。

假设牛角包的形状仍为圆锥,设圆锥的高度为 h ,底面半径为 a ,则

$$\frac{1}{3} h \times \pi a^2 = \frac{4}{3} \pi R^3$$

解得

$$h = \frac{4R^3}{a^2}$$

那么

$$F_z = \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{\frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}}^h \frac{Gm_0\rho z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dz$$

化简得

$$F_z = 8\pi R^3 G m_0 \rho \left(\frac{1}{a^2} - \frac{4R^3}{a^2 \sqrt{a^6 + 16R^6}} \right)$$

当 $a \approx 1.98$ 时, F_z 取最大值

$$F_z \approx 1.106 \pi R G m_0 \rho$$

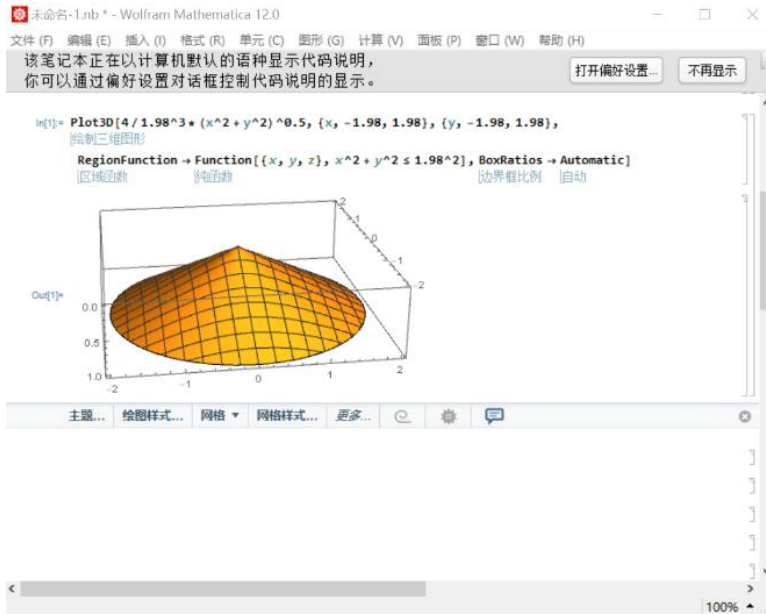
而

$$F_0 = \frac{4}{3} \pi R G m_0 \rho$$

故

$$\alpha = \frac{F_z}{F_0} \approx 0.830 < 1$$

用软件绘制出牛角包的形状:



(图3)

牛角包比刚才扁了一些，没有之前好看了，但是对超能力的提升作用仍然不如球体。

3) 由上述讨论可得，圆锥并不适合作为超能力的载体，因此我将为阿妮亚设计新的造型。

为了方便阿妮亚盘头发，新的造型仍然设计成旋转体。建立空间直角坐标系，假设质点 m_0 位于原点，旋转体是由平面图形绕 z 轴旋转一周所得。而旋转体单位体积对 z 轴方向引力的贡献大小，与 z 和半径 r 两个变量有关，即

$$dF_z = \frac{Gm_0\rho z}{(z^2 + r^2)^{1.5}} dV$$

把 $\frac{z}{(z^2+r^2)^{1.5}}$ 与 z 和 r 的关系想象成地理中的等高线，令高度为 a ，即

$$\frac{z}{(z^2 + r^2)^{1.5}} = a$$

解得

$$r = \sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)^{\frac{2}{3}} - z^2}$$

又有

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \int_0^{z_0} \pi r^2 dz$$

解得

$$a = \frac{27}{5\sqrt{5}\left(\frac{4R^3 + z_0^3}{\frac{5}{3}z_0^3}\right)^{1.5}}$$

故

$$F_z = Gm_0\rho \int_0^{z_0} zdz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\frac{5(4R^3+z_0^3)}{z_0^3}z^{\frac{2}{3}}-z^2}} \frac{r}{(z^2 + r^2)^{1.5}} dr$$

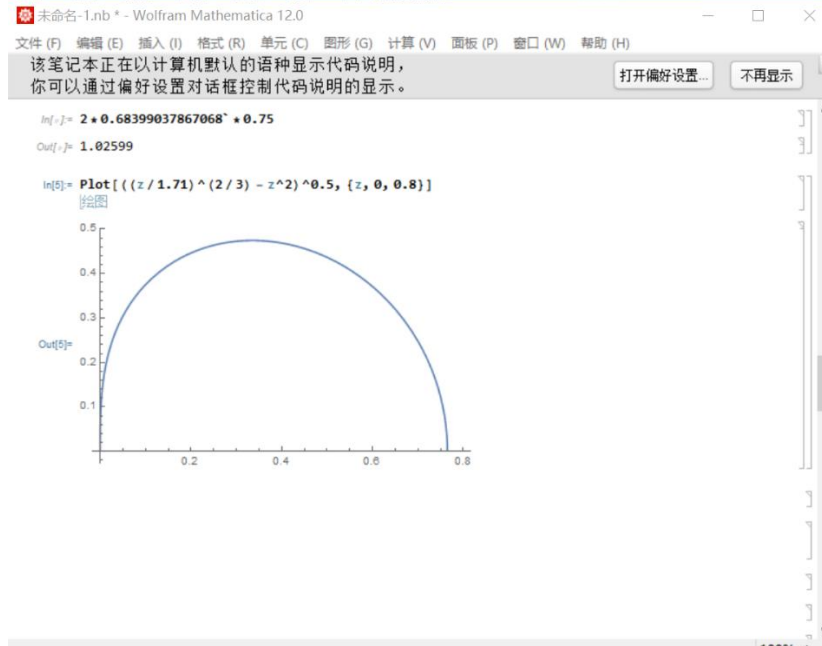
化简得

$$F_z = 2\pi G m_0 \rho (z_0 - 0.6 \sqrt{\frac{9z_0^5}{5(4R^3 + z_0^3)}})$$

当 $z=1.71$ 时

$$r = \sqrt{\left(\frac{z}{1.71}\right)^{\frac{2}{3}} - z^2}$$

旋转后能够得到旋转体的平面图形如下,可以看出旋转体是包子的形状



(图 4)

此时

$$F_z \approx 1.368\pi R G m_0 \rho$$

而

$$F_0 = \frac{4}{3}\pi R G m_0 \rho$$

故

$$\alpha = \frac{F_z}{F_0} \approx 1.026 > 1$$

因此,扎丸子头更有利于阿妮亚发挥超能力,而且也挺可爱的。