第1章 引 论

1.1 引 言

1.1.2 有限维分布和数字特征

知道了分布函数 $F_X(x) = P\{X \leqslant x\}$ 就能了解随机变量 X. 类似地, 对随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 定义 $F_t(x) = P\{X(t) \leqslant x\}$ 为过程的一维分布, $X(t)$ 的期望 $E[X(t)]$ 为过程的均值函数, 记作 $\mu_X(t)$. 而 $\mathrm{Var}[X(t)]$ 则被定义为过程的方差函数. 不仅如此, 我们还需要了解随机变量 $X(t_1)$ 与 $X(t_2)$ 的联合分布 $P\{X(t_1) \leqslant x_1, X(t_2) \leqslant x_2\}$, 这也就是过程在 t_1, t_2 两不同时刻值的联合二维分布, 记作 $F_{t_1,t_2}(x_1, x_2)$, 数字特征 $E[X(t_1)X(t_2)]$ 和 $\mathrm{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = E\{(X(t_1) - \mu_X(t_1))(X(t_2) - \mu_X(t_2))\}$ 称为过程的自相关函数和协方差函数, 分别记为 $r_X(t_1, t_2)$ 和 $R_X(t_1, t_2)$. 显然自相关函数和协方差函数有对称性, 即对任何 s, t 有 $r_X(t, s) = r_X(s, t)$ 和 $R_X(t, s) = R_X(s, t)$. 当 $t_1 = t_2 = t$ 时, $R_X(t, t) = \mathrm{Var}\, X(t)$. 容易证明自相关函数和协方差函数是非负定的, 以协方差函数为例, 即对任何 $t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i b_j R_X(t_i, t_j) \geqslant 0. \tag{1.1}$$

知 (1.1) 成立, 故它是非负定的. 进而我们定义随机过程的有限维分布族, 它是 $F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1, \cdots, x_n), t_1, \cdots, t_n \in T$ 全体, 其中

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1, \cdots, x_n) = P\{X(t_1) \leqslant x_1, \cdots, X(t_n) \leqslant x_n\}. \tag{1.2}$$

知道了随机过程的有限维分布族就知道了过程 $\{X(t), t \in T\}$ 中任意 n 个随机变量的联合分布, 也就完全了解了这些变量之间的相互依赖关系. 有限维分布也有对称性, 它与变量 $X(t_1), \cdots, X(t_n)$ 的排序无关. 对 $\{1, \cdots, n\}$ 的任一置换 $(i_1, \cdots, i_n)$ 有

$$F_{t_{i_1},\cdots,t_{i_n}}(x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}) = F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1, \cdots, x_n).$$

有限维分布还有相容性, 意思是当某些 $x \to \infty$ 时高维分布的边缘分布与相应的低维分布是一致的. 也即对 $m < n$ 有

$$F_{t_1,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots t_n}(x_1, \cdots, x_m, \infty, \cdots \infty) = F_{t_1,\cdots,t_m}(x_1, \cdots, x_m).$$

有趣的是, 若一族给定的分布函数有上述对称性和相容性则保证了存在一个随机过程 $\{X(t), t \in T\}$, 使它的有限维分布族正好就是给定的分布函数族. 这是 1931 年由 Kolmogorov 证明的相容性基本定理.

1.1.3 平稳过程和独立增量过程

如果两个随机变量 X_1, X_2 的分布函数 $F_{X_1}(x)$ 与 $F_{X_2}(x)$ 对任何 x 都是相等的, 则称它们是同分布的, 记作 $X_1 \overset{d}{=} X_2$. 类似地, 如果一个随机向量 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ 与另一随机向量 $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \cdots, Y_n)$ 有相同的联合分布, 则也称它们是同分布的, 记作 $\boldsymbol{X} \overset{d}{=} \boldsymbol{Y}$. 有一类重要的随机过程, 它处于某种概率平衡状态, 其主要性质只与变

定义 1.2 如果随机过程 $X(t)$ 对任意的 $t_1, \cdots, t_n \in T$ 和任何 h 有

$$(X(t_1 + h), \cdots, X(t_n + h)) \overset{d}{=} (X(t_1), \cdots, X(t_n)), \tag{1.3}$$

则称为严格平稳的.

定义 1.3 如果随机过程的所有二阶矩存在并有 $EX(t) = m$ 及协方差函数 $R_X(t, s)$ 只与时间差 $t - s$ 有关, 则称为宽平稳的或二阶矩平稳的.

对于宽平稳过程, 由于对 $-\infty < s, t < \infty, R_X(s, t) = R_X(0, t - s)$, 所以可以记为 $R_X(t - s)$. 显然对所有 $t, R_X(-t) = R_X(t)$, 即为偶函数. 所以 $R_X(t)$ 的图形是关于坐标轴对称的. 其在 0 点的值 $R_X(0)$ 就是过程的方差函数, 即 $R_X(0) = \mathrm{Var}X(t)$.

严格平稳和宽平稳不互推。当二阶矩存在时严格平稳 => 宽平稳, 当正态时宽平稳 => 严格平稳

定义 1.4 如果对任意的 $t_1 < t_2 \cdots < t_n$, $t_1, \cdots, t_n \in T$, 随机变量 $X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \cdots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ 是相互独立的, 则 $X(t)$ 称为独立增量过程. 如果进一步有对任意的 t_1, t_2, $X(t_1 + h) - X(t_1) \overset{d}{=} X(t_2 + h) - X(t_2)$, 则过程称为有平稳独立增量的过程.

可以证明平稳独立增量过程的均值函数一定是 t 的线性函数. 我们以后要介绍的 Poisson 过程和 Brown 运动都是这类过程. 这两类过程是过程理论中的两块

例 1.10 设 $Z_i, i = 0, 1, 2, \cdots$, 是一串独立同分布的随机变量, 定义 $X_n = \sum\limits_{i=0}^{n} Z_i$, 则过程 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 就是独立增量过程. 一般称 X_n 为独立和.

1.2 条件期望和矩母函数

1.2.1 条件期望

极限总是存在. 相应地, 定义给定 $Y = y$ 时, X 的条件分布函数为

$$P(X \leqslant x \mid Y = y) = \lim_{\Delta y \downarrow 0} P(X \leqslant x \mid Y \in \Delta y), \tag{1.7}$$

记作 $F(x \mid y)$. 进一步, 如果存在一非负函数 (记为)$f(x \mid y)$, 使得对任何集合 A 恒有

$$P(X \in A \mid Y = y) = \int_A f(x \mid y)dx, \tag{1.8}$$

且 $\int f(x \mid y)dx = 1$, 则 $f(x \mid y)$ 称为在给定 $Y = y$ 时 X 的条件密度. 不难看出条件分布函数是关于条件密度对变量 x 从 $-\infty$ 到 x 的积分, 即

$$F(x \mid y) = \int_{-\infty}^{x} f(x \mid y)dx. \tag{1.9}$$

如果把 X 与 Y 的联合密度 $f(x, y)$ 看作质量为 1 的平板的密度 (面密度), 则条件密度 $f(x \mid y)$ 就是固定 $Y = y$ 时的线密度. 它们之间的关系是

$$f(x, y) = f(x \mid y)f(y), \tag{1.10}$$

其中 $f(y)$ 为随机变量 Y 的边缘密度. 此时, 给定 $Y = y$, X 的条件期望定义为

$$E(X \mid Y = y) = \int x f(x \mid y)dx. \tag{1.11}$$

(1.6) 式与 (1.11) 式本质上是一回事, 在更深一点的课程中人们把它们统一记为

$$E(X \mid Y = y) = \int x dF(x \mid y). \tag{1.12}$$

条件期望有些重要的性质我们总结为下面的命题.

命题 1.1 (a) 若 X 与 Y 独立, 则 $E(X \mid Y = y) = EX$.

(b) 条件期望有所谓的平滑性:

$$EX = \int E(X \mid Y = y)dF_Y(y) = E[E(X \mid Y)]. \tag{1.14}$$

(c) 对随机变量 X, Y 的函数 $\phi(X, Y)$ 恒有

$$E[\phi(X, Y) \mid Y = y] = E[\phi(X, y) \mid Y = y]. \tag{1.15}$$

1.2.2 矩母函数及生成函数

定义 1.5 随机变量 X 的矩母函数定义为随机变量 $\exp\{tX\}$ 的期望, 记作 $g(t)$, 即

$$g(t) = E(\exp\{tX\}) = \int \exp\{tx\}dF(x). \tag{1.17}$$

矩母函数刻画了随机变量的许多特征, 是研究它们特性的重要工具. 当矩母函数存在时, 它唯一地确定了 X 的分布. 通过 $g(t)$ 可以求出 X 的各阶矩, 即有

$$E[X^n] = g^{(n)}(0), \quad n \geqslant 1, \tag{1.18}$$

其中 $g^{(n)}(t)$ 是 $g(t)$ 的 n 阶导数在 t 的取值. 通过在积分号下求导数容易得到 (1.18) 式的证明. 对相互独立的随机变量 X 和 Y, 它们和的矩母函数就等于其矩母函数的积:

$$g_{X+Y}(t) = g_X(t)g_Y(t). \tag{1.19}$$

如果随机变量 Y 等于一串独立随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_N$ 的和, 且下标 N 也是一个整数值随机变量, 则 Y 是随机变量的随机和. 这在实际问题中常常会碰到.

例 1.12 随机和的矩母函数. 记 $X_1, X_2, \cdots$ 为一串独立同分布的随机变量, N 为非负整数值随机变量且与 X 序列相独立. Y 为随机和 $\sum\limits_{i=1}^{N} X_i$. 求 Y 的矩母函数 $g_Y(t)$.

解 为求 g_Y, 先算条件期望

$$\begin{aligned} E[e^{tY} \mid N = n] &= E\left[\exp\left\{t\sum_{i=1}^{N} X_i\right\} \mid N = n\right] \\ &= E\left[\exp\left\{t\sum_{i=1}^{n} X_i\right\} \mid N = n\right] \\ &= E\left[\exp\left\{t\sum_{i=1}^{n} X_i\right\}\right] = [g_X(t)]^n. \end{aligned}$$

于是有 $g_Y(t) = E[\exp\{tY\}] = E\{E[\exp\{tY\}|N]\} = E[(g_X(t))^N]$. 对 $g_Y(t)$ 关于 t 求导即有

$$\begin{aligned} g'_Y(t) &= E[N(g_X(t))^{N-1}g'_X(t)], \\ g''_Y(t) &= E[N(N-1)(g_X(t))^{N-2}(g'_X(t))^2 + N(g_X(t))^{N-1}g''_X(t)]. \end{aligned}$$

将 $t = 0$ 代入上面两式得

$$\begin{aligned} EY &= E[NE(X)] = EN \cdot EX, \\ EY^2 &= EN \cdot \mathrm{Var}X + EN^2 \cdot E^2X, \\ \mathrm{Var}Y &= EN \cdot \mathrm{Var}X + E^2X \cdot \mathrm{Var}N. \end{aligned} \tag{1.20}$$

定义 1.6 若 X 为离散随机变量, 则期望 $E(s^X)$ 为其概率生成函数, 记作 $\phi_X(s)$. 特别地, 若 $P(X = k) = p_k, k = 0, 1, 2, \cdots$, 则 $\phi_X(s) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k s^k$.

由定义知, $\phi_X(s)$ 是以概率 p_k 为系数的幂级数. $\phi_X(s)$ 与 X 的概率分布也是一一对应的, 而且有 $p_0 = \phi_X(0)$,

$$p_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}\phi_X(s)|_{s=1}, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{1.21}$$

与矩母函数的性质类似, 若 X, Y 为独立随机变量, 则它们和式的概率生成函数为

$$\phi_{X+Y}(s) = \phi_X(s)\phi_Y(s), \tag{1.22}$$

而 X 的期望及有关高阶矩也可由 $\phi_X(s)$ 关于 s 的导函数在 $s = 1$ 时的值来确定:

$$\begin{aligned} EX &= \phi'_X(s)|_{s=1}, \\ E\{X(X-1)\cdots(X-r+1)\} &= \frac{d^r}{ds^r}\phi_X(s)|_{s=1}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

在随机和的情形, 若 X_i 为离散随机变量, 其概率生成函数为 $\phi_X(s)$, 则对 $Y = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$ 有

$$\begin{aligned} \phi_Y(s) &= E(s^Y) = E\{E[s^Y \mid N]\} \\ &= E\{(\phi_X(s))^N\} = \phi_N(\phi_X(\phi)). \end{aligned} \tag{1.24}$$

也即 Y 的生成函数是由 N 与 X 的概率生成函数复合而成的.

1.3 收 敛 性

定义 1.7 设 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是一列随机变量, 若存在随机变量 X, 使对 $\forall \varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0, \tag{1.25}$$

则称随机变量序列 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 依概率收敛于 X, 记为 $X_n \xrightarrow{P} X$.

如果事件 $\{\omega : \lim\limits_{n\to\infty}(X_n(\omega) - X(\omega)) = 0\}$ 的概率为 1, 即

$$P(\lim_{n\to\infty}(X_n - X) = 0) = 1, \tag{1.26}$$

则称随机变量序列 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 几乎必然 (almost sure) 收敛于 X, 记为 $X_n \to X$, a.s., 也称随机变量序列以概率 1 收敛于 X.

定义 1.8 设随机变量 X 和 $X_n, n \geqslant 1$, 都有有限的二阶矩, 如果

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n - X)^2 = 0, \tag{1.27}$$

则称 X_n 均方收敛于 X, 记为 $X_n \xrightarrow{L_2} X$. 这里 "均" 是平均, "方" 是平方.

这三种收敛性之间的关系是: 均方收敛和几乎必然收敛都蕴涵依概率收敛, 反过来不必成立; 其次均方收敛和几乎必然收敛互不包含.

第2章 Poisson 过程

2.1 Poisson 过程

定义 2.1 一个整数值随机过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 满足下述三个条件就称作强度为 $\lambda > 0$ 的 Poisson 过程:

(i) $N(0) = 0$;

(ii) $N(t)$ 是独立增量过程;

(iii) 对任何 $t > 0$, $s \geqslant 0$, 增量 $N(s + t) - N(t)$ 服从参数为 λt 的 Poisson 分布, 即

$$P\{N(s + t) - N(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k \exp\{-\lambda t\}}{k!}, \quad k = 0, 1, \cdots. \tag{2.1}$$

定义的条件 (i) 告诉我们随机事件从时刻 0 开始计数, 条件 (iii) 是过程称为 Poisson 过程的直接理由. 由 Poisson 分布的性质我们马上可以求出 $EN(t) = \mathrm{Var}[N(t)] = \lambda t$. 增量 $N(s + t) - N(t)$ 代表时间区间 $(s, s + t]$ 中发生的随机事件数, 由条件 (iii), 这一增量的分布与 s 无关因而增量具有平稳性. 因此条件 (ii) 和 (iii) 充分刻画了模型所要求的两个性质: 前后的独立性与时间上的均匀性. 强度 λ 有时也称为速率, 它描绘随机事件发生的频繁程度.

稀有事件的概率常服从 Poisson 分布. 这是由于当试验次数很多而每次试验成功的概率很小时, Poisson 分布可以逼近二项分布. 若记 N 为试验次数, p 为成功概率, 而当 N 很大时, Np 趋于一个常量 λ, 则 N 次试验中的总成功次数近似地服从参数为 λ 的 Poisson 分布. 这一想法很自然地可以推广到随机过程的情况. 记 $[0, \infty)$ 为观察过程的时间轴, 0 代表起始时刻, $N(b) - N(a)$ 代表时间区间 $(a, b]$ 上发生的事件数. 我们特作如下假定:

(1) 在不相交区间中事件发生的数目相互独立, 也即对任何整数 $n = 1, 2, \cdots$, 设时刻 $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, 增量 $N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \cdots N(t_n) - N(t_{n-1})$ 相互独立;

(2) 对任何时刻 t 和正数 h, 随机变量 (增量)$N(t + h) - N(t)$ 的分布只依赖于区间长度 h 而不依赖时刻 t;

(3) 存在正常数 λ, 当 $h \downarrow 0$ 时, 使在长度为 h 的小区间中事件至少发生一次的概率

$$P\{N(t + h) - N(t) \geqslant 1\} = \lambda h + o(h);$$

(4) 在小区间 $(t, t + h]$ 发生两个或两个以上事件的概率为 $o(h)$ (可以忽略不计), 即当 $h \downarrow 0$,

$$P\{N(t + h) - N(t) \geqslant 2\} = o(h).$$

从逼近的观点看, (1) 说明试验是独立的; (2) 说明在每个长度相同的小区间上事件发生有相同的概率 p; (3) 告诉我们成功 (事件发生) 概率 $p \doteq \lambda h$, 而且 p 很小; (4) 是说明事件不发生的概率为 $1 - \lambda h \doteq 1 - p$. 这正好是独立 Bernoulli 试验的模型. 若观察区间为 $[0, 1]$, 则 $N \doteq \dfrac{t}{h}$, 所以当 $h \downarrow 0$ 时, $N \to \infty$, 而 $Np \doteq \lambda t$. 从而二项分布的极限是参数为 λt 的 Poisson 分布. 从直观意义看, 如前所述 (1) 为前后的独立性, (2) 为时间上的均匀性或齐次性, (3) 表明事件是稀有的, 而 (4) 则称为相继性 (orderliness), 意思指事件是一件一件地发生的, 在同一瞬间同时发生多个事件的可能性很小很小. 基于这些假定我们可以证明如下结论.

命题 2.1 满足假定 (1) ~ (4) 的随机过程 $N(t)$ 为 Poisson 过程.

2.2 与 Poisson 过程相联系的若干分布

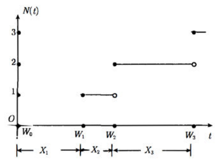

图 2.1 Poisson 过程的样本路径

图 2.1 中第 $n - 1$ 次与第 n 次事件间的间隔时间记作 X_n, 而 $W_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 为第 n 次事件的到达或等待时间. 我们来求 X_n 与 W_n 的分布.

命题 2.2 $X_n, n = 1, 2, \cdots$ 是均值为 $\dfrac{1}{\lambda}$ 的独立同分布的指数随机变量, W_n 服从参数为 n 和 λ 的 Γ 分布.

的 Poisson 过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$. λ 越大表明事件平均间隔时间 $\dfrac{1}{\lambda}$ 越短, 事件的发生就越频繁, 强度也就越大.

给定了到时刻 t 总计发生了 n 件事, 在过去某时刻 $u < t$ 发生了 k 件事的条件概率可由习题 2 第 1 题知道是二项分布. 但人们常常对给定 $N(t) = n$ 事件发生后 $W_1, \cdots, W_n$ 的联合分布更感兴趣. 关于这一条件联合分布, 我们有如下定理.

定理 2.1 若 $N(t), t \geqslant 0$ 为 Poisson 过程, 则给定 $N(t) = n$ 下等待时间 $W_1, \cdots, W_n$ 的联合密度为

$$f_{W_1,\cdots,W_n|N(t)=n}(w_1, \cdots, w_n|n) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < w_1 < \cdots < w_n \leqslant t. \tag{2.6}$$

熟悉数理统计的读者马上可以看出联合密度 (2.6) 似曾相识. 若从 $[0, 1]$ 区间上的均匀分布抽取 n 个独立同分布的随机样本 $U_1, \cdots, U_n$, 并按其大小排列成次序统计量, 记为 $U_{(1)} \leqslant U_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant U_{(n)}$, 则 $U_{(i)}, i = 1, \cdots, n$ 的联合密度正好是 (2.6). 有关证明可参看陈希孺等编的《数理统计学教程》, 上海科学技术出版社,

例 2.2 顾客依速率为 λ 的 Poisson 过程到达车站. 若火车在时刻 t 离站, 问在 $(0, t]$ 区间里顾客的平均总等待时间是多少?

解 作为依 Poisson 过程到达的第一位顾客, 他的到达时间为 W_1, 等到时刻 t 发车需等待 $t - W_1$. 而第 i 位旅客的等待时间为 $t - W_i$. 在 $(0, t]$ 区段总共来了 $N(t)$ 位客人, 所以总等待时间为 $\sum\limits_{i=1}^{N(t)}(t - W_i)$. 而所要求的平均总等待时间就是 $E\left[\sum\limits_{i=1}^{N(t)}(t - W_i)\right]$. 为求出它可以先求条件期望

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t - W_i)|N(t) = n\right] &= E\left[\sum_{i=1}^{n}(t - W_i)|N(t) = n\right] \\ &= nt - E\left[\sum_{i=1}^{n} W_i|N(t) = n\right]. \end{aligned}$$

注意到给定 $N(t) = n, W_i, i = 1, \cdots, n$ 的联合密度是与 $(0, t]$ 上均匀分布中随机样本 $U_i, i = 1, \cdots, n$ 的次序统计量 $U_{(i)}, i = 1, \cdots, n$ 的联合密度是一样的. 于是,

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} W_i|N(t) = n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} U_{(i)}\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} U_i\right] = \frac{nt}{2}.$$

因此,

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t - W_i)|N(t) = n\right] = nt - \frac{nt}{2} = \frac{nt}{2}.$$

最后得到

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t - W_i)\right] = \frac{t}{2}E[N(t)] = \frac{\lambda t^2}{2}.$$

可以看到顾客平均总等待时间是和 t^2 成正比的, 比例因子的大小取决于 Poisson 过程的强度 λ.

2.3 Poisson 过程的推广

2.3.1 非齐次 Poisson 过程

Poisson 过程 $N(t)$ 中的强度 λ 是常数, 它是事件在某一小区间上的概率与区间长度的比例因子. 更确切地说,

如果允许这一比例因子依赖于时刻 t, 所得的过程就是非齐次 Poisson 过程. 其参数为 t 的函数 $\lambda(t)$. 这也提供了过程增量不平稳的例子. 此时,

$$\begin{aligned} &P\{N(t + h) - N(t) = k\} \\ &= \frac{\left(\int_t^{t+h} \lambda(u)du\right)^k \exp\left(-\int_t^{t+h} \lambda(u)du\right)}{k!}, \quad k = 0, 1, \cdots. \end{aligned} \tag{2.8}$$

人们只需将 2.1 节中的假定 (3) 改为 (3)′:

$$P\{N(t + h) - N(t) \geqslant 1\} = \lambda(t)h + o(h)$$

就可以完全类似地证明.

命题 2.3 在 2.1 节的假定 (1), (4) 和本节假定 (3)′ 下过程 $N(t)$ 是参数为 $\lambda(t)$ 的非齐次 Poisson 过程, 过程增量 $N(t + h) - N(t)$ 的分布为 (2.8) 式.

例 2.3 (记录值) 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots$ 是一串独立同分布连续随机变量, 分布为 $F(t)$, 密度函数为 $f(t)$. 当 X_i 代表某一元件的寿命时, $\lambda(t) = f(t)/(1 - F(t))$ 常定义为失效率. 它的直观意义是 $\lambda(t)$ 近似地等于 $P(X_1 = t|X_1 \geqslant t)$, 即元件在时刻 t 仍在工作而在下一瞬间 t 失效的条件概率密度. 记 $X_0 \equiv 0$, 当 $X_n > \max(X_1, \cdots, X_{n-1})$ 时, 也就是当 X_n 的值超过以往任何记录时称在时刻 n 创了记录. X_n 则称为是所创的记录值. 记录值比 t 小的新记录的次数记为 $N(t)$. 也即若记录值次数为 $N(t)$, 则第 n 次记录值在 t 时刻之前发生. 过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 为一非齐次 Poisson 过程, 其强度函数正好是失效率 $\lambda(t)$. 比如,

$$\begin{aligned} P(N(t) = 0) &= P(X_1 > t) = 1 - F(t) = \exp\{\ln(1 - F(t))\} \\ &= \exp\left[-\int_0^t \frac{dF(u)}{1 - F(u)}\right] = \exp\left[-\int_0^t \frac{f(u)du}{1 - F(u)}\right] \\ &= \frac{\left(\int_0^t \lambda(u)du\right)^k}{k!} \exp\left[-\int_0^t \lambda(u)du\right]_{k=0} \end{aligned}$$

正好是 (2.8) 式中 $k = 0$ 的情形.

有兴趣的读者可自行证明本例. 记录值的模型也解释了为什么常用 Poisson 过程来描述事故与灾难的发生过程, 因为灾害就是负面的破纪录.

2.3.5 更新过程

由命题 2.2 知事件的间隔时间 X_i 相互独立且有相同的均值为 $\dfrac{1}{\lambda}$ 的指数分布. 这是 Poisson 过程的重要的特征. 如果把时间间隔 X_i 服从的指数分布改为一般的分布函数 $F(x)$, 那么所得的将会是什么过程呢? 这就是所谓的更新过程.

定义 2.3 如果 X_i, $i = 1, 2, \cdots$ 为一串非负的随机变量, 它们独立同分布, 分布函数为 $F(x)$. 记 $W_0 = 0$, $W_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, W_n 表示第 n 次事件发生的时刻, 则称

$$N(t) = \max\{n : W_n \leqslant t\}$$

为更新过程.

定义中 $N(t)$ 代表了到时刻 t 时事件的总数. W_i, $i = 1, 2, \cdots$, 也常常称为是更新点, 在这些更新点上过程又重新开始. 在更新过程中事件平均发生的次数称为是更新函数, 记作 $m(t)$, 即 $m(t) = E[N(t)]$. 更新理论的主体是研究更新函数的性质, 我们仅给出最基本的.

命题 2.4 更新过程 $N(t)$ 的分布

$$P\{N(t) = n\} = F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t),$$

而更新函数 $m(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t)$. 其中 $F^{(n)}(t)$ 为 $F(t)$ 的 n 重卷积, $F(t)$ 即为 X_i 的分布函数.

证 首先不难看出到时刻 t 的更新总数大于或等于 n 是与第 n 次更新发生在时刻 t 前是等价的, 也即有

$$\{N(t) \geqslant n\} \Longleftrightarrow \{W_n \leqslant t\}.$$

于是

$$\begin{aligned} P\{N(t) = n\} &= P\{N(t) \geqslant n\} - P\{N(t) \geqslant n + 1\} \\ &= P\{W_n \leqslant t\} - P\{W_{n+1} \leqslant t\} \\ &= F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t). \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} EN[(t)] &= E\left[\sum_{n=1}^{\infty} I_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[I_n] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{I_n = 1\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{W_n \leqslant t\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t). \end{aligned} \tag{2.10}$$

第3章 Markov 过程

3.1 Markov 链的定义和例子

从本节起我们主要考虑随机过程 $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$, 下标 n 常代表时间. X_n 取值的状态空间为有限集或可列集, 状态空间中的元素可以记为非负整数 $0, 1, 2, \cdots$, 它们称为随机过程所处的状态. 比如, 当 $X_n = i$, 就称过程在时间 n 处于状态 i.

定义 3.1 如果对任何一列状态 $i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}, i, j$, 及对任何 $n \geqslant 0$, 随机过程 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 满足 Markov 性质

$$\begin{aligned} &P\{X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\} \\ &= P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

则称 X_n 为离散时间 Markov 链.

定义 3.2 设 X_n 为一离散时间 Markov 链. 给定 X_n 在状态 i 时, X_{n+1} 处于状态 j 的条件概率 $P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$ 称为 Markov 链的一步转移概率, 记作 $P_{ij}^{n,n+1}$. 当这一概率与 n 无关时称该 Markov 链有平稳转移概率, 并记为 P_{ij}.

我们将主要讨论有平稳转移概率的 Markov 链, 它也称作时间齐性 Markov 链或简称时齐 Markov 链. 由于概率是非负的, 而且过程总要转移到某一状态去, 所以很自然地有: 对任意 $i, j \geqslant 0$,

$$P_{ij} \geqslant 0 \text{ 且 } \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1. \tag{3.2}$$

当然在此我们把过程留在原地也看成是一种 "转移", 即从 i 转移到 i. 通常把 P_{ij} 排成一个无穷维的方阵. 记作

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots \\ & & \vdots & \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & \cdots \\ & & \vdots & \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

$\boldsymbol{P} = (P_{ij})$ 称为 Markov 链的转移概率矩阵, 矩阵的第 $i + 1$ 行就是给定 $X_n = i$ 时, X_{n+1} 的条件概率分布. 当 Markov 链的状态总数是有限时, 则 $\boldsymbol{P}$ 就是有限阶的方阵, 其阶数正好是状态空间中状态的总数. 先看一个简单的例子.

分析中, 人们主要关心过程的可能实现的概率有多大. 在其计算中, n 步转移概率 $P_{ij}^{(n)} = P\{X_{m+n} = j|X_m = i\}$ 是一个关键的量, 它表示给定当前时刻 m 时过程处于状态 i 间隔 n 步之后过程在时刻 $m+n$ 时转移到了状态 j 的条件概率. 以 $P_{ij}^{(n)}$ 为 (i, j) 元的矩阵 $(P_{ij}^{(n)})$ 记作 $\boldsymbol{P}^{(n)}$, 它是 Markov 链的 n 步转移概率矩阵. 有趣的是 $\boldsymbol{P}^{(n)}$ 可以通过转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$ 求出. 确切地讲, 我们有 $\boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{P} \times \cdots \times \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^n$, 也即 $\boldsymbol{P}^{(n)}$ 可由一步转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$ 自乘 n 次得到. 这就是下面的定理.

定理 3.1 Markov 链的 n 步转移概率矩阵满足

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}P_{kj}^{(n-1)}, \tag{3.5}$$

在上式中我们约定 $P_{ii}^{(0)} = 1$, 当 $j \neq i$ 时 $P_{ij}^{(0)} = 0$.

若将 (3.5) 式写成矩阵形式, 由矩阵的乘法规则正好是 $\boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{P}^{(n-1)}$. 于是有 $\boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{P}^{n-1} = \boldsymbol{P}^n$, 更一般的, 对任何 $m, n \geqslant 0, \boldsymbol{P}^{(m+n)} = \boldsymbol{P}^{(n)} \times \boldsymbol{P}^{(m)}$. 把矩阵相乘形式写成其元素的方程就是著名的 Chapman-Kolmogorov 方程

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(n)}P_{kj}^{(m)}. \tag{3.6}$$

3.2 Markov 链的状态分类

3.2.1 互达性和周期性

定义 3.3 (可达与互达) 如果对某一 $n \geqslant 0$, 有 $P_{ij}^{(n)} > 0$, 则称状态 j 是从状态 i 可达的 (accessible), 记作 $i \to j$. 它表示从状态 i 经过有限步的转移可以到达状态 j. 两个互相可达的状态 i 和 j 则称为互达的 (communicate), 记作 $i \leftrightarrow j$.

如果两个状态 i 和 j 不是互达的, 那就有对所有 $n \geqslant 0, P_{ij}^{(n)} = 0$ 或者对所有 $n \geqslant 0$, $P_{ji}^{(n)} = 0$, 或者两者都成立. 三种情况必居其一. 互达性是一种数学上的等价关系, 也就是说它满足自反性、对称性和传递性.

命题 3.1 互达性是等价关系, 即

(i) $i \leftrightarrow i$, 自反性;

(ii) 若 $i \leftrightarrow j$, 则 $j \leftrightarrow i$, 对称性;

(iii) 若 $i \leftrightarrow j$, 且 $j \leftrightarrow k$, 则 $i \leftrightarrow k$, 传递性.

证 (i) 和 (ii) 由互达性的定义马上即可证明. 现仅证明 (iii). 假如 $i \leftrightarrow j$, 则存在整数 n 使 $P_{ij}^{(n)} > 0$, 又由 $j \leftrightarrow k$ 知, 存在整数 m 使 $P_{jk}^{(m)} > 0$. 由 (3.6) 式 Chapman-Kolmogorov 方程

$$P_{ik}^{(n+m)} = \sum_{r=0}^{\infty} P_{ir}^{(n)}P_{rk}^{(m)} \geqslant P_{ij}^{(n)}P_{jk}^{(m)} > 0.$$

类似地可以证明存在 s 使 $P_{ki}^{(s)} > 0$. 于是由定义得 $i \leftrightarrow j$.

两个状态如果是互达的就称它们是处在同一类中. Markov 链的所有状态就由互达这一等价关系而分割成不同的等价类. 由命题 3.1 我们立刻知道两个类要么互不相交, 要么完全重合. 如果在互达性这一等价关系下 Markov 链的所有状态都居于同一类, 那么就称这个 Markov 链是不可约的 (irreducible). 换言之, 不可约过程的各个状态都是互达的.

例 3.6 若 Markov 链有转移概率矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

则显见 $\{1, 2\}$ 和 $\{3, 4, 5\}$ 是状态在互达意义下的两个等价类. 这个链是可约的. 我们可以把它分成两个链来研究. 参看图 3.1.

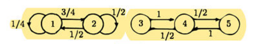

图 3.1

定义 3.4 状态 i 的周期. 设 i 为 Markov 链的一个状态, 使 $P_{ii}^{(n)} > 0$ 的所有正整数 n $(n \geqslant 1)$ 的最大公约数称作是状态 i 的周期, 记作 $d(i)$. 如果对所有 $n \geqslant 1$, 都有 $P_{ii}^{(n)} = 0$ 则约定周期为 ∞; $d(i) = 1$ 的状态 i 则称为是非周期的.

由定义立即可知, 如果 n 不能被周期 $d(i)$ 整除, 则必有 $P_{ii}^{(n)} = 0$.

命题 3.2 如果 $i \leftrightarrow j$ 则 $d(i) = d(j)$.

命题 3.3 如果状态 i 有周期 $d(i)$, 则存在整数 N, 使得对所有的 $n>N$ 恒有 $P_{ii}^{(nd(i))}>0$.

推论 3.1 如果 $P_{ji}^{(m)}>0$, 则存在正整数 N 使得对 $n\geqslant N$ 恒有 $P_{ji}^{(m+nd(i))}>0$.

否存在? 存在的条件是什么? 如果存在又如何简便地求出它们? 周期性是一种等价类中全体状态共有的性质. 当周期为 1 时, Markov 链称为是非周期的. 对非周期不可约的 Markov 链我们有如下结论.

命题 3.4 令 P 为不可约、非周期、有限状态 Markov 链的转移概率阵, 则必存在 N, 使得当 $n\geqslant N$ 时, n 步转移概率阵 $P^{(n)}$ 的所有元素都非零.

这种存在 n 使 P^n 的元素全部非零的 k 个状态 (记为 $0,1,\cdots,k-1$) 的 Markov 链称为是正则的. 而最重要的事实是对一个正则的有限状态 Markov 链, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}$ 总是存在的, 记为 π_j (注意极限与初始状态 i 无关). 并且这些极限构成一概率分布, 即对 $\pi=(\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_{k-1})$, 满足 $\pi_j>0$, $j=0,1,\cdots,k-1$, 及 $\sum\limits_j\pi_j=1$. 这些是下一节极限定理和平稳分布所要讨论的内容.

3.2.2 常返 (recurrent) 与瞬过 (transient)

为了以下讨论的方便, 我们引入一个重要的概率 $f_{ij}^{(n)}$, 它表示从 i 出发在 n 步转移时首次到达 j 的概率. 用式子表达即是

$$f_{ij}^{(0)}=0,$$
$$f_{ij}^{(n)}=P\{X_n=j,X_k\neq j,k=1,\cdots,n-1|X_0=i\},$$

而 $f_{ii}^{(n)}$ 就代表从 i 出发在第 n 次转移时首次回到状态 i 的概率. 因不曾出发就不可能有回来, 所以约定 $f_{ii}^{(0)}=0$. 同样定义

$$f_{ii}^{(n)}=P\{X_n=i,X_k\neq i,k=1,\cdots,n-1|X_0=i\}.$$

记 $f_{ij}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}$, 它是从 i 出发最终转入状态 j 的概率. 当 $i\neq j$, 则 $i\to j$ 当且仅当 $f_{ij}>0$. 现在可以给出如下定义.

定义 3.5 如果 $f_{ii}=1$, 我们称状态 i 是常返 (recurrent) 的. 一个非常返状态就称为瞬过 (transient) 的.

定理 3.2 状态 i 常返的充分必要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty}P_{ii}^{(n)}=\infty. \tag{3.8}$$

当然与此等价地有, 状态 i 是瞬过的当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty}P_{ii}^{(n)}<\infty. \tag{3.9}$$

推论 3.2 如果 i 是常返的, 且 $i\leftrightarrow j$, 则 j 也是常返的.

对常返状态 i, 我们定义 T_i 为首次返回状态 i 的时刻, 称作常返时. 记 $\mu_i=ET_i$, 则有

$$\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ii}^{(n)}. \tag{3.10}$$

回想 $f_{ii}^{(n)}$ 代表从 i 出发在第 n 步转移时首次回到 i 的概率, 所以 μ_i 是首次返回 i 的期望步数, 也叫状态 i 的平均常返时. 利用 μ_i 可以对常返状态作进一步的分类, 分为零常返和正常返.

定义 3.6 一个常返状态 i 当且仅当 $\mu_i=\infty$ 时称为零常返的, 而当且仅当 $\mu_i<\infty$ 时称为正常返的.

对于只有有限多个状态的 Markov 链, μ_i 总是有限的, 所以只有在有可列无穷多个状态时才可能出现零常返的状态 (参看习题 3 第 15 题). 当状态数目不大时直

3.3 Markov 链的极限定理与平稳分布

在上一节有关 Markov 链状态分类的讨论中已经引进了常返状态 i 的常返时 T_i. 它还可记为

$$T_i=\min\{n\geqslant1:X_n=i\},$$

而

$$f_{ii}^{(n)}=P\{X_n=i,X_k\neq i,k=1,\cdots,n-1|X_0=i\}$$
$$=P\{T_i=n|X_0=i\},\quad n=1,2,\cdots$$

表示了 T_i 的条件概率分布, $\mu_i=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nf_{ii}^{(n)}$ 则为 T_i 在给定 $X_0=i$ 时的条件期望.

定理 3.3 Markov 链的基本极限定理

(a) 若状态 i 是瞬过的或者是零常返的, 则

$$\lim_{n\to\infty}P_{ii}^{(n)}=0. \tag{3.11}$$

(b) 若状态 i 是周期为 d 的常返状态, 则

$$\lim_{n\to\infty}P_{ii}^{(nd)}=\frac{d}{\mu_i}. \tag{3.12}$$

(c) 当状态 i 是非周期的正常返状态, 则

$$\lim_{n\to\infty}P_{ii}^{(n)}=\frac{1}{\mu_i}. \tag{3.13}$$

一个正常返非周期的状态也称作是遍历的 (ergodic). 定理 3. 3(c) 告诉我们对遍历状态 i 有 $\lim\limits_{n\to\infty}P_{ii}^{(n)}=\frac{1}{\mu_i}$, 其中 μ_i 是常返时的期望.

推论 3.3 如果状态 i 是遍历的, 则对所有 $i\to j$ 有

$$\lim_{n\to\infty}P_{ji}^{(n)}=\lim_{n\to\infty}P_{ii}^{(n)}=\frac{1}{\mu_i}.$$

定义 3.7 Markov 链有转移概率阵 $P=(P_{ij})$. 一个概率分布 $\{\pi_i,i\geqslant0\}$ 如果满足 $\pi_j=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\pi_iP_{ij}$, 则称为这一 Markov 链的平稳分布.

很容易看出, 如果过程的初始状态 X_0 有平稳概率分布 $\pi=\{\pi_j,j\geqslant0\}$, 即 $P\{X_0=j\}=\pi_j$. 则有

$$P\{X_1=j\}=\sum_{i=0}^{\infty}P\{X_1=j|X_0=i\}P\{X_0=i\}=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_iP_{ij}=\pi_j.$$

并由归纳法可得

$$P\{X_n=j\}=\sum_{i=0}^{\infty}P\{X_n=j|X_{n-1}=i\}P\{X_{n-1}=i\}=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_iP_{ij}=\pi_j.$$

于是对所有 n, X_n 有相同的分布, 再加上 Markov 性立即可知对任何 $k\geqslant0$, $X_n,X_{n+1},\cdots,X_{n+k}$ 联合分布不依赖于 n. 这就是说, $\{X_n,n\geqslant0\}$ 作为随机过程是平稳的, 平稳分布 π 由此得名. 有了这一概念我们可以讨论重要的定理.

定理 3.4 若一个不可约 Markov 链中的所有状态都是遍历的, 则对所有 i,j, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}=\pi_j$ 存在且 $\pi=\{\pi_j,j\geqslant0\}$ 为平稳分布. 也即

$$\sum_j\pi_j=1,\quad \pi_j>0, \tag{3.15}$$

$$\sum_i\pi_iP_{ij}=\pi_j. \tag{3.16}$$

反之, 若一个不可约 Markov 链只存在一个平稳分布, 即满足 (3.15) 式及 (3.16) 式, 且这个 Markov 链的所有状态都是遍历的. 则该平稳分布就是这一 Markov 链的极限分布, 即对任何 i 有

$$\lim_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}=\pi_j. \tag{3.17}$$

在实际应用中 $\{\pi_j\}$ 有两种解释: 一是作为 $P_{ij}^{(n)}$ 的极限分布, 它告诉我们在过程的长期运行中不论初始状态 i 是什么, 经过一段时期后发现过程处于状态 j 的概率就是 π_j. 另一解释是 π_j 也代表了就长期而言过程访问 j 的次数在总时间中的平均份额或比例. 这可从下面的推理中看出. 设

且仅当 $p=q=\frac12$. 于是有当 $p=\frac12$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P_{ii}^{(n)}=\infty$. 因此直线上的对称随机游动是常返的. 显然, 当 $p\neq q$ 过程的状态是瞬过的. 有趣的是, 可以证明二维对称随机游动也是常返的, 而三维以上的对称随机游动却是瞬过的. 具体证明留作练习 (习题 3 第 13 题).

注解: 假设 i 是常返状态, 则 i 为零常返的一个充要条件: $\lim\limits_{n\to\infty}P_{ii}^{(n)}=0$; 零常返和正常返是一个互达等价类里共有的性质。

i 遍历+ i → j => i 和 j 互达。

15. 考虑一有限状态的 Markov 链. 试证明
(a) 至少有一个状态是常返的,
(b) 任何常返状态必定是正常返的.

第4章 平稳过程

4.1 定义和例子

以下设 T 为具有如下性质的下标集合: 若 $t_1,t_2\in T$, 则 $t_1+t_2\in T$. 通常 T 取如下几种集合之一:

(i) $T=\{0,1,2,\cdots\}$;
(ii) $T=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$;
(iii) $T=\{t:t\geqslant0\}$;
(iv) $T=\{t:-\infty<t<\infty\}$.

直观上, 下标集合可以理解为时间 (当然, T 也可以表示空间位置或其他).

定义 4.1 设 $X=\{X(t),t\in T\}$ 为一随机过程, 若对任意正整数 k 及 T 中任意 k 个时刻 $t_1<t_2<\cdots<t_k$, 及 T 中的 h, 有

$$\{X(t_1),\cdots,X(t_k)\}\overset{d}{=}\{X(t_1+h),\cdots,X(t_k+h)\}, \tag{4.1}$$

则随机过程 X 称为严平稳过程. 这里 "d" 表示等式两边 k 维随机向量的分布相同.

注 4.1 如果 $T=\{0,\pm1,\cdots\}$, 我们一般把 X 称为随机序列. 如果 X 还是严平稳的, 则称为严平稳序列, 以下不再一一说明.

设 $X=\{X(t),t\in T\}$ 为严平稳过程, 由定义如果均值函数 $m(t)=EX(t)$ 存在, 则必为常数, 即 $m(t)=m,t\in T$. 同样, 如果方差函数存在, 则 $\mathrm{Var}(X(t))=E(X(t)-m)^2$ 也是一个常数, 记为 σ^2. 设 $s,t\in T$ (不妨设 $s<t$), 由平稳性, 其协方差函数

$$E(X(t)-m)(X(s)-m)=E(X(t-s)-m)(X(0)-m).$$

等式右端只依赖于时间差 $t-s$. 若记

$$R(h)=E(X(h)-m)(X(0)-m),$$

则

$$E(X(t+h)-m)(X(t)-m)=R(h),$$

即协方差函数仅与时间差有关, 而与起点无关. 当然, 由定义知 $\mathrm{Var}(X(t))=R(0)$. 此外, 易知 $r(\tau)=EX(t)X(t+\tau)$ 与起点 t 无关, 我们分别称 $r(\tau)$ 和

$$\rho(v)=R(v)/\sigma^2=R(v)/R(0)$$

为平稳过程 X 的自相关函数和标准自相关函数. 由概率论中相关系数性质易知 $\rho(0)=1$ 及 $|\rho(v)|\leqslant1$.

定义 4.2 设 $X=\{X(t),t\in T\}$ 为一实值随机过程, 如果对 $\forall t\in T$, $EX^2(t)<\infty$, $EX(t)=m$ 以及协方差函数 $E(X(t)-m)(X(s)-m)$ 仅与 $t-s$ 有关, 则称 X 为宽平稳随机过程.

一般来说, 这两个过程是互不包含的, 即严平稳由于不一定有二阶矩而不必是宽平稳; 反之, 宽平稳由于其有限维联合分布可能不满足 (4.1) 式而不一定是严平稳. 但只要过程的二阶矩存在, 则严平稳过程一定是宽平稳过程.

例 4.4 设 Z 为非零随机变量, 考虑如下两个随机过程: $X=\{X(t)=tZ,t\in T\}$, $Y=\{Y(t)=Z,t\in T\}$. 试考察这两个随机过程的平稳性.

解 对随机过程 Y 而言, 由于在时刻 t 的取值与 t 无关, 故必然是严平稳的. 如果 $EZ^2<\infty$, 则 Y 也是宽平稳的. 至于随机过程 X, 由于其一维分布与 t 有关, 所以必然不是严平稳的. 其次, 即使 $EZ^2<\infty$, 如果 $EZ\neq0$, 则 $EX(t)=tEZ$ 与 t 有关, 因此不是宽平稳. 如果 $EZ=0$, 由于 $EX(t)X(s)=tsEZ^2$ 与 t,s 有关, 故仍不是宽平稳的.

定义 4.3 设 $G=\{G(t),-\infty<t<\infty\}$ 为一随机过程, 如果对任一正整数 k 以及 k 个时刻 $t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_k$, $(G(t_1),G(t_2),\cdots,G(t_k))$ 的联合分布为 k 维正态分布, 则称 G 为高斯(Gauss) 过程.

我们知道, k 维正态分布完全由协方差矩阵和均值向量所唯一确定, 而这些量仅与它们的二阶矩有关, 所以对 Gauss 过程而言, 两个平稳的定义是等价的.

以下主要研究宽平稳过程. 为方便起见, 我们就称宽平稳过程为平稳过程.

定义 4.4 设 $X=\{X(t),t\in T\}$ 为平稳过程, 如果存在正常数 κ 使

$$X(t+\kappa)=X(t),$$

则 X 称为周期平稳过程, κ 为过程的周期. 如果 X 是周期平稳过程, 则其协方差函数也是周期函数, 且与过程有相同的周期. 这是由于

还可以考虑复平稳过程. 其定义与定义 4.2 类似, 差别一是把 $X(t)$ 改为复值, 二是把协方差函数定义为 $E(X(t)-m)\cdot\overline{(X(s)-m)}$, 这里 $\overline{X}$ 表示 X 的共轭.

4.2 遍历性定理

定义 4.5 设 $X=\{X(t),-\infty<t<\infty\}$ 为一平稳过程(或序列), 若

$$\overline{X}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt\overset{L_2}{=}m \tag{4.6}$$

或

$$\overline{X}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}X(k)\overset{L_2}{=}m, \tag{4.7}$$

则称 X 的均值有遍历性. 如果

$$\hat{R}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(X(t)-m)(X(t+\tau)-m)dt\overset{L_2}{=}R(\tau) \tag{4.8}$$

或

$$\hat{R}(\tau)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=1}^{n}(X(k+\tau)-\hat{m}_n)(X(k)-\hat{m}_n)\overset{L_2}{=}R(\tau), \tag{4.9}$$

则称 X 的协方差函数有遍历性. 若随机过程(或序列)的均值和协方差函数都有遍历性, 则称此随机过程有遍历性.

注意, 我们这里的极限是定义 1.8 中的均方极限, 以 (4.6) 式为例, 即

$$E\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt-m\right)^2\to0\quad(T\to\infty).$$

遍历性又称各态历经性. 直观上可以这样理解: 考虑只有有限个状态的平稳序列

关于遍历性的定义式 (4.6) ~ (4.9), 当只取非负实数 (非负正整数) 时, 相应的积分和求和就限制在 $[0,\infty)$ 上. 例如, 相应于 (4.6) 式和 (4.7) 式的定义改为

$$\overline{X}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^TX(t)dt\overset{L_2}{=}m \tag{4.10}$$

或

$$\overline{X}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}X(k)\overset{L_2}{=}m. \tag{4.11}$$

定理 4.1 (均值遍历性定理)

(i) 设 $X=\{X_n,n=0,\pm1,\cdots\}$ 为平稳序列, 其协方差函数为 $R(\tau)$, 则 X 有遍历性的充分必要条件是

$$\lim_{N\to\infty}\frac1N\sum_{\tau=0}^{N-1}R(\tau)=0.$$

(ii) 若 $X=\{X(t),-\infty<t<\infty\}$ 为平稳过程, 则 X 有遍历性的充分必要条件是

$$\lim_{T\to\infty}\frac1T\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})R(\tau)d\tau=0.$$

推论 4.1 若 $\int_{-\infty}^{\infty}|R(\tau)|<\infty$, 则均值遍历性成立.

推论 4.2 对平稳序列而言, 若 $R(\tau)\to0(\tau\to\infty)$, 则均值遍历性成立.

定理 4.2 (协方差函数遍历性定理) 设 $X=\{X(t),-\infty<t<\infty\}$ 为平稳过程, $Y_\tau=\{Y_\tau(t),-\infty<t<\infty\}$ 其中 Y_τ 由上面所定义, 则对给定的 τ, X 的协方差函数 $R(\tau)$ 有遍历性的充分必要条件是

$$\lim_{T\to\infty}\frac1T\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau_1}{2T}\right)(B(\tau_1)-R^2(\tau))d\tau_1=0,$$

其中

$$B(\tau_1)=EX(t+\tau+\tau_1)X(t+\tau_1)X(t+\tau)X(t).$$

对于定义在 $[0,\infty)$ 上的平稳过程, 只要把遍历性理解为 (4.10), (4.11) 等式, 则定理 4.1 和定理 4.2 仍成立.

定理 4.3 设 $X=\{X_n,n=0,\pm1,\cdots\}$ 是均值为 0 的 Gauss 平稳过程, 如果

$$\lim_{T\to\infty}\frac1N\sum_{k=0}^{N-1}R^2(k)=0,$$

则 Gauss 过程的协方差函数有遍历性.

4.3 平稳过程的协方差函数和功率谱密度

4.3.1 协方差函数

对平稳过程 X 的协方差函数 $R(\tau)$, 容易由定义得到如下性质:

1. 对称性, 即 $R(-\tau)=R(\tau)$.
2. 有界性, 即 $|R(\tau)|\leqslant R(0)$.
3. 非负定性. 即对任意的时刻 t_n 及实数 a_n, $n=1,2,\cdots,N$, 有

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}a_na_mR(t_n-t_m)\geqslant0.$$

4.3.3 功率谱密度

下面我们把平均功率谱密度的概念推广到平稳过程 $X=\{X(t),-\infty<t<\infty\}$. 为此, 对每条样本轨道, 根据 (4.21) 式和 (4.24) 式 (设 $S(\omega)$ 存在), 则有

$$F(\omega,T)=\int_{-T}^{T}X(t)e^{-j\omega t}dt \tag{4.25}$$

和

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2T}|F(\omega,T)|^2d\omega. \tag{4.26}$$

注意, (4.25) 和 (4.26) 两式中的量都是随机变量, 所以有意义的是它们的平均值. 我们把过程 X 的平均功率谱密度定义为 (如果极限存在的话)

$$S(\omega)=\lim_{T\to\infty}E\frac{1}{2T}|F(\omega,T)|^2, \tag{4.27}$$

如果把 $-\omega$ 处的谱密度加到 ω 处, 使谱密度只在正半实轴上有定义, 则称为半(功率) 谱密度或单边谱密度. 如用 $G(\omega)$ 表示半谱密度, 则

$$G(\omega)=\begin{cases}\lim_{T\to\infty}\frac1TE|F(\omega,T)|^2, & \omega\geqslant0,\\ 0, & \omega<0,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2S(\omega), & \omega\geqslant0,\\ 0, & \omega<0.\end{cases} \tag{4.32}$$

由 $S(\omega)$ 的定义可知

$$\bar{S}(\omega)=S(\omega)\geqslant0,\qquad S(-\omega)=S(\omega).$$

这是因为 $|F(\omega,T)|^2=F(\omega,T)F(-\omega,T)$ 为实的, 非负偶函数. 其次, 由 (4.27) 定义的平均功率谱密度 $S(\omega)$ 和协方差函数 $R(\tau)$(假定平稳过程的均值为零) 是一对 Fourier 变换. 一般由 (4.27) 定义的平均功率谱密度 $S(\omega)$ 和自相关函数 $r(\tau)$ 也是一对 Fourier 变换. 更具体地, 我们有如下定理.

定理 4.4 (Wiener-Khintchine公式) 假定 $EX(t)=0$, 且 $\int|R(\tau)|d\tau<\infty$, 则

$$S(\omega)=\int R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau, \tag{4.33}$$

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int S(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega. \tag{4.34}$$

注 4.2 由于 $R(\tau)$ 和 $S(\omega)$ 都是偶函数, 故 Wiener-Khintchine 公式还可以写为偶 Fourier 变换形式:

$$S(\omega)=2\int_0^{\infty}R(\tau)\cos\omega\tau d\tau, \tag{4.35}$$

$$R(\tau)=\frac1\pi\int_0^{\infty}S(\omega)\cos\omega\tau d\omega. \tag{4.36}$$

对平稳序列来说, 设 $R(\tau),\tau=0,\pm1,\pm2\cdots$, 为其协方差函数, 且 $\sum|R(\tau)|<\infty$, $S(\omega)$ 为对应的谱密度(即在 (4.25) 式中把积分号改为求和号, 然后由 (4.27) 得到的平均功率谱密度), 则对应于 (4.37) 式和 (4.38) 式的 Wiener-Khintchine 公式为

$$S(\omega)=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}e^{-j\omega\tau}R(\tau), \tag{4.37}$$

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S(\omega)\cos\omega\tau d\omega. \tag{4.38}$$

注 4.3 在 $EX(t)=m$ 时, 由 (4.27) 定义的平均功率谱密度和自相关函数是一对 Fourier 变换, 即

$$S(\omega)=\int r(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau,$$

$$r(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int S(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega.$$

为方便起见, 以下我们总假定 $EX(t)=0$, 表 4.1 列出了若干协方差函数及对应的谱密度.

最常见的谱密度是有理谱密度, 即 $S(\omega)$ 为两个 ω 多项式的比:

$$S(\omega)=\frac{P(\omega)}{Q(\omega)}.$$

由谱密度是 ω 的非负实值偶函数知, $S(\omega)$ 形如

$$s_0\frac{\omega^{2n}+a_{2n-2}\omega^{2n-2}+\cdots+a_2\omega^2+a_0}{\omega^{2m}+b_{2m-2}\omega^{2m-2}+\cdots+b_2\omega^2+b_0},$$

式中 $s_0\neq0$. 又由于 $R(0)>0$, 故 $S(\omega)$ 应在 $[0,\infty)$ 上可积, 从而 $S(\omega)$ 的分母不能有实根, 分母多项式次数至少应比分子高 2 以及 $s_0>0$.

最后需要指出的是在实际问题中会遇到这样一些平稳过程, 它们的协方差函数或谱密度函数在常义下的 Fourier 变换不存在, 比如常数或正弦型函数. 但由 Fourier 分析中知道, 如果允许谱密度和协方差函数中含有 δ 函数, 则在广义 Fourier 变换下, 仍成立 Wiener-Khintchine 公式. 这主要是利用 δ 函数的如下基本性质: 对任一连续函数 $f(\tau)$,

$$\int\delta(\tau-\tau_0)f(\tau)d\tau=f(\tau_0).$$

由此可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega\tau}d\omega=\delta(\tau), \tag{4.39}$$

$$\int\delta(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=1. \tag{4.40}$$

由 (4.39) 式, 当协方差函数为常数 1 时, 对应的谱密度函数为 $2\pi\delta(\omega)$. 反之, 当谱密度为 1 时, 由 (4.39) 知协方差函数为 $\delta(\tau)$. 再由

$$\cos\omega\tau=\frac12(e^{j\omega\tau}+e^{-j\omega\tau}),\qquad \sin\omega\tau=\frac{1}{2j}(e^{j\omega\tau}-e^{-j\omega\tau}).$$

可以得到当谱密度为 $a\cos\omega_0\tau$ 时, 其对应的协方差函数为

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int a\cos\omega_0\tau e^{j\omega\tau}d\omega$$
$$=\frac{a}{4\pi}\left[\int e^{j\omega(\tau+\tau_0)}d\omega+\int e^{j\omega(\tau-\tau_0)}d\omega\right]$$
$$=\frac{a}{2}(\delta(\tau+\tau_0)+\delta(\tau-\tau_0)).$$

表 4.1

$\boldsymbol{R(\tau)\ \to\ S(\omega)}$: $\max\{(1-\frac{|\tau|}{T}),0\}\to\frac{4\sin^2(\frac{\omega T}{2})}{T\omega^2}$; $e^{-a|\tau|}\to\frac{2a}{a^2+\omega^2}$; $(1+k|\tau|)e^{-k|\tau|}\to\frac{4k^3}{(k^2+\omega^2)^2}$; $(1-k|\tau|)e^{-k|\tau|}\to\frac{4k\omega^2}{(k^2+\omega^2)^2}$; $e^{-\frac{k^2\tau^2}{2}}\to\frac{\sqrt{2\pi}}{k}e^{-\frac{\omega^2}{2k^2}}$; $e^{-a|\tau|}cos(\omega_0\tau)\to\frac{a}{a^2+(\omega+\omega_0)^2}+\frac{a}{a^2+(\omega-\omega_0)^2}$; $\frac{sin(\omega_0\tau)}{\pi\tau}\to1(-\omega_0<\omega<\omega_0)\ or\ 0$; $1\to2\pi\delta(\omega)$; $\delta(\tau)\to1$; $cos(\omega_0\tau)\to\pi(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))$

$|\rho|<1,\rho^{|\tau|}\to[\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\omega+\rho^2}],\ \tau=0,\pm1,\dots|[\frac{-ln\rho}{\pi(ln^2\rho+\omega^2)}],0\le\omega\le2\pi,\tau连续]$

离散概率分布	$P(X=x)$	矩母函数	EX	$\mathrm{Var}(X)$
二项分布 $B(n,p)$, $0\leqslant p\leqslant1$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$, $x=0,1,\cdots,n$	$(pe^t+(1-p))^n$	np	$np(1-p)$
Poisson 分布, $\lambda>0$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$, $x=1,2,\cdots$	$\exp\{\lambda(e^t-1)\}$	λ	λ
几何分布, $0\leqslant p\leqslant1$	$p(1-p)^{x-1}$, $x=1,2,\cdots$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$	$\frac1p$	$\frac{1-p}{p^2}$
负二项分布 参数为 r,p	$\binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r}$, $x=r,r+1,\cdots$	$\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r$	$\frac rp$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$

连续概率分布	$f(x)$	$g(t)$	EX	$\mathrm{Var}X$
均匀分布 $U(a,b)$	$\frac{1}{b-a},a<x<b$	$\frac{e^{ta}-e^{tb}}{t(a-b)}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布, $\lambda>0$	$\lambda e^{-\lambda x},x\geqslant0$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$	$\frac1\lambda$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Γ分布$\Gamma(n,\lambda),\lambda>0$	$\frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!},x\geqslant0$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$	$\frac n\lambda$	$\frac{n}{\lambda^2}$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-u)^2/2\sigma^2}$	$\exp\left\{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}\right\}$	μ	σ^2
Beta 分布 $B(a,b)$, $a>0,b>0$	$cx^{a-1}(1-x)^{b-1},0<x<1$, $c=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$		$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

非负随机变量的期望 $ET=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(T>n)=\int_0^{+\infty}P\{T>t\}dt$

指数分布的性质 $P\{T>t\}=e^{-\lambda t}$ $P\{T>t+s\}=P\{T>t\}\cdot P\{T>s\}$

无记忆性 $P\{T>t+s|T>t\}=P\{T>s\}$ 矩 $T\sim Exp(\lambda),S\sim Exp(\ ),有T=\frac{S}{}$

对$T_i\sim Exp(\lambda_i)$且相互独立: 注: $max\{X_i\}$与$min\{X_i\}$有恒等式关系

$P\{min\{T_i\}>t\}=P\{T_1>t,\dots,T_n>t\}=\prod_{i=1}^nP\{T_i>t\}=e^{-\sum_{i=1}^n\lambda_it}$, $min\{T_i\}\sim Exp(\sum_{i=1}^n\lambda_i)$

$P\{T_j=min\{T_i\}\}=\frac{\lambda_j}{\sum\lambda_i}$, 证明可利用联合密度积分或卷积公式$P\{T_1<T_2\}=\int_0^\infty f_{T_1}(u)duP\{u<T_2\}$

泊松分布 $E[X(X-1)\dots(X-k+1)]=\lambda^k$ 叠加 对$X_i\sim Poi(\lambda_i)$且独立, $\sum X_i\sim Poi(\sum\lambda_i)$

泊松过程 对$W_n=\sum X_i\sim\Gamma(n,\lambda)$, $\{N(t)\ge n\}\iff\{T_n\le t\}$, $\{N(t)=n\}\iff\{T_n\le t<T_{n+1}\}$

注意容斥原理, $P\{T_n\le t<T_{n+1}\}=P\{t\ge T_n\}-P\{t\ge T_{n+1}\}$

到达时刻的条件分布 t时刻前有一个顾客到达条件下, $T_1\sim U[0,t]$

$F(s)=P\{T_1\le s|N(t)=1\}=P\{N(s)=1|N(t)=1\}=\frac st$

同理, $F(s_1,\dots,s_n)=P\{T_1\le s_1,\dots,T_n\le s_n|N(t)=n\}=P\{N(s_1)=1,\dots,N(s_n)=n|N(t)=n\}$

到达次数的条件分布

若$s<t,0\le m\le n$, 则$P\{N(s)=m|N(t)=n\}=\binom{n}{m}(\frac st)^m(1-\frac st)^{n-m}$, 即$N(s)|N(t)=n\sim B(n,\frac st)$

若条件与结果颠倒, 则为泊松分布, $P\{N(t)=n|N(s)=m\}=\frac{[\lambda(t-s)]^{n-m}}{(n-m)!}e^{-\lambda(t-s)}$

泊松过程的稀释 对$N(t)\sim Poi(\lambda t)$, 若以概率p独立记录事件得到过程$N_1(t)$, 则$N_1(t)\sim Poi(\lambda pt)$

非齐次泊松过程 $EN(t)=VarN(t)=\int_0^t\lambda(t)dt$

复合泊松过程矩母函数 $Y(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}X_i$, $g_{Y(t)}=\sum_{i=1}^n(g_X(t))^i\cdot P\{N(t)=n\}=e^{\lambda t[g_X(s)-1]}$

广义非齐次复合泊松过程的矩母函数 对$Y(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}X_i$, 矩母函数$g_{Y(t)}(s)=e^{m(t)[G(g_X(s))-1]}$

$Markov$过程 基础矩阵 若记转移矩阵中由瞬过态到瞬过态的分块矩阵为$\mathbf{A}$, 则基础矩阵为$\mathbf{M}=(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$

离出时间 从某一状态i出发进入吸收态的期望时间$ET_i=1+\sum_jP_{i,j}ET_j$, 或$\mathbf{g}=\mathbf{M}\cdot\mathbf{1}$

注: 平均首访时间与平均回访时间计算类似, 可将首访状态i视作吸收态i

离出分布 从瞬过态x出发进入吸收态z的概率$h(x)=\sum_yP_{x,y}h(y)$, 或$\mathbf{h}=\mathbf{M}\cdot\mathbf{b}$, 其中$\mathbf{b}$为$A$中$z$的列向量

生灭链 即仅在相邻状态和自己进行转移的过程, 满足细致平衡条件: $\pi(x)P_{x,y}=\pi(y)P_{y,x}$

求平稳分布/极限概率

离散时间: 对于遍历马氏链, 利用$\pi P=\pi$, 使用方程组、特征值为1的特征向量等方法求解; 对吸收链, 可求出离出分布h, 得到极限转移概率矩阵; 对生灭链, 则利用细致平衡条件得到$\pi(x)=f(x)\pi(0)$再$\sum_x\pi(x)=1$

可数状态: 正常返状态, 利用$\pi(x)=\sum_y\pi(y)P_{y,x}$, 生灭链利用细致平衡条件, 作累乘, 均可得到$\pi(x)=f(x)\pi(0)$, 再利用概率完备性$\sum_x\pi(x)=1$, 注意利用幂级数微分积分和平均常返时$\mu$

注: 双重无穷求和时可注意改变求和纵横顺序实现转换, 如$\sum_{x=0}^\infty\sum_{y=x}^\infty a_y=\sum_{k=0}^\infty(k+1)a_k$

分支过程 $X_0\equiv1$, 记Z_i为第n代第i个个体产生后代数, 独立同分布服从$\{p_k\}$, 则$X_{n+1}=\sum_{i=1}^{X_n}Z_i$

消亡概率: $\mu=EZ_1=\sum_kkP_k$, 若$\mu\le1$, 则以概率1消亡; 若$\mu>1$, 则$\sum_kP_ks^k=s$最小正解为消亡概率π

$EX_{n+1}=\mu EX_n=\mu^{n+1}$ $VarX_{n+1}=\sigma^2\mu^n\frac{1-\mu^{n+1}}{1-\mu},\mu\neq1;(n+1)\sigma^2,\mu=1$

$E_x[N(y)]$即从x出发访问y次数的期望值, $E_x[N(y)]=\sum_{k=1}^\infty P_x\{N(y)\ge k\}=\frac{f_{xy}}{1-f_{yy}}=\sum_{n=1}^\infty p_{x,y}^{(n)}$ 示性函数

而$P_x\{N(y)\ge k\}=\sum_{n=k}^\infty P_x\{N(y)=n\}=\sum_{n=k}^\infty f_{xy}f_{yy}^{n-1}(1-f_{yy})=f_{xy}f_{yy}^{k-1}$

常返态 $x\to y$条件下: 若状态x是常返态, 则y也是常返态; x是常返态$\leftrightarrow f_{yx}=1$

(0,t) 上的均匀分布中取 n 个样本, 第k个顺序统计量: $f_k(x)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac xt\right)^{k-1}\left(1-\frac xt\right)^{n-k}\frac1t$

$F_k(x)=\sum_{j=k}^nC_n^j\left(\frac xt\right)^j\left(1-\frac xt\right)^{n-j},0<x<t$, $E(X_k)=\frac{kt}{n+1}$, $Var(X_k)=\frac{k(n-k+1)t^2}{(n+1)^2(n+2)}$

二维联合正态分布的密度函数, 其中$\rho_{X,Y}=\frac{cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]}{\sigma_X\sigma_Y}$

$f(z,w)=\frac{1}{2\pi\sigma_z\sigma_w\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{z-\mu_z}{\sigma_z}\right)^2+\left(\frac{w-\mu_w}{\sigma_w}\right)^2-2\rho\left(\frac{z-\mu_z}{\sigma_z}\right)\left(\frac{w-\mu_w}{\sigma_w}\right)\right]\right)$

留数定理 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{jmx}dx=\pi j\sum_kRes[\frac{P(z)}{Q(z)}e^{jmz},x_k]+2\pi j\sum_kRes[\frac{P(z)}{Q(z)}e^{jmz},a_k],m>0$

x_k是实轴上1级极点, a_k是上半平面极点, m阶极点的留数为$\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^mf(z)]^{(m-1)}$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=2\pi j\sum_kRes[\frac{P(z)}{Q(z)},a_k]$, a_k是上半平面极点, Q比P高两次及以上